МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+$ $+2mn+n^2-9m-9n$ и $B=m^2n+mn^2-3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=10$, $AN=8$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2+4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x+5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-2y| \leqslant 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-4mn+4n^2+13m-26n$ и $B=m^2n-2mn^2-2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4}-\sqrt{3-y}+5=2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5+4x^2-\sqrt[4]{3y}=2y^5-\sqrt[4]{3x}+4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=6$, $AN=5$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases} |x-2y| \leqslant 2 \\ |2x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+$ $+4mn+4n^2-7m-14n$ и $B=m^2n+2mn^2+9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=4$, $AN=5$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии
$$\begin{cases} |4x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-4y| \leqslant 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-2mn+n^2+9m-9n$ и $B=m^2n-mn^2+3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=12$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{5-y}+5=2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4+x-5\sqrt[4]{y}=4y^4-5\sqrt[4]{x}+y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=26$, $AN=20$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

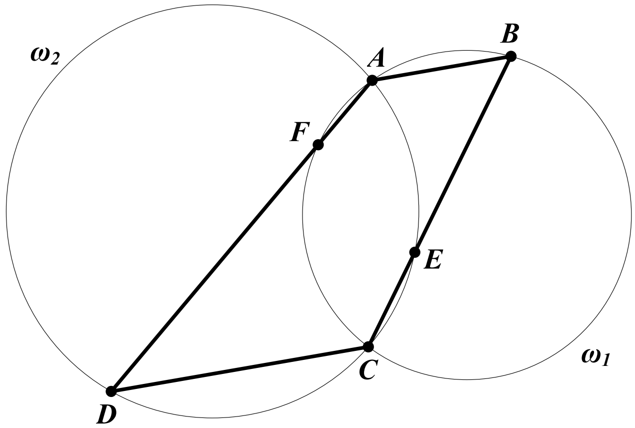
3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2\,024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0,\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0.\end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Вариант 14

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|x-1|$ и $|x^2+4x|$, а длина гипотенузы равна $|2x+3|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{2}+y\sqrt{12}+z\sqrt{75}=\sqrt{32}+\sqrt{108}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2-z^2$.

3. [4 балла] Назовём числа хорошими, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $343\cdot 10^{1000}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=5$, а площадь треугольника OBA_1 равна 3.

6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y+y^3=0,\\ 2x+1-y^3-2y^2+2xy=0. \end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если $AF:CE=3:5$.