№16 из ЕГЭ последних пяти лет

Содержание

№16 из ЕГЭ 2023

№16.1 *(2023, досрочная волна)*

Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причем меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $NC : CM = BL : LA$.

б) Найдите MN, если $BL : LA = 3 : 2$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

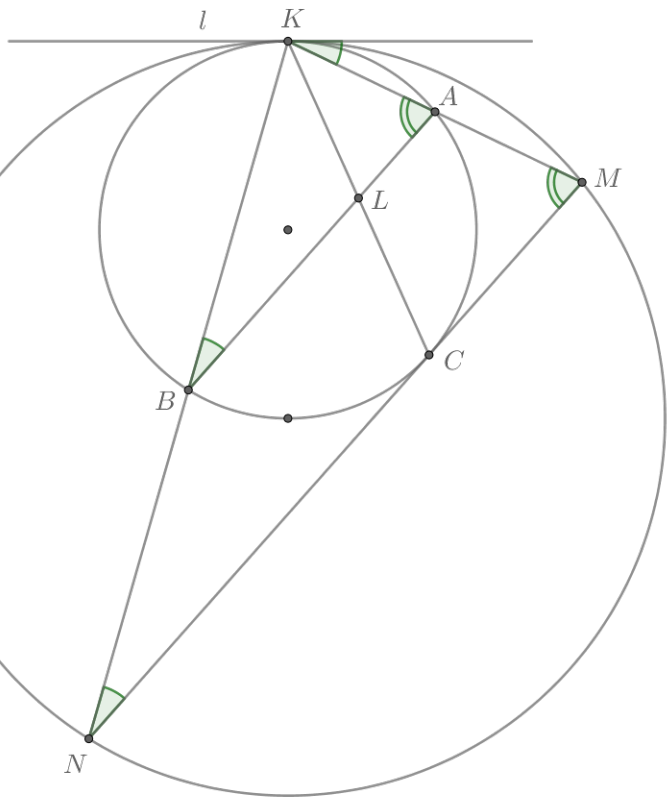
Ответ

б) $\dfrac{115}{6}$

Решение

а) Проведем через точку K общую касательную l к окружностям.

Рассмотрим меньшую окружность. Мы знаем, что угол между хордой и касательной к окружности равен половине дуги, заключенной между ними, значит, угол между AK и l равен вписанному углу ABK.



Рассмотрим большую окружность. По аналогичным соображениям угол между MK и l равен вписанному углу MNK.

Тогда, так как точки K, A и M лежат на одной прямой, то $\angle ABK = \angle MNK$.

Таким образом, по признаку параллельных прямых $AB \parallel MN$.

Рассмотрим треугольники AKL и MKC. Они подобны по двум углам: $\angle MKC$ — общий, а $\angle KAL = \angle KMC$ как соответственные при параллельных прямых AB и MN и секущей KM. Запишем отношение подобия:

$$\frac{LA}{CM} = \frac{KL}{KC}$$

Рассмотрим треугольники BKL и NKC. Они подобны по двум углам: $\angle NKC$ — общий, а $\angle KBL = \angle KNC$ как соответственные при параллельных прямых AB и MN и секущей KN. Запишем отношение подобия:

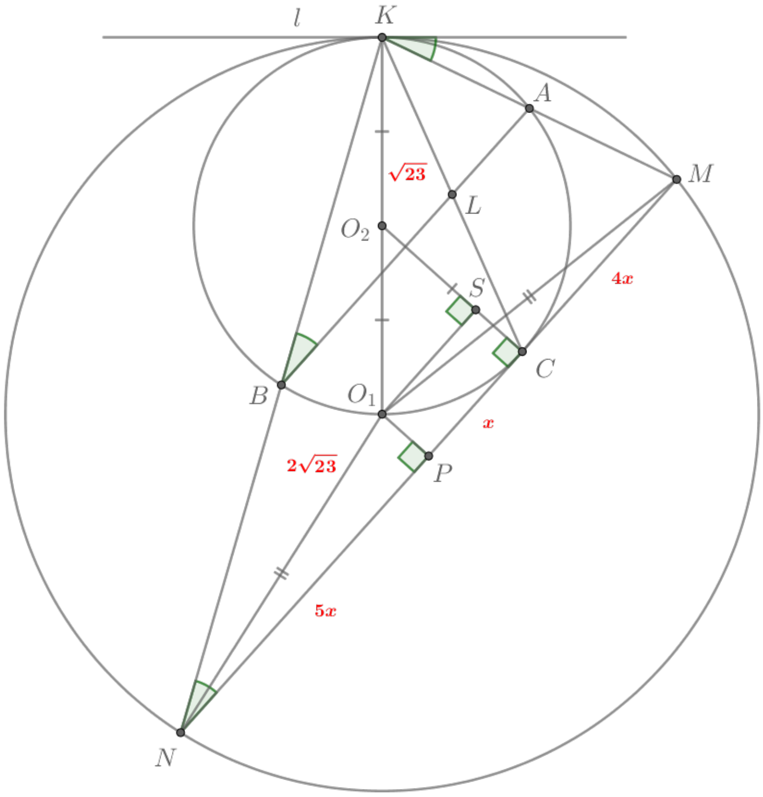
$$\frac{BL}{NC} = \frac{KL}{KC}$$

Таким образом,

$$\frac{LA}{CM} = \frac{KL}{KC} = \frac{BL}{NC} \quad \Rightarrow \quad \frac{NC}{CM} = \frac{BL}{LA}$$

б) Пусть $CM = 4x$. По условию $BL : LA = 3 : 2$. В предыдущем пункте мы доказали, что $NC : CM = BL : LA$, следовательно, $NC = 6x$. Тогда $MN = 10x$.

Пусть O_1 и O_2 — центры большей и меньшей окружностей соответственно. Пусть O_1P — перпендикуляр к MN. В равнобедренном треугольнике NO_1M отрезок O_1P — это высота, а значит и медиана. Тогда $NP = PM = 5x$. Таким образом, $PC = NC - NP = x$.



Заметим, что радиус большей окружности равен диаметру меньшей, то есть

$$O_1N = 2O_2K = 2 \cdot \sqrt{23} = 2\sqrt{23}$$

Запишем теорему Пифагора для треугольника O_1NP :

$$NO_1^2 = NP^2 + O_1P^2 \quad \Leftrightarrow \quad 92 = 25x^2 + O_1P^2$$

№16.2 *(2023, досрочная волна)*

Две окружности касаются внешним образом в точке B. AB и BC — диаметры первой и второй окружностей. Из точки A проведена касательная AM ко второй окружности, которая вторично пересекает первую окружность в точке K. Луч MB вторично пересекает первую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника BCD, если $AK = 7$, $KM = 14$.

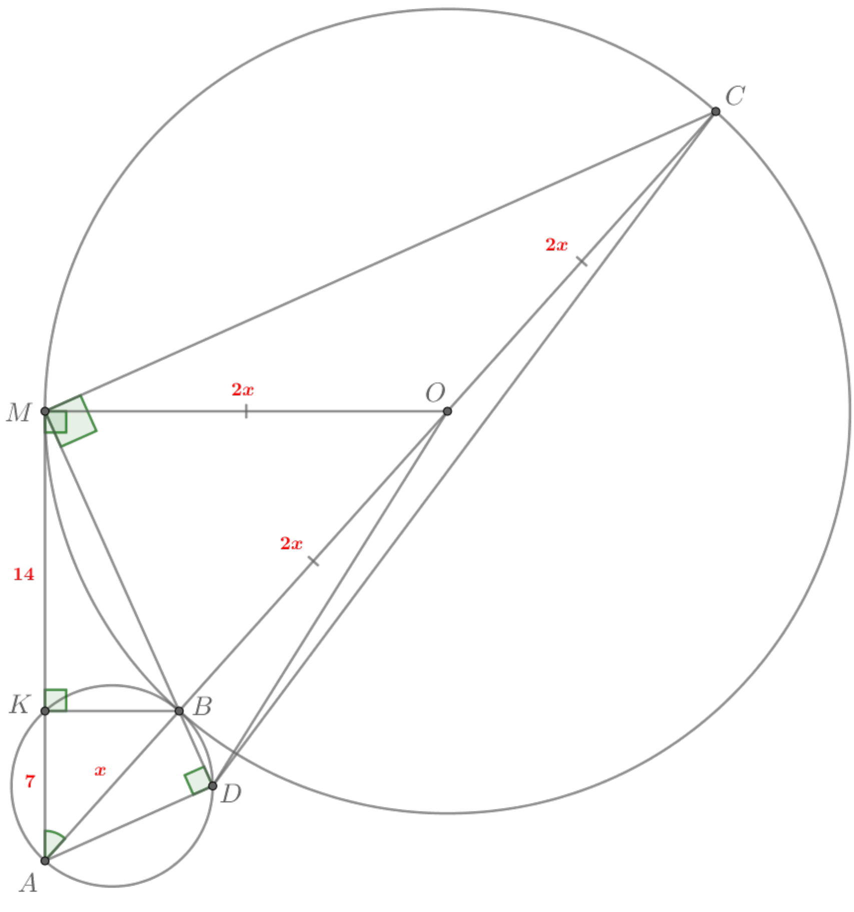
Ответ

б) $\dfrac{147\sqrt{5}}{5}$

Решение

а) Вписанный угол BMC равен 90°, так как опирается на диаметр BC. Вписанный угол BDA равен 90°, так как опирается на диаметр BA. Таким образом, накрест лежащие углы BMC и BDA, образованные прямыми CM и AD и секущей MD, равны. Следовательно, прямые AD и CM параллельны.

б) Пусть O — середина BC. Тогда O — центр окружности с диаметром BC. Проведем радиус OM к точке касания. Получим, что $\angle AMO = 90^\circ$.



