

1

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 9$, $BC = 7$, $SO = 6$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

Ответ: _____.

2

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 8,5$, $BC = 7,5$, $SO = 6,5$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

Ответ: _____.

3

В прямой пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ высота AA_1 равна $3\sqrt{5}$, $BC = CD = 6$, а четырехугольник $ABDE$ – прямоугольник со сторонами $AB = 5$ и $AE = 4\sqrt{5}$.

- а) Докажите, что плоскости CA_1E_1 и AED_1 перпендикулярны.
- б) Найдите объем многогранника $CAED_1B_1$.

Ответ: _____.

4 В прямой пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ высота AA_1 равна $2\sqrt{3}$, треугольник BCD – правильный, со стороной 6, а четырехугольник $ABDE$ – равнобедренная трапеция со сторонами $AB = DE = 2$, $BD = 6$ и $AE = 4$.

- а) Докажите, что плоскости CA_1E_1 и AED_1 перпендикулярны.
- б) Найдите объем многогранника $CAED_1B_1$.

Ответ: _____.

5 В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром $\sqrt{13}$ и стороной основания 6 вписан шар. Плоскость α перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через ее середину.

- а) Докажите, что плоскость α и шар пересекаются более чем в одной точке.
- б) Найдите площадь сечения шара плоскостью α .

Ответ: _____.

6 В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 4 и стороной основания $2\sqrt{3}$ вписан шар. Плоскость α перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через ее середину.

- а) Докажите, что плоскость α и шар не имеют общих точек.
- б) Найдите расстояние от центра шара до плоскости α .

Ответ: _____.

7

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1 : \sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α , перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M .

- а) Докажите, что M – середина SB .
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и DM , если высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$.

Ответ: _____.

8

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1 : \sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α , перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α – это четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны.
- б) Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6.

Ответ: _____.

9

Грань $ABCD$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1 B_1 C_1$ является круг, вписанный в четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Высота конуса равна h , ребро куба равно a . Докажите, что $3a < h < 3,5a$.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и $SA_1 D$, где S – вершина конуса.

Ответ: _____.

10

Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1 B_1 C_1$ является круг, вписанный в четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$; $AB = a$, $AA_1 = \sqrt{2}a$.

- Высота конуса равна h . Докажите, что $4,5a < h < 5a$.
- Найдите угол между плоскостями ABC и SD_1C , где S – вершина конуса.

Ответ: _____.

11

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K – середина бокового ребра SA . Плоскость, параллельная плоскости ABC , проходит через точку K и пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- Докажите, что площадь четырехугольника $BSPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC .
- Найдите объем пирамиды $KBSPQ$.

Ответ: _____.

12

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K – середина бокового ребра SD . Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P .

- Докажите, что площадь четырехугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD .
- Найдите объем пирамиды $ACDKP$.

Ответ: _____.

13

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на ребрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 проходит через середину ребра A_1C_1 .
- б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью MNB_1 , если $AB = 6$, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: _____.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на ребрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$, точка K – середина ребра A_1C_1 .

- а) Докажите, что плоскость MNK проходит через вершину B_1 .
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости KMN , если $AB = 6$, $AA_1 = 2,4$.

Ответ: _____.

15

В правильной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а сторона основания равна 2. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости $AB_1 D_1$ проведена прямая l .

- а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении 3 : 1.
- б) Найдите угол между прямыми l и CB_1 .

Ответ: _____.

16

В правильной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 2, а сторона основания равна $\sqrt{6}$. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости $AB_1 D_1$ проведена прямая l .

- а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении 2 : 1.
- б) Найдите угол между прямыми l и CD_1 .

Ответ: _____.

17

Основание пирамиды $SABC$ – прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Высота пирамиды проходит через точку B .

- а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C .
- б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины ребер BC и SA , если известно, что $BS = AC$.

Ответ: _____.

18

Основание пирамиды $SABC$ – прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Высота пирамиды проходит через точку B .

- а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C .
- б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины ребер BC и SA , если известно, что $BS = 2AC$.

Ответ: _____.