Рассмотрим треугольники AKB и AMO. Они подобны по двум углам: $\angle AKB = \angle AMO = 90^\circ$,

$\angle MAB$ — общий. Пусть $AB = x$. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AO} \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{21x}{7} = 3x \quad \Rightarrow \quad BO = 2x$$

Таким образом,

$$CO = MO = BO = 2x$$

Из отношения подобия треугольников AKB и AMO :

$$\frac{KB}{MO} = \frac{AK}{AM} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad KB = \frac{MO}{3} = \frac{2}{3}x$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AKB. В нем по теореме Пифагора

$$AK^2 + KB^2 = AB^2$$

$$49 + \frac{4x^2}{9} = x^2$$

$$9 \cdot 49 + 4x^2 = 9x^2$$

$$9 \cdot 49 = 5x^2$$

$$x = \frac{21\sqrt{5}}{5}$$

Тогда

$$KB = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{21\sqrt{5}}{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$AMCD$ — трапеция, MD и AC — ее диагонали, а B — их точка пересечения. Значит, $S_{BCD} = S_{BMA}$. Тогда

$$S_{BCD} = S_{BMA} = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{5}}{5} \cdot 21 = \frac{147\sqrt{5}}{5}$$

№16.3 *(2023, досрочная волна)*

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

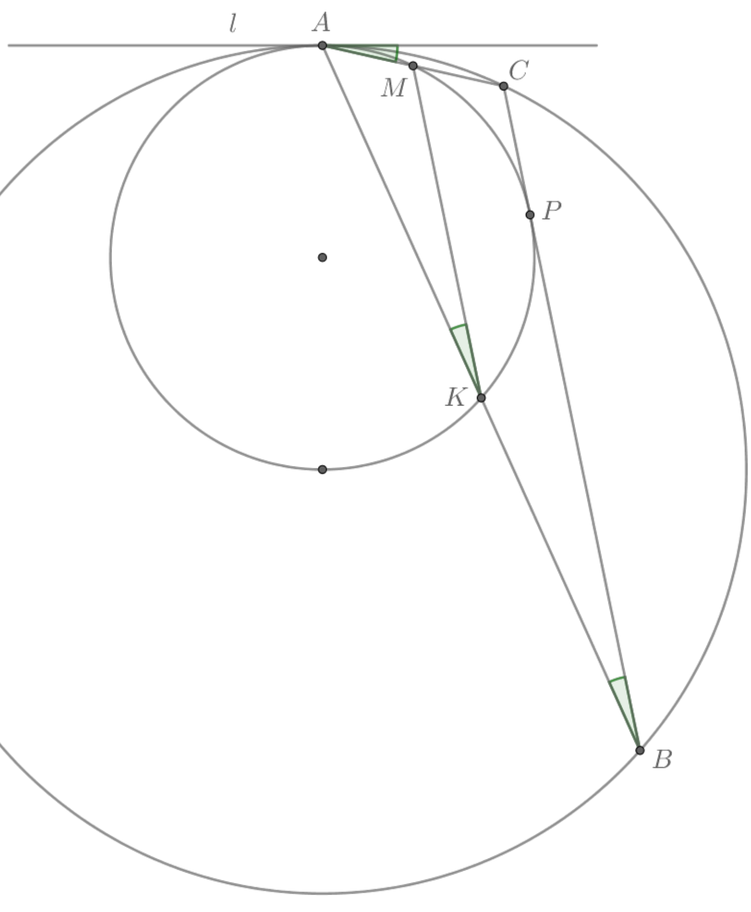
Ответ

б) $\sqrt{10}$

Решение

а) Проведем через точку A общую касательную l к окружностям.

Рассмотрим меньшую окружность. Мы знаем, что угол между хордой и касательной к окружности равен половине дуги, заключенной между ними, значит, угол между AM и l равен вписанному углу AKM.



Рассмотрим большую окружность. По аналогичным соображениям угол между AC и l равен углу ABC.

Тогда, так как точки A, M и C лежат на одной прямой, то $\angle AKM = \angle ABC$.

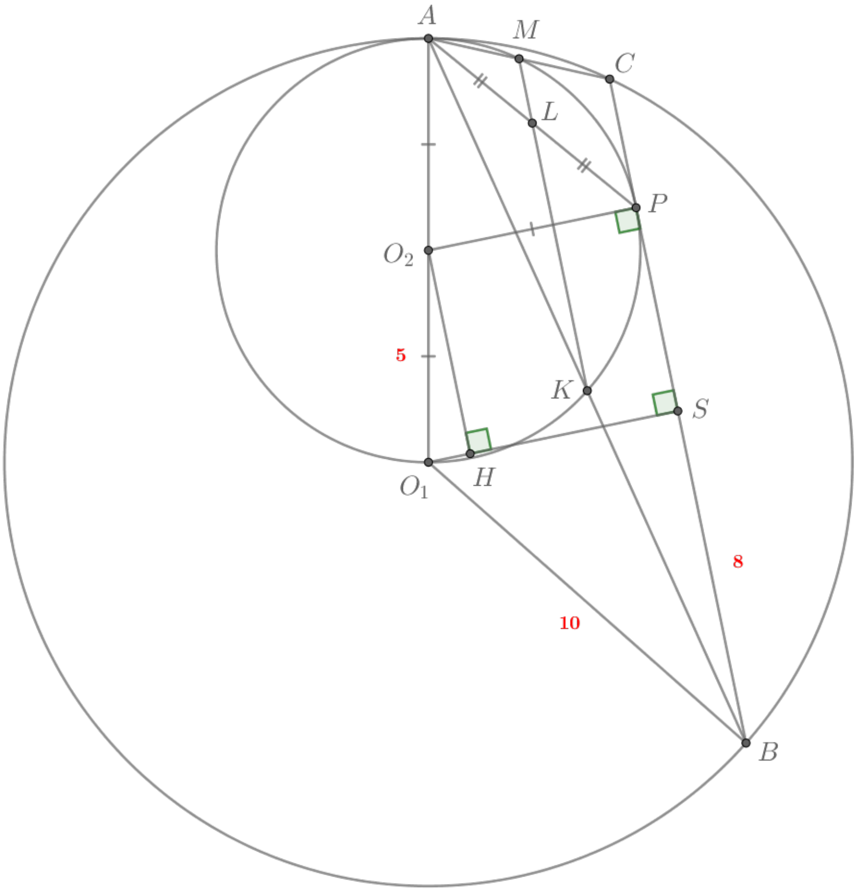
Таким образом, по признаку параллельных прямых $KM \parallel BC$.

б) Пусть O_1 и O_2 — центры большей и меньшей окружностей соответственно. Проведем радиус O_2P. Заметим, что $\angle BPO_2 = 90°$, так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Опустим перпендикуляр O_1S на BC. В равнобедренном треугольнике BO_1C отрезок O_1S — высота, а значит и медиана. Тогда $BS = SC$.

По теореме Пифагора для треугольника BO_1S :

$$O_1S^2 = BO_1^2 - BS^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad O_1S = 6$$



Так как отрезки O_1O_2 и O_2P — радиусы меньшей окружности, то

$$O_1O_2 = O_2P = 5$$

Рассмотрим прямоугольную трапецию O_2PSO_1.

Пусть O_2H — перпендикуляр к O_1S, тогда O_2HSP — прямоугольник и

$$O_1H = O_1S - HS = O_1S - O_2P = 6 - 5 = 1$$

Следовательно, по теореме Пифагора

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$$

Тогда

$$BP = BS + SP = 8 + 2\sqrt{6}, \quad PC = BC - BP = 16 - 8 - 2\sqrt{6} = 8 - 2\sqrt{6}$$

Так как хорды данных окружностей, лежащие на одной прямой, проходящей через точку A, относятся как их диаметры, то KM — средняя линия в треугольнике ABC. Тогда KL — средняя линия в треугольнике ABP и ML — средняя линия в треугольнике ACP, следовательно,

$$KL = 0,5BP = 4 + \sqrt{6}, \quad ML = 0,5PC = 4 - \sqrt{6}$$

По теореме о произведении отрезков хорд имеем:

$$AL \cdot LP = ML \cdot KL = \left(4 - \sqrt{6}\right)\left(4 + \sqrt{6}\right) = 16 - 6 = 10$$

С учетом равенства $AL = LP$ получим $AL^2 = 10$, следовательно, $AL = \sqrt{10}$.

№16 из ЕГЭ 2022

№16.4 *(2022, основная волна)*

На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B. Из точки B на биссектрису и на другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + BD^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T. Найдите отношение $AT : TC$, если $\cos\angle ABC = \dfrac{3}{8}$.

Ответ

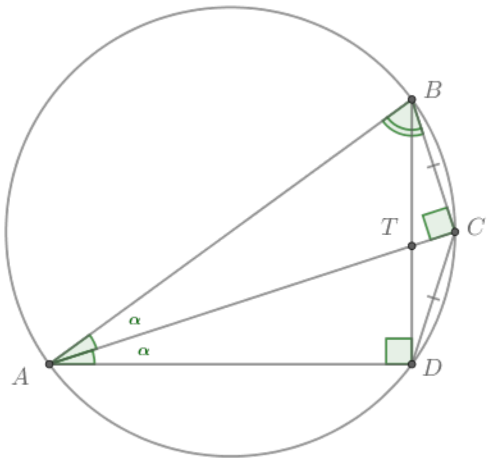
б) $\dfrac{46}{9}$

Решение

а) Углы BCA и BDA прямые, значит, точки C и D лежат на окружности с диаметром AB.

Биссектриса AC вписанного угла BAD делит дугу BCD пополам, значит, хорды BC и CD, стягивающие равные дуги, равны. Отсюда с учетом теоремы Пифагора для треугольников ABC и ABD :

$$AC^2 + CD^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2 = AD^2 + BD^2$$



б) Пусть $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$, тогда из прямоугольного треугольника ABC :

$$\sin\alpha = \sin\angle BAC = \cos\angle ABC = \frac{3}{8}$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, тогда

$$\angle CBD = \angle CAD = \alpha \quad\Rightarrow\quad TC = BC\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

В прямоугольных треугольниках ABC, ABD и ATD :

$$AB = \frac{BC}{\sin\alpha};\quad AD = AB\cdot\cos 2\alpha = \frac{BC\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha};\quad AT = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{BC\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Тогда искомое отношение равно

$$AT : TC = \frac{BC\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} : (BC\cdot\operatorname{tg}\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{46}{9}$$

№16.5 *(2022, основная волна)*

В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC взята точка M такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AMD, лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60°$.

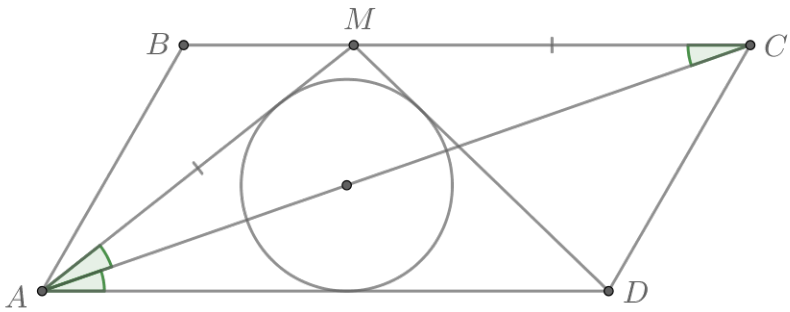
Ответ

б) $\dfrac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}$

Решение

а) По условию $AM = MC$, значит, треугольник AMC равнобедренный, то есть $\angle MAC = \angle MCA$.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тогда $\angle MAC = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла MAD, значит, центр вписанной окружности лежит на AC.



б) Обозначим $AM = MC$ через x, тогда $BM = 10 - x$. По теореме косинусов в треугольнике ABM :

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 120°$$

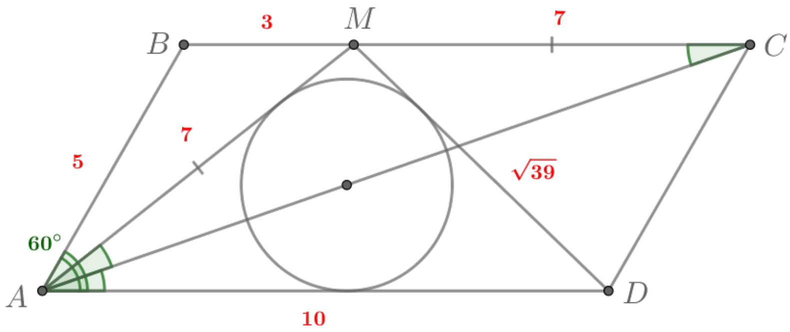
$$x^2 = 25 + (10 - x)^2 + 5(10 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

По теореме косинусов в треугольнике CMD с углом $\angle MCD = 60°$:

$$MD = \sqrt{MC^2 + CD^2 - MC \cdot CD} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 7 \cdot 5} = \sqrt{39}$$

Треугольник AMD и параллелограмм $ABCD$ имеют общую высоту, равную расстоянию между прямыми AD и BC, и общую сторону AD, перпендикулярную этой высоте. Значит, площадь S_{AMD} треугольника AMD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{AMD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{2} = \frac{5 \cdot 10 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$



С другой стороны, площадь треугольника AMD равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Отсюда найдём радиус r вписанной в треугольник AMD окружности:

$$r = \frac{2S_{AMD}}{AM + MD + AD} = \frac{25\sqrt{3}}{7 + \sqrt{39} + 10} = \frac{25\sqrt{3}}{17 + \sqrt{39}} = \frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}$$

№16.6 *(2022, основная волна)*

В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AL угла BAC. На прямой CD за точкой D отметили точку E такую, что $AE = EC$. Кроме того, $\angle BAC = 2\angle CAD$.

а) Докажите, что треугольники BAC и BAL подобны.

б) Найдите EL, если $\operatorname{tg}\angle BAC = 0,25$ и $AC = 12$.

Ответ

б) $6\sqrt{17} - 22,5$

Решение

а) По условию $\angle BAC = 2\angle CAD$ и AL — биссектриса $\angle BAC$, значит,

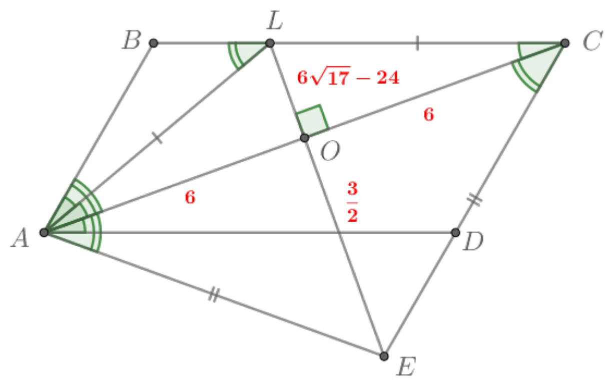
$$\angle BAL = \angle LAC = \angle CAD.$$

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AD \parallel BC$ и $\angle CAD = \angle BCA$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей AC. Тогда

$$\angle BLA = \angle BCA + \angle LAC = 2\angle CAD$$

как внешний угол треугольника ALC. Значит, треугольники BAC и BLA подобны по двум углам:

$$\angle BCA = \angle CAD = \angle BAL, \quad \angle BAC = 2\angle CAD = \angle BLA$$



б) Пусть O — середина AC, тогда $AO = CO = \frac{1}{2}AC = 6$. Рассмотрим треугольник ALC. По предыдущему пункту $\angle LAC = \angle LCA$, значит, треугольник ALC — равнобедренный и $LO \perp AC$.

Рассмотрим треугольник AEC. По условию $AE = EC$, значит, $EO \perp AC$. Тогда точки L, O и E лежат на одной прямой, то есть $EL = EO + OL$.

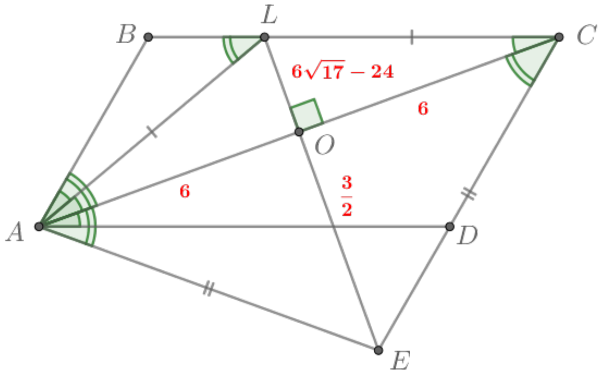
Рассмотрим треугольник ALO. В нем $\angle AOL = 90^\circ$, значит,

$$OL = AO \operatorname{tg}\angle LAC = AO \operatorname{tg}\angle CAD$$

Заметим, что $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 3\angle CAD$ и $\angle BAD$ — угол параллелограмма, значит, $0 < \angle CAD < 60°$. Тогда $\operatorname{tg}\angle CAD > 0$. По формуле тангенса двойного угла имеем:

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}2\angle CAD = \frac{2\operatorname{tg}\angle CAD}{1-\operatorname{tg}^2\angle CAD} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\angle CAD}{4} = 2\operatorname{tg}\angle CAD \quad \Rightarrow \quad 1-\operatorname{tg}^2\angle CAD - 8\operatorname{tg}\angle CAD = 0$$



Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\angle CAD$ и исключая отрицательный корень, получаем, что $\operatorname{tg}\angle CAD = \sqrt{17}-4$.

Тогда

$$OL = AO\operatorname{tg}\angle CAD = 6\cdot\left(\sqrt{17}-4\right) = 6\sqrt{17}-24$$

Рассмотрим треугольник AEC. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle ACE = \angle BAC$ и в треугольнике COE мы можем найти сторону EO :

$$EO = CO\operatorname{tg}\angle ACE = CO\operatorname{tg}\angle BAC = 6\cdot\frac{1}{4} = 1,5$$

Отсюда искомый отрезок равен

$$EL = EO + OL = 1,5 + 6\sqrt{17} - 24 = 6\sqrt{17} - 22,5$$

№16.7 *(2022, основная волна)*

На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D такая, что $AB = BD$. Биссектриса BF треугольника ABC пересекает прямую AD в точке E. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK.

а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.

б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD : DC = 3 : 2$.

Ответ

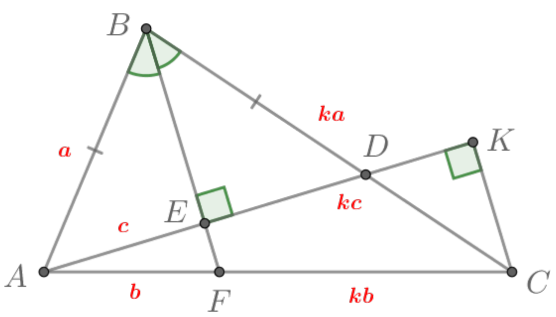
б) $\dfrac{12}{13}$

Решение

а) Рассмотрим треугольник ABC. Так как BF — его биссектриса, то по свойству биссектрисы треугольника $AB : BC = AF : FC$.

Рассмотрим треугольник ABD. По условию $AB = BD$, то есть треугольник ABD равнобедренный. Поскольку BE — его биссектриса, а значит, высота и медиана, то $BF \perp AD$. По условию $CK \perp AD$, значит, $BF \parallel CK$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках $AF : FC = AE : EK$. Тогда имеем:

$$AB : BC = AF : FC = AE : EK$$



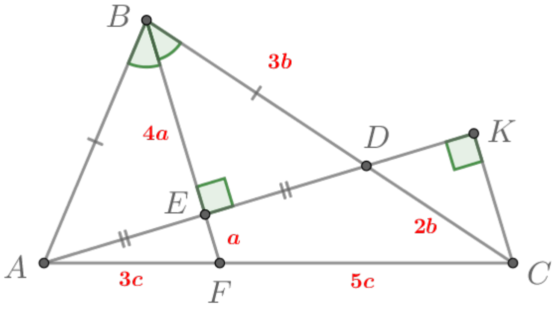
б) Пусть S — площадь треугольника ABE. Заметим, что BE — медиана треугольника ABD, значит, площади треугольников ABE и BDE равны, то есть $S_{ABE} = S_{BDE} = S$.

По условию $BD : DC = 3 : 2$, значит,

$$AF : FC = AB : BC = BD : BC = 3 : 5 \quad \Rightarrow \quad AF : AC = 3 : 8$$

Запишем теорему Менелая для треугольника BCF и секущей AD :

$$\frac{FE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AF} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{FE}{EB} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{FE}{EB} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{BE}{BF} = \frac{4}{5}$$



Тогда можем найти площадь треугольника BCF :

$$\frac{S_{BCF}}{S_{BDE}} = \frac{BF \cdot BC}{BE \cdot BD} = \frac{BF}{BE} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad S_{BCF} = \frac{25}{12}S$$

Теперь мы можем найти площадь четырехугольника $CDEF$:

$$S_{CDEF} = S_{BCF} - S = \frac{25}{12}S - S = \frac{13}{12}S$$

Тогда искомое отношение площадей равно

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CDEF}} = \frac{S}{\frac{13}{12}S} = \frac{12}{13}$$

№16.8 *(2022, основная волна)*

Дан треугольник ABC, в котором проведены три высоты: AA_1, BB_1 и CC_1. Через точку C_1 проведена прямая, параллельная BB_1, которая пересекает AA_1 в точке K. Пусть H — точка пересечение высот треугольника ABC.

а) Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.

б) Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC, если $AB = 4$, $BC = 5$ и $AC = \sqrt{17}$.

Ответ

б) $\dfrac{9}{256}$

Решение

а) Рассмотрим четырехугольник A_1BC_1H. В нем $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$, значит, четырехугольник A_1BC_1H — вписанный. Тогда внешний угол C_1HA при вершине H равен противолежащему углу A_1BC_1, то есть $\angle C_1HA = \angle A_1BC_1 = \angle CBA$.

Рассмотрим треугольник ABB_1. В нем $\angle BB_1A = 90^\circ$, значит, по сумме углов треугольника $\angle B_1BA = 90^\circ - \angle BAB_1$.