19 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра AA_1 , а $AB = AA_1$. Плоскость α проходит через точки K и B_1 параллельно прямой BC_1 .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1C_1 в отношении $1 : 2$.
- б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α , если $AB = 6$.

Ответ: _____.

20 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки K и N – соответственно середины ребер AA_1 и AC . Плоскость α проходит через точки K и B_1 параллельно прямой CB_1 .

- а) Докажите, что сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскость α является равнобедренная трапеция.
- б) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью α , если $AB = 4$, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: _____.

21 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- а) Докажите, что $KM = KD$.
- б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

Ответ: _____.

22

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

Ответ: _____.

23

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 4$, $SK : KB = 1 : 3$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объем пирамиды $BCKM$.

Ответ: _____.

24

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 2$, $SK = 1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K .

- а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Ответ: _____.

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания AB $\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 3 : 2$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и E .

- а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α – равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F , а основанием – сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

Ответ: _____.

26

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 2 : 3$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и E .

- а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α – равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F , а основанием – сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

Ответ: _____.

27

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах $A_1 D_1$ и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1 K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2 : 1$.

- а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1 .

Ответ: _____.

28

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На рёбрах $C_1 D_1$ и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $D_1 K = KC_1$, а $DM : MD_1 = 1 : 3$.

- а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABB_1 .

Ответ: _____.

29

В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой $H_1 E_1$ и проходит через точки M и A .

- а) Докажите, что сечение данной призмы плоскостью α – равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F_1 , а основанием – сечение данной призмы $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ плоскостью α .

Ответ: _____.

30

Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

- а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
- б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

Ответ: _____.

31 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На ребрах AB и SC отмечены точки M и K соответственно, причем $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Ответ: _____.

32 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 5. На ребре SC отмечена точка K , причем $SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит точку K и параллельна плоскости SAD .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α – трапеция.
- б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка S , а основанием – сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Ответ: _____.

33 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в четыре раза больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AC проведена плоскость α , которая пересекает ребро BB_1 в точке K и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

- а) Докажите, что точка K делит ребро BB_1 в отношении $7 : 1$, считая от точки B .
- б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α , если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а ребро меньшего основания равно $2\sqrt{6}$.

Ответ: _____.

34

В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в четыре раза больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α , которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

- а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении $5 : 13$, считая от точки C .
- б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α , если высота пирамиды равна 13 , а ребро меньшего основания равно 3 .

Ответ: _____.

35

Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 36 . Все боковые рёбра пирамиды равны 30 . На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $BK = CN = 20$. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости ABC .

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $2 : 7$.
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α .

Ответ: _____.

36

Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 48. Все боковые рёбра пирамиды равны 40. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $FK = FN = 10$. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости ABC .

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $1 : 3$.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α .

Ответ: _____.

Ответы:

1. б) 24
2. б) 26
3. б) 180
4. б) 40
5. б) $(2\sqrt{3} - 3,25)\pi$
6. б) $\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$
7. б) 3
8. б) $6\sqrt{3}$
9. б) $\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$
10. б) $\operatorname{arctg}(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$
11. б) $80\sqrt{3}$
12. б) 150
13. б) $5\sqrt{3}$
14. б) $1\frac{11}{13}$
15. б) $\arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}$
16. б) $\arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}$
17. б) 45°
18. б) $\operatorname{arctg} 0,5$
19. б) $0,3\sqrt{30}$
20. б) $\operatorname{arctg} 2$
21. б) $\frac{9\sqrt{5}}{4}$
22. б) $\arccos \frac{14}{55}$
23. б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
24. б) $\frac{30\sqrt{17}}{7}$

25. б) 36

26. б) 189

27. б) 45°

28. б) $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{21}}{7}$

29. б) $36 + 30\sqrt{2}$

30. б) $\frac{5\sqrt{119}}{13}$

31. б) $\arccos \frac{31\sqrt{10}}{140}$

32. б) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$

33. б) $13\sqrt{6}$

34. б) 48,5

35. б) $4\sqrt{3}$

36. б) $6\sqrt{3}$