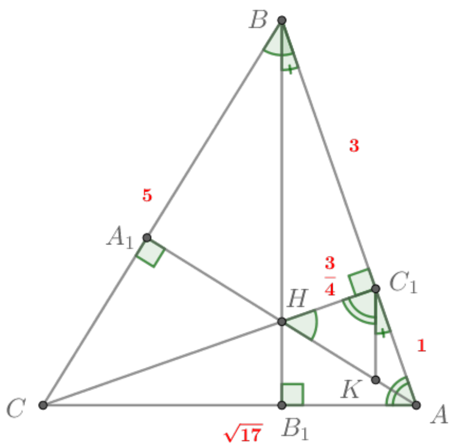
Соответственные углы B_1BA и KC_1A образованы параллельными прямыми BB_1 и C_1K и секущей BA, значит, $\angle B_1BA = \angle KC_1A$.

Рассмотрим угол AC_1H. Он прямой, так как CC_1 — высота треугольника ABC. Тогда

$$\angle KC_1H = 90^\circ - \angle KC_1A = 90^\circ - \angle B_1BA = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAB_1) = \angle BAB_1 = \angle BAC$$

Мы получили, что $\angle KC_1H = \angle BAC$ и $\angle C_1HA = \angle CBA$, значит, треугольники ABC и C_1HK подобны по двум углам, следовательно, выполняется соотношение

$$\frac{AB}{BC} = \frac{C_1H}{KH} \quad \Rightarrow \quad AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$$



б) Запишем теорему косинусов для треугольника ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 17 = 16 + 25 - 40\cos\angle ABC \quad \Leftrightarrow \quad \cos\angle ABC = \frac{16+25-17}{40} = 0,6$$

Тогда мы можем найти BC_1 и AC_1 :

$$BC_1 = BC\cos\angle ABC = 5 \cdot 0,6 = 3 \quad \Rightarrow \quad AC_1 = AB - BC_1 = 4 - 3 = 1$$

В предыдущем пункте мы доказали, что $\angle CBA = \angle C_1HA$. Рассмотрим прямоугольный треугольник C_1HA. В нем имеем:

$$C_1H = AH\cos\angle C_1HA = \left(\frac{AC_1}{\sin\angle C_1HA}\right)\cos\angle C_1HA =$$

$$= AC_1\frac{\cos\angle C_1HA}{\sin\angle C_1HA} = AC_1\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ABC}$$

Найдем $\sin\angle ABC$. Так как $\angle ABC$ является углом треугольника, то $\sin\angle ABC > 0$. Тогда

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2\angle ABC} = \sqrt{1-0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1H = AC_1 \cdot \frac{0,6}{0,8} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

По условию $AB = 4$. Тогда коэффициент подобия k треугольников C_1HK и ABC равен

$$k = \frac{C_1H}{AB} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{C_1HK}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{3}{16}\right)^2 = \frac{9}{256}$$

№16.9 *(2022, основная волна)*

Биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M и N соотвественно. Известно, что угол BCA равен 85° и угол ABC равен 40°.

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Пусть MN и BC пересекаются в точке D. Найти площадь треугольника BDN, если его высота BH равна 7.

Ответ

б) 49

Решение

а) Найдем угол BAM. Заметим, что $\angle BAM = \angle BAC + \angle CAM$. Углы CAM и CBM опираются на одну дугу, значит, $\angle CAM = \angle CBM$. По условию BB_1 — биссектриса угла ABC, равного 40°, следовательно, $\angle CBM = \angle ABM = 20^\circ$.

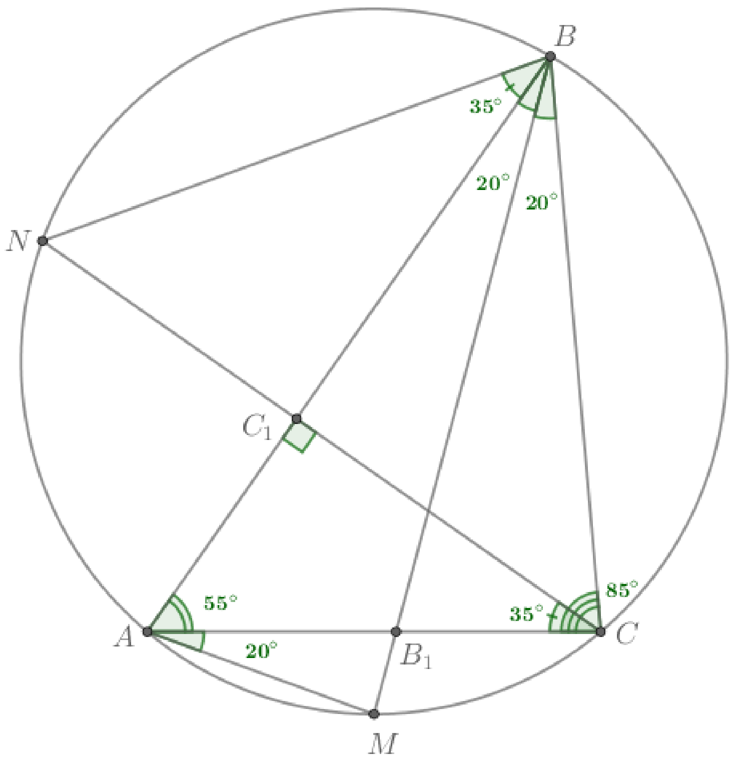
По условию $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle BCA = 85^\circ$, значит, по сумме углов в треугольнике ABC :

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA = 180^\circ - 40^\circ - 85^\circ = 55^\circ \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \angle BAM = \angle BAC + \angle CAM = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ$$

Найдем угол NBC :

$$\angle NBC = \angle NBA + \angle ABC = \ NBA + 40^\circ$$



Углы NBA и NCA опираются на одну дугу, значит, $\angle NBA = \angle NCA$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACC_1. По условию $\angle AC_1C = 90^\circ$, следовательно, по сумме углов треугольника ACC_1 :

$$\angle NCA = \angle C_1CA = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ \quad \Rightarrow$$

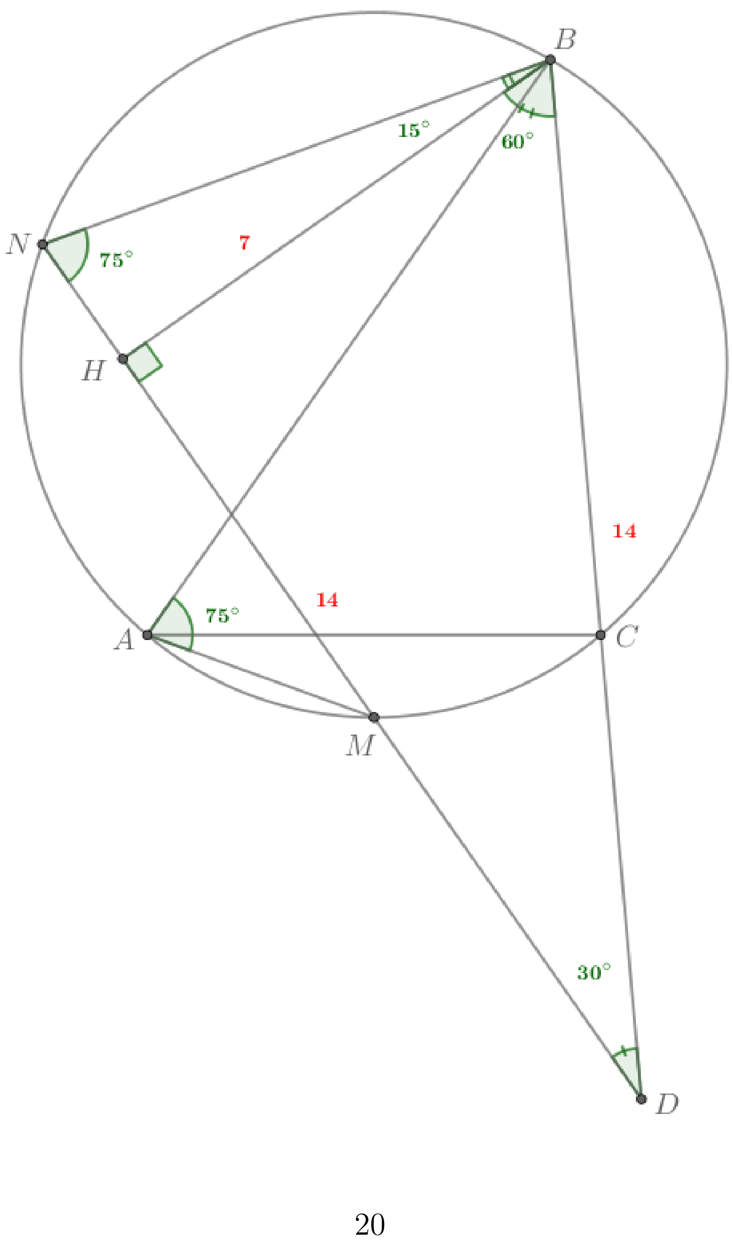
$$\Rightarrow \quad \angle NBC = \angle NBA + 40^\circ = \angle NCA + 40^\circ = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$$

Тогда дуги BM и CN равны, значит, равны и хорды, стягивающие их, то есть $BM = CN$.

б) Заметим, что $\angle DNB = \angle MNB = \angle MAB$, так как они опираются на одну дугу BM. Тогда треугольник BDN является равнобедренным с углами $\angle DNB = \angle DBN = 75^\circ$ и $DN = DB$. Тогда по сумме углов треугольника $\angle BDN = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник BHD. В нем $\angle BHD = 90^\circ$, а $\angle BDH = 30^\circ$, то есть это прямоугольный треугольник с углом 30°. Значит, в треугольнике BHD имеем $DB = 2BH = 2 \cdot 7 = 14$, а в треугольнике BDN имеем $DN = DB = 14$. Тогда

$$S_{BDN} = \frac{1}{2} \cdot DN \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49$$



№16.10 *(2022, досрочная волна)*

Прямая, параллельная боковой стороне CD равнобокой трапеции $ABCD$, пересекает боковую сторону AB в точке F и основание AD в точке E. Оказалось, что $FC = ED$.

а) Докажите, что углы AFE и BCF равны.

б) Известно, что $FE = 5$, $ED : FB = 3 : 1$, а площадь четырехугольника $FCDE$ равна $14\sqrt{35}$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

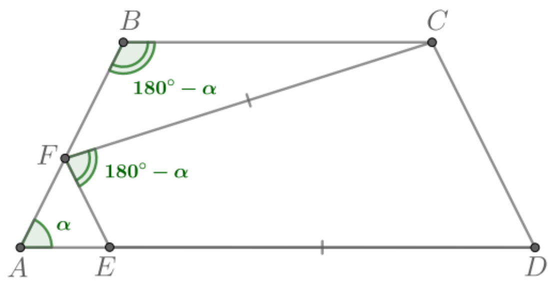
Ответ

б) $\dfrac{73\sqrt{35}}{4}$

Решение

а) Обозначим $\angle BAD = \alpha$. В равнобедренной трапеции $ABCD$ имеем:

$$\angle BAD = \angle CDA = \alpha, \quad \angle ABC = \angle BCD = 180^\circ - \alpha$$



Так как FE параллельно CD, то четырехугольник $EFCD$ — трапеция. По условию $FC = ED$, значит, трапеция является равнобедренной. Тогда, так как $\angle EDC = \alpha$, то

$$\angle FCD = \angle EDC = \alpha, \quad \angle CFE = \angle DEF = 180^\circ - \alpha$$

Тогда

$$\angle BCF = \angle BCD - \angle FCD = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

Также

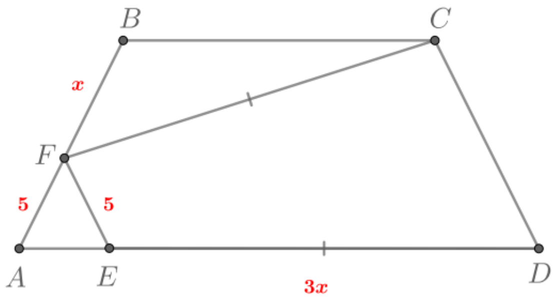
$$\angle AEF = 180^\circ - \angle FED = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

Тогда

$$\angle AFE = 180^\circ - \angle FAE - \angle FEA = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha = \angle BCF$$

Что и требовалось доказать.

б) Из пункта а) известно, что $\angle FAE = \angle FEA = \alpha$, значит, треугольник AFE — равнобедренный, $AF = FE = 5$.



Так как $\angle AFE = 180^\circ - 2\alpha$, то запишем теорему синусов для треугольника AFE :

$$\frac{AF}{\sin\angle FEA} = \frac{AE}{\sin\angle AFE} = \frac{FE}{\sin\angle FAE} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AE = \frac{AF\sin\angle AFE}{\sin\angle AEF} = \frac{5\cdot\sin(180^\circ - 2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{5\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 10\cos\alpha$$

Обозначим $FB = x$, тогда, так как $ED : FB = 3:1$, то $ED = 3FB = 3x$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $CD = AB = 5 + x$.

Так как по условию FE параллельно DC, то $EFCD$ — трапеция, при этом $FE = 5$, $CD = 5 + x$, $ED = FC = 3x$.

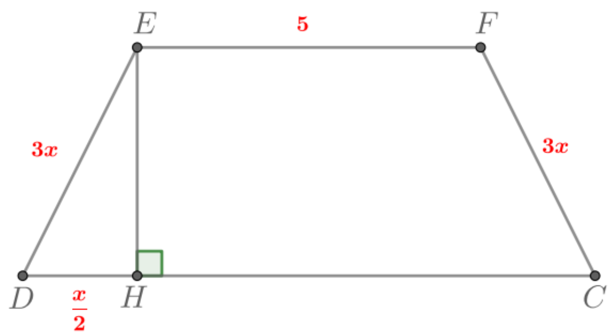
Рассмотрим отдельно трапецию $EFCD$. Опустим высоту BH. Так как трапеция равнобедренная, то

$$DH = \frac{1}{2}(DC - EF) = \frac{1}{2}(5 + x - 5) = \frac{x}{2}$$

Треугольник DEH — прямоугольный, найдем EH по теореме Пифагора:

$$DE^2 = EH^2 + DH^2 \quad \Rightarrow \quad EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} =$$

$$= \sqrt{(3x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{9x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{35x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{35}}{2}$$



Также отметим, что $\angle BAB = \angle EDH = \alpha$. Из треугольника DEH найдем синус и косинус угла α :

$$\sin\alpha = \sin\angle EDH = \frac{EH}{ED} = \frac{x\sqrt{35}}{2} : (3x) = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\cos\alpha = \cos\angle EDH = \frac{DH}{ED} = \frac{x}{2} : (3x) = \frac{1}{6}$$

Найдем площадь трапеции $DEFC$ по формуле

$$S_{EFCD} = \frac{1}{2}(EF + DC) \cdot EH = \frac{1}{2}(5 + (5 + x)) \cdot \frac{x\sqrt{35}}{2} = \frac{10x\sqrt{35} + x^2\sqrt{35}}{4}$$

По условию площадь трапеции $DEFC$ равна $14\sqrt{35}$, то есть

$$\frac{10x\sqrt{35} + x^2\sqrt{35}}{4} = 14\sqrt{35} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 10x - 56 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -14 \end{array}\right.$$

Корень $x = -14$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, $x = 4$.

Вернемся к исходной трапеции $ABCD$. Так как $x = 4$, то $FB = 4$, $AB = CD = 9$, $FC = ED = 4 \cdot 3 = 12$.

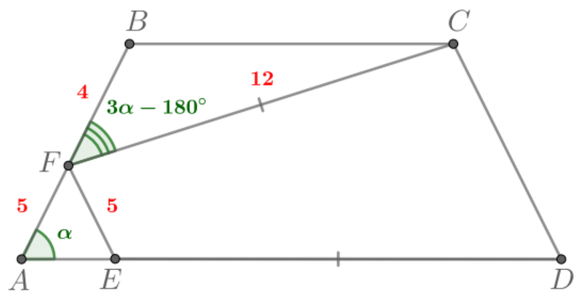
Также известно, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

Сразу отметим, что

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{35}}{18}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{36} - \frac{35}{36} = -\frac{34}{36} = -\frac{17}{18}$$

$$\sin(3\alpha) = \sin\alpha\cos(2\alpha) + \cos\alpha\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \frac{17}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{35}}{18} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{35}}{18} - \frac{17\sqrt{35}}{18}\right) = -\frac{4\sqrt{35}}{27}$$



Известно, что в треугольнике AFE $AF = FE = 5$, $\angle AFE = 180^\circ - 2\alpha$.

Тогда

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot FE \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{25}{2}\sin(2\alpha) = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{35}}{18} = \frac{25\sqrt{35}}{36}$$

В треугольнике BCF $BF = 4$, $FC = 12$, $\angle BCF = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle FBC = 180^\circ - \alpha$. Тогда

$$\angle BFC = 180^\circ - \angle BCF - \angle FBC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$$

Тогда

$$S_{BFC} = \frac{1}{2}BF \cdot FC \cdot \sin\angle BFC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \sin(3\alpha - 180^\circ) = -24\sin(3\alpha) = 24\frac{4\sqrt{35}}{27} = \frac{32\sqrt{35}}{9}$$

Значит,

$$S_{ABCD} = S_{EFCD} + S_{AFE} + S_{FBC} = 14\sqrt{35} + \frac{25\sqrt{35}}{36} + \frac{32\sqrt{35}}{9} = 14\sqrt{35} + \frac{25\sqrt{35} + 128\sqrt{35}}{36} =$$

$$= 14\sqrt{35} + \frac{153\sqrt{35}}{36} = 14\sqrt{35} + \frac{17\sqrt{35}}{4} = \frac{56\sqrt{35} + 17\sqrt{35}}{4} = \frac{73\sqrt{35}}{4}$$

№16.11 *(2022, досрочная волна)*

Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. В треугольник вписана окружность, которая касается AB в точке P.

а) Докажите, что $PM = \frac{1}{2}|AC - BC|$.

б) Известно, что $BC > AC$ и $AM = MC$, а PM относится к радиусу вписанной окружности как 7 к 4. Найдите углы треугольника.

Ответ

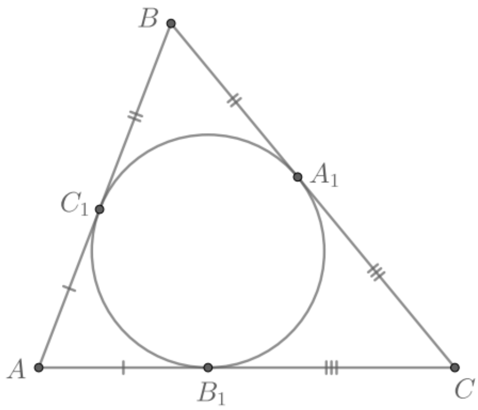
б) $\angle C = 90^\circ, \angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}, \angle B = 90^\circ - \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$

Решение

а) **Докажем лемму.**

Длина касательной из вершины треугольника к его вписанной окружности равна разности полупериметра и противоположной стороны. В частности, $AB_1 = AC_1 = p - BC$.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть его вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Тогда найдем длину отрезка касательной AB_1 к вписанной окружности. Мы знаем, что отрезки касательных с окружности, проведенных из одной точки, равны. Поэтому $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$.



Тогда можем составить систему:

$$\begin{cases} AB = AB_1 + BC_1 \\ BC = BC_1 + CA_1 \\ AC = AB_1 + CA_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB_1 = \frac{AB+AC-BC_1-CA_1}{2} \\ BC = BC_1 + CA_1 \end{cases} \Rightarrow AB_1 = \frac{AB + AC - BC}{2} = p - BC$$

Вернемся к задаче. По доказанной лемме $AP = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Тогда если $BC > AC$, отрезок AP меньше половины AB, и точка P лежит между точками A и M. Значит,

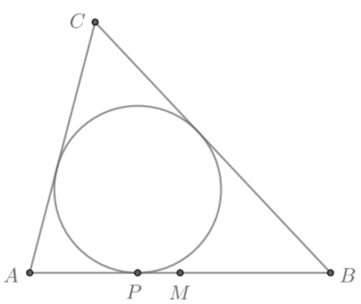
$$PM = AM - AP = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{1}{2}(BC - AC)$$

Если $BC < AC$, то отрезок AP больше половины AB, и точка M лежит между точками A и P. Значит,

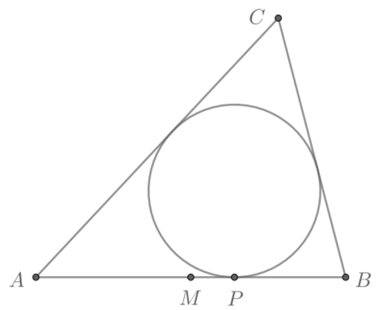
$$PM = AP - AM = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AC - BC)$$

Если $AC = BC$, то точки P и M совпадают, следовательно,

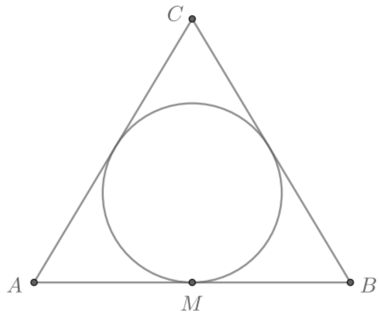
$$PM = \frac{1}{2}(AC - BC) = 0$$



$BC > AC$



$BC < AC$



$BC = AC$

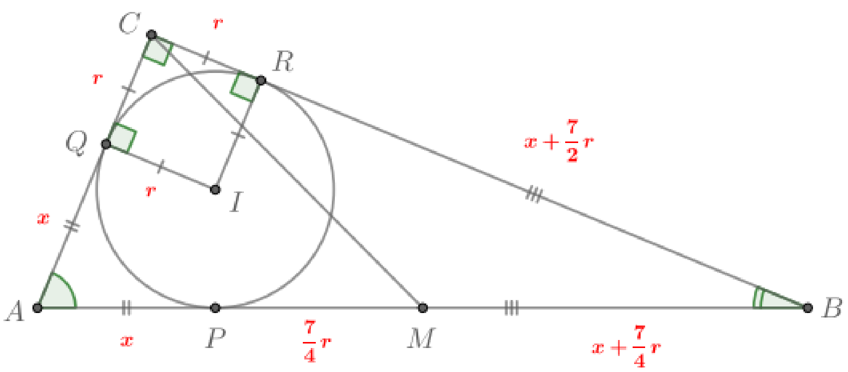
В любом случае мы получили, что

$$PM = \frac{1}{2}|AC - BC|$$

б) Рассмотрим треугольник ABC. По условию M — середина стороны AB. Тогда $AM = BM = CM$, значит, треугольник ABC прямоугольный, то есть $\angle C = 90°$.

Пусть Q и R — точки касания вписанной окружности треугольника ABC и его сторон AC и BC соответственно. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки равны, значит, $AQ = AP$, $BP = BR$ и $CQ = CR$.

Пусть I — центр вписанной окружности, тогда $IQ \perp AC$ и $IR \perp BC$. Рассмотрим четырехугольник $IQCR$. Его углы IQC, QCR и CRI равны $90°$, значит, $IQCR$ — прямоугольник. $CQ = CR$, следовательно, $IQCR$ — квадрат. Значит, $CQ = CR = r$, где r — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.



По условию $BC > AC$, значит, точка P лежит между точками A и M. Тогда

$$AB = AP + PM + BM$$

По условию $PM = \frac{7}{4}r$. Пусть $AP = AQ = x$. Заметим, что $BR = BP$, тогда

$$BR = PM + BM \quad \Leftrightarrow \quad BR = PM + AM \quad \Leftrightarrow \quad BR = AP + 2PM \quad \Leftrightarrow \quad BR = x + \frac{7}{2}r$$

Тогда в треугольнике ABC стороны равны $AB = AP + BP = 2x + \frac{7}{2}r$, $AC = x + r$ и $BC = x + \frac{9}{2}r$. Запишем теорему Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 14xr + \frac{49}{4}r^2 = x^2 + 2xr + r^2 + x^2 + 9xr + \frac{81}{4}r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3xr - 9r^2 = 0$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно x:

$$x = \frac{-3r \pm \sqrt{9r^2 + 72r^2}}{4} = \frac{-3r \pm 9r}{4} \quad \underset{r>0}{\Rightarrow} \quad x = \frac{3}{2}r$$

Тогда $AC = \frac{5}{2}r$ и $BC = 6r$, значит,

$$\angle A = \operatorname{arctg}\frac{BC}{AC} = \operatorname{arctg}\frac{6r}{2,5r} = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad \angle B = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$$

№16.12 *(2022, досрочная волна)*

На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Вписанная окружность треугольника ABC касается отрезка MN в точке L.

а) Докажите что $AB + BC = 5AC$.

б) Известно, что $ML = 1$, $LN = 3$. Найдите радиус вписанной окружности.

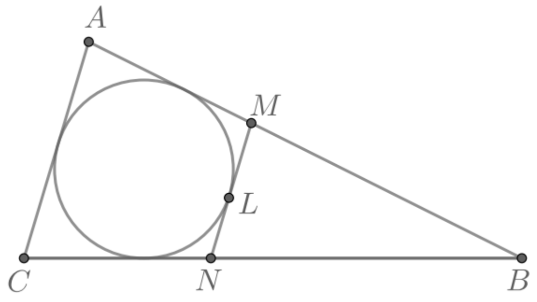
Ответ

б) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Решение

а) Из условия известно, что

$$AM : MB = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad MB = 2AM \quad \Rightarrow \quad AB = AM + MB = AM + 2AM = 3AM$$



Аналогично,

$$CN : NB = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad NB = 2CN \quad \Rightarrow \quad CB = CN + NB = CN + 2CN = 3CN$$

Тогда

$$AB + BC = 3AM + 3CN = 3(AM + CN)$$

Рассмотрим треугольники ABC и MBN. В них

$$\angle ABC = \angle MBN, \quad \frac{AB}{MB} = \frac{3AM}{2AM} = \frac{3}{2} = \frac{3CN}{2CN} = \frac{CB}{NB}$$

Тогда треугольники ABC и MBN подобны, при этом

$$\frac{AB}{MB} = \frac{CB}{NB} = \frac{AC}{MN} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 3MN = 2AC$$

Рассмотрим четырехугольник $AMNC$. Он описан около окружности, т.е. суммы длин его противоположных сторон равны:

$$CN + AM = AC + NM \quad \Rightarrow \quad AB + BC = 3(AM + CN) = 3(AC + NM) = 3AC + 3MN$$

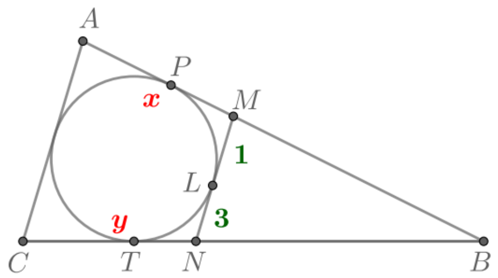
Мы уже доказали, что $3MN = 2AC$, откуда получаем, что

$$AB + BC = 3AC + 3MN = 3AC + 2AC = 5AC$$

Что и требовалось доказать.

б) Обозначим $AM = x$, $CN = y$. Так как $ML = 1$, $LN = 3$, имеем:

$$MN = ML + NL = 1 + 3 = 4$$



В пункте а) было доказано, что $3MN = 2AC$, откуда следует, что

$$AC = \frac{3}{2}MN = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$$

Тогда, так как четырехугольник $AMNC$ — описанный,

$$AM + CN = AC + MN \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 6 + 4 = 10$$

AB — касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим её точку касания с окружностью за P. CB — касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим её точку касания за T. Тогда $BP = BT$ по свойству касательных.

Также по свойству касательных $MP = ML$ и $NT = NL$. Тогда

$$BP = BT \quad \Leftrightarrow \quad BM + MP = BN + NT \quad \Leftrightarrow \quad BM + ML = BN + NL$$

Известно, что $ML = 1$, $LN = 3$. Также $BM = 2AM = 2x$, $BN = 2CN = 2y$. Подставив эти значения, получим, что

$$2x + 1 = 2y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 1$$

Подставив такое значение x в формулу $x + y = 10$, получим

$$(y+1) + y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

Получили, что $AM = \frac{11}{2}$, $CN = \frac{9}{2}$. Тогда

$$AB = 3AM = 3 \cdot \frac{11}{2} = \frac{33}{2}, \ CB = 3CN = 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

Таким образом, мы нашли все стороны треугольника ABC. Тогда его полупериметр равен

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}\left(\frac{33}{2} + \frac{27}{2} + 6\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{60}{2} + 6\right) = \frac{36}{2} = 18$$

Найдем теперь его площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{18 \cdot \left(18 - \frac{33}{2}\right) \cdot \left(18 - \frac{27}{2}\right)(18 - 6)} = \sqrt{18 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 12} = 27\sqrt{2}$$

Из формулы площади через радиус вписанной окружности выразим радиус:

$$S = pr \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{S}{p} = \frac{27\sqrt{2}}{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

№16.13 *(2022, резервная волна)*

Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$. На стороне AC взяли точку D, а также отметили центры I и J описанных окружностей треугольников ABD и CBD соответственно.

а) Докажите, что $BI \parallel DJ$.

б) Найдите IJ, если $AC = 12$ и $\cos\angle BDC = \dfrac{3}{7}$.

Ответ

б) $\dfrac{21\sqrt{10}}{10}$

Решение

а) Сравним радиусы описанных окружностей треугольников ABD и CBD. Рассмотрим треугольник ABD. По теореме синусов найдем радиус его описанной окружности:

$$\frac{AB}{\sin\angle BDA} = 2R_{ABD} \quad\Rightarrow\quad R_{ABD} = \frac{AB}{2\sin\angle BDA}$$

По теореме синусов найдем радиус описанной окружности треугольника CBD:

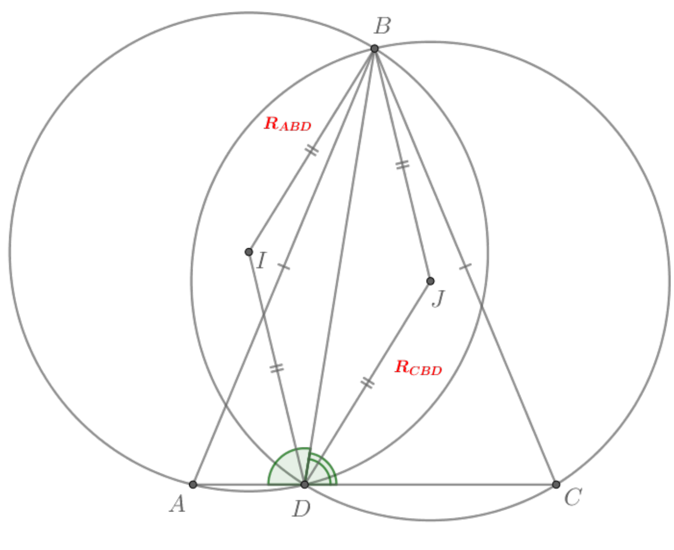
$$\frac{BC}{\sin\angle BDC} = 2R_{CBD} \quad\Rightarrow\quad R_{CBD} = \frac{BC}{2\sin\angle BDC}$$

Углы BDA и BDC — смежные, значит,

$$\angle BDA + \angle BDC = 180^\circ \quad\Rightarrow\quad \sin\angle BDA = \sin\angle BDC$$

Треугольник ABC — равнобедренный $(AB = BC)$, значит,

$$R_{ABD} = \frac{AB}{2\sin\angle BDA} = \frac{AB}{2\sin\angle BDC} = \frac{BC}{2\sin\angle BDC} = R_{CBD}$$



Рассмотрим четырехугольник $IBJD$. В нем $BI = DI = R_{ABD}$ и $BJ = DJ = R_{CBD}$, значит, $IBJD$ — ромб. Тогда его противоположные стороны параллельны, то есть $BI \parallel DJ$.

б) Пусть M — середина AD, N — середина CD. Точки I и J — центры описанных окружностей, значит, IM и JN — серединные перпендикуляры к AD и CD соответственно. Также точки I и J лежат на серединном перпендикуляре к BD, значит, $IJ \perp BD$.

Пусть K — середина BD. Рассмотрим четырехугольник $IKDM$. В нем $\angle IKD = 90°$, так как $IJ \perp BD$, и $\angle IMD = 90°$, так как $IM \perp AC$. Значит, $IKDM$ — вписанный. Тогда

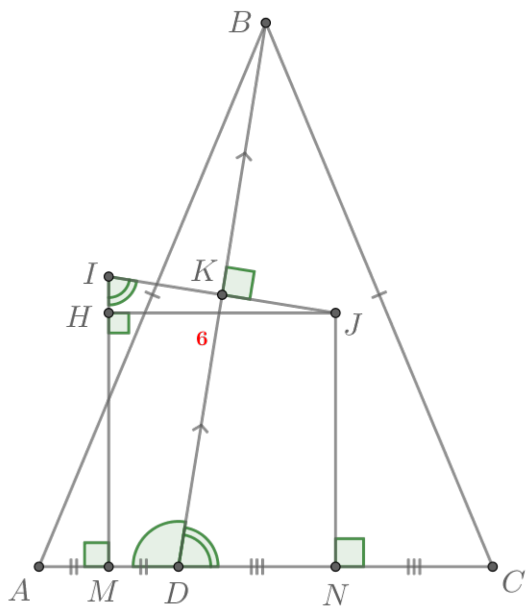
$$\angle KIM + \angle BDA = 180° \quad \Rightarrow \quad \angle BDC = 180° - \angle BDA = 180° - (180° - \angle KIM) = \angle KIM$$

По условию $\cos\angle BDC = \frac{3}{7}$, значит, $0° < \angle BDC < 90°$. Опустим из точки J перпендикуляр JH на IM. Рассмотрим треугольник IJH. В этом треугольнике

$$\sin\angle KIM = JH : IJ \quad \Rightarrow \quad IJ = \frac{JH}{\sin\angle KIM}$$

Найдем $\sin\angle KIM$:

$$\sin\angle KIM = \sin\angle BDC \underset{\angle BDC<90°}{=} \sqrt{1-\cos^2\angle BDC} = \sqrt{1-\frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$



Заметим, что $JNMH$ — прямоугольник, так как все его углы равны 90°, тогда

$$JH = MN = MD + DN = \frac{AD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad IJ = \frac{6}{\sin\angle KIM} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{10}}{7}} = \frac{21\sqrt{10}}{10}$$

№16 из ЕГЭ 2021

№16.14 *(2021, основная волна)*

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M, что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN, если $AC = 4$, $\sin\angle BAD = \dfrac{8}{17}$.

Ответ

б) $\dfrac{120}{17}$

Решение

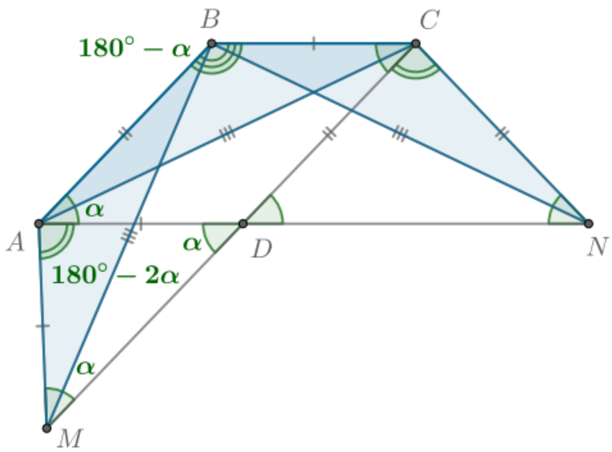
а) Рассмотрим треугольник MAD. Он равнобедренный, так как $AM = AD$ по условию. Значит, углы при его основании MD равны. То есть $\angle AMD = \angle ADM$.

Пусть угол параллелограмма $\angle A = \angle BAD = \alpha$. По условию $\alpha < 90°$. Тогда $\angle ABC = 180° - \alpha$.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$. Прямая AD является секущей для параллельных прямых AB и CD. Тогда $\angle ADM = \angle BAD = \alpha$ как накрест лежащие углы.

Вернемся в треугольнику MAD и найдем угол MAD :

$$\angle MAD = 180° - \angle AMD - \angle ADM = 180° - 2\angle ADM = 180° - 2\alpha$$



Рассмотрим треугольники ABC и BAM и докажем, что они равны. Сторона AB у них общая. Стороны $AM = AD$ по условию. Стороны $AD = BC$, так как $ABCD$ — параллелограмм. Значит, $AM = BC$. В треугольнике ABC угол между сторонами AB и BC равен $\angle BAC = 180° - \alpha$. В треугольнике BAM угол между сторонами AB и AM равен

$$\angle BAM = \angle BAD + \angle MAD = \alpha + 180° - 2\alpha = 180° - \alpha = \angle ABC$$

Значит, $\triangle ABC = \triangle BAM$ по первому признаку равенства треугольников. В равных треугольниках соответственные элементы равны, поэтому равны и третьи стороны. То есть $BM = AC$.

Далее рассмотрим $\triangle NCD$, проведем аналогичные рассуждения и докажем, что $\triangle NCB = \triangle ABC$. То есть получим, что $AC = BN$. Тогда $BM = AC = BN$.

б) Найдём величину угла MBN :

$$\angle MBN = \angle ABC - \angle ABM - \angle CBN = \angle ABC - (\angle ABM + \angle CBN)$$

В предыдущем пункте мы доказали, что

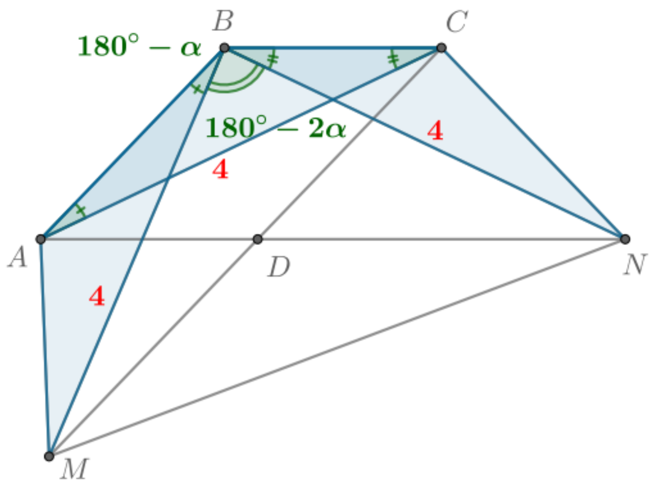
$$\triangle ABC = \triangle BAM = \triangle NCB$$

В равных треугольниках соответственные элементы равны, поэтому

$$\angle ABM = \angle BAC, \quad \angle CBN = \angle BCA$$

Заметим, что

$$180^\circ - \alpha = \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) \quad \Rightarrow \quad \angle BAC + \angle BCA = \alpha$$



Тогда

$$\angle MBN = \angle ABC - (\angle ABM + \angle CBN) = \angle ABC - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

По условию $AC = 4$. Значит, $BM = BN = AC = 4$. Рассмотрим $\triangle MBN$. По теореме косинусов имеем:

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2\cos(\angle MBN) \cdot BM \cdot BN$$

Найдем $\cos(\angle MBN)$:

$$\cos(\angle MBN) = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = -(1 - 2\sin^2(\alpha)) =$$
$$= 2\sin^2(\alpha) - 1 = \frac{2 \cdot 64 - 289}{289} = -\frac{161}{289}$$

Тогда по теореме косинусов в треугольнике MBN :

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2\cos(\angle MBN) \cdot BM \cdot BN =$$

$$= 4^2 + 4^2 - 2 \cdot \left(-\frac{161}{289}\right) \cdot 4 \cdot 4 = \frac{16 \cdot 900}{289} \quad \Rightarrow \quad MN = \frac{120}{17}$$

№16.15 *(2021, основная волна)*

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD, вписанная в окружность. Продолжение высоты трапеции BH пересекает окружность в точке K.

а) Докажите, что отрезки AC и AK перпендикулярны.

б) Найдите AD, если радиус описанной окружности равен 6, угол BAC составляет 30°, отношение площадей $BCNH$ к NKH равно 35, где N — точка пересечения отрезков AD и CK.

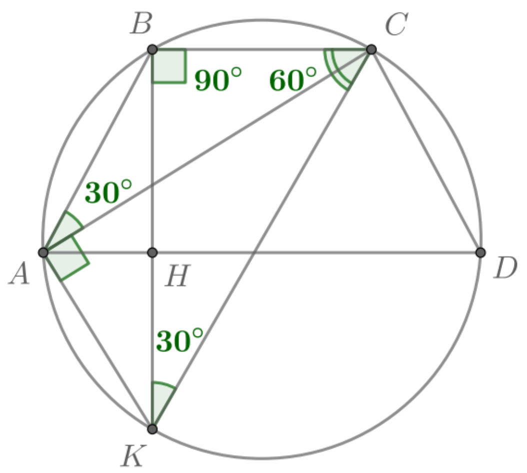
Ответ

б) $4\sqrt{6}$

Решение

Заметим, что оба угла BKC и BAC опираются на одну дугу окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$, поэтому $\angle BKC = \angle BAC = 30°$. В $\triangle KBC$ стороны BC и BK перпендикулярны, так как BH — высота трапеции. То есть $\angle KBC = 90°$. Если вписанный угол окружности равен 90°, то он опирается на диаметр. Значит, CK — диаметр описанной окружности трапеции $ABCD$. Третий угол в $\triangle KBC$ равен

$$\angle BCK = 180° - \angle BKC - \angle KBC = 60°$$



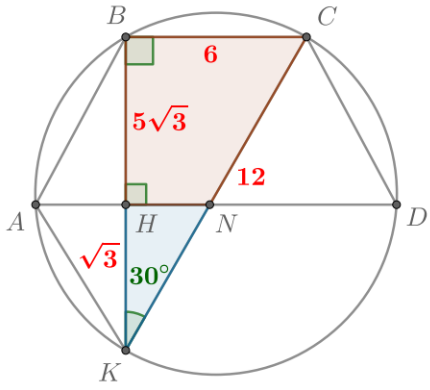
а) Точки A, K, B и C лежат на описанной окружности трапеции $ABCD$. Значит, $\angle KAC = \angle KBC = 90°$, так как эти углы опираются на диаметр CK. Поэтому $AC \perp AK$.

б) Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая. Тогда в силу симметрии высота BH равнобокой трапеции делит её большее основание AD на отрезки $AH = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$ и $HD = \dfrac{1}{2}(AD + BC)$.

По условию отношение площадей $BCNH$ к NKH равно 35. Тогда

$$\frac{S_{BCNH}}{S_{NKH}} = 35 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{BCNH} + S_{NKH}}{S_{NKH}} = \frac{S_{CKB}}{S_{NKH}} = 36 = 6^2$$

Заметим, что $\triangle CKB \sim \triangle NKH$ по двум углам: $\angle KBC = \angle KHN = 90°$, так как BH — высота трапеции, $\angle BKC = \angle HKN = 30°$ — общий. Тогда коэффициент подобия этих треугольников равен 6. Значит, $BK : HK = 6$.



Заметим, что $\triangle CKB$ — прямоугольный с острыми углами в 30° и 60°. Его гипотенуза CK — диаметр окружности с радиусом 6. Тогда $CK = 12$. Значит,

$$BC = \frac{1}{2}CK = 6, \; BK = CK \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$$

Тогда имеем:

$$\frac{BK}{HK} = \frac{6\sqrt{3}}{HK} = 6 \quad \Rightarrow \quad HK = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BH = BK - HK = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Рассмотрим большее основание трапеции AD. Оно является хордой описанной окружности трапеции $ABCD$. Хорда BK пересекает хорду AD в точке H. Тогда произведение длин отрезков AH и HD равно произведению длин отрезков BH и HK. То есть $AH \cdot HD = BH \cdot HK$. Ранее мы получили, что

$$AH = \frac{AD - BC}{2}, \; HD = \frac{AD + BC}{2}, \; BH = 5\sqrt{3}, \; HK = \sqrt{3}$$

Тогда окончательно имеем:

$$\frac{AD - BC}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad AD^2 - BC^2 = 4 \cdot 15 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = 60 + 6^2 = 6 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad AD = 4\sqrt{6}$$

№16.16 *(2021, основная волна)*

Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90^\circ$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC.

б) Найдите CN, если $BC = 3$, $AC = 5$, $CM = 2$.

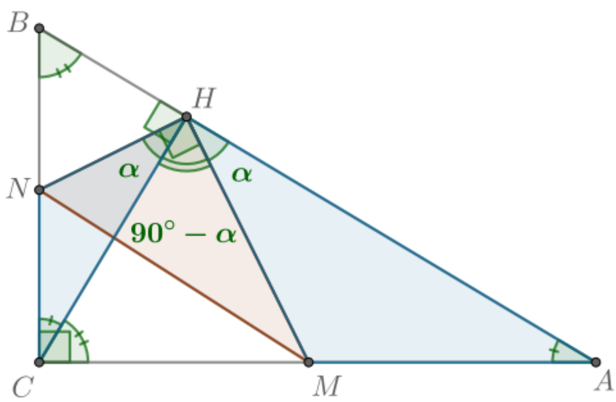
Ответ

б) 1,8

Решение

а) Пусть $\angle CHN = \alpha$. Тогда

$$\angle MHC = \angle MHN - \angle CHN = 90^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \quad \angle MHA = \angle AHC - \angle MHC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$



Так как CH — высота, проведённая из прямого угла C прямоугольного треугольника ABC, то треугольники ABC, ACH и CBH подобны. Тогда

$$\angle CAH = \angle BCH \quad \text{и} \quad \frac{AH}{CH} = \frac{AC}{BC}$$

Кроме того, $\triangle MAH \sim \triangle NCH$ по двум углам, так как

$$\angle NCH = \angle MAH \quad \text{и} \quad \angle NHC = \angle MHA$$

Значит,

$$\frac{MH}{NH} = \frac{AH}{CH} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{MH}{AC} = \frac{NH}{BC}$$

С учетом $\angle ACB = \angle MHN = 90^\circ$ получаем $\triangle ABC \sim \triangle MNH$ по отношению сторон и равным углам между ними.

б) Так как $\triangle MAH \sim \triangle NCH$ и $\triangle ABC \sim \triangle MNH$, то

$$\frac{AM}{CN} = \frac{MH}{NH} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC - CM}{CN} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad CN = \frac{3 \cdot 3}{5} = 1,8$$

№16.17 *(2021, основная волна)*

Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

а) Докажите, что $\angle BEA = \angle BDA$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos\angle BEA = \dfrac{4}{5}$.

Ответ

б) 3072

Решение

Так как AD — большее основание, углы A и D трапеции острые, и нарисованная ниже картинка единственная возможная.

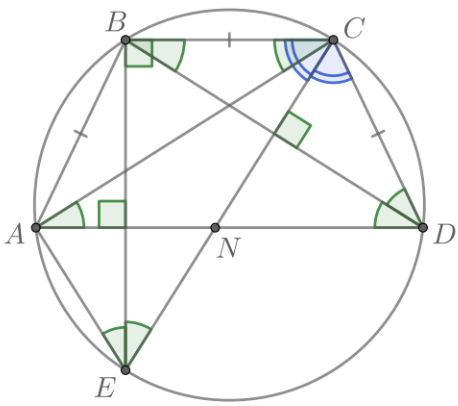
а) По условию $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AB = CD$). По свойству равнобедренной трапеции около нее можно описать окружность. Тогда $\angle BCA = \angle BDA$, так как эти углы вписанные и опираются на одну дугу AB. Аналогично $\angle CBD = \angle CAD$. Так как $BC \parallel AD$, углы CBD и ADB равны как накрест лежащие. Тогда $\angle CAD = \angle BDA = \angle CBD = \angle BCA$.

Если точка E лежит на окружности, то $\angle AEB = \angle BDA$, так как оба угла вписанные и будут опираться на дугу AB. Значит, осталось доказать, что E лежит на окружности, описанной около $ABCD$.

Из $BE \perp AD$ следует $BE \perp BC$, так как $ABCD$ — трапеция. Тогда $\angle BCE = 90^\circ - \angle BEC$. Теперь рассмотрим $\triangle BCD$. В нём $BC = CD$, поэтому $\angle CBD = \angle CDB$. Заметим, что CE — прямая, содержащая высоту равнобедренного треугольника BCD, следовательно, она является биссектрисой угла BCD. Тогда

$$90^\circ - \angle BEC = \angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle CDB) = 90^\circ - \angle CDB \quad \Rightarrow \quad \angle BEC = \angle CDB$$

Значит, точка E лежит на описанной окружности трапеции $ABCD$. То есть $\angle AEB = \angle BDA$.



б) По пункту а) $\angle AEB = \angle BDA = \angle CBD = \angle CDB$. Тогда

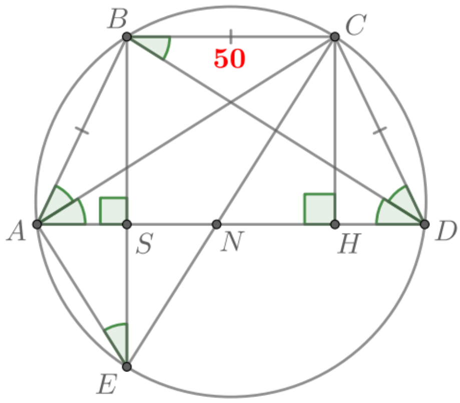
$$\angle BAD = \angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = 2\angle BDA = 2\angle AEB$$

Пусть S — точка пересечения прямой BE и основания AD трапеции $ABCD$. Тогда $\triangle ASB$ — прямоугольный с прямым углом S. Поэтому

$$AS = AB \cdot \cos \angle BAD$$

Если мы опустим из точки C высоту CH на AD и рассмотрим прямоугольный $\triangle CHD$, то получим, что

$$DH = CD \cdot \cos \angle CDA = AB \cdot \cos \angle BAD = AS$$



Также получим, что $SH = BC$, так как $BCHS$ — прямоугольник. Тогда

$$AD = AS + SH + HD = 2AS + BC = BC \cdot (2\cos \angle BAD + 1)$$

$$\cos \angle BAD = \cos 2\angle AEB = 2\cos^2 \angle AEB - 1 = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

$$AD = BC \cdot (2\cos \angle BAD + 1) = 50 \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{25} + 1\right) = 50 \cdot \frac{14}{25} + 50 = 28 + 50 = 78$$

Угол BAD острый, тогда $\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \dfrac{24}{25}$. Можем посчитать площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BS = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BA \sin \angle DAB = \frac{1}{2}(78 + 50) \cdot 50 \cdot \frac{24}{25} = 3072$$

№16.18 *(2021, резервная волна)*

Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведенная к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Пусть прямая DM пересекает прямую AC в точке P и прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK : KP$, если $\cos\angle BAC = \frac{4}{5}$.

Ответ

б) $7 : 25$

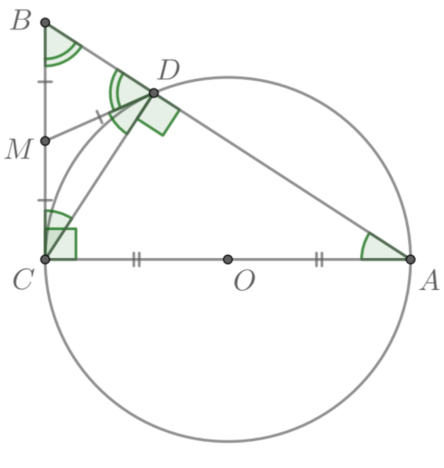
Решение

Сначала проанализируем данные задачи. Косинус убывает на промежутке $(0°; 180°)$, поэтому

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} = \cos\angle BAC = \frac{4}{5} < 1 = \cos 0°$$

Значит, $0° < \angle BAC < 45°$. С учетом того, что $\triangle ABC$ — прямоугольный, получаем:

$$\angle BAC < \angle ABC \qquad \Rightarrow \qquad AC > BC$$



а) По условию DM — касательная к описанной окружности треугольника ADC. Значит, $\angle CDM = \angle CAD$, так как угол между хордой и касательной равен вписанному углу, который опирается на эту хорду.

С другой стороны, BC тоже является касательной к этой окружности, так как $\angle OCB = 90°$. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому $CM = DM$ и $\angle MCD = \angle MDC$.

Рассмотрим $\triangle CBD$. Он прямоугольный, так как $\angle CDA$ опирается на диаметр AC. Тогда

$$\angle MBD = 90° - \angle BCD = 90° - \angle MDC = \angle MDB$$

Значит, $BM = DM = CM$.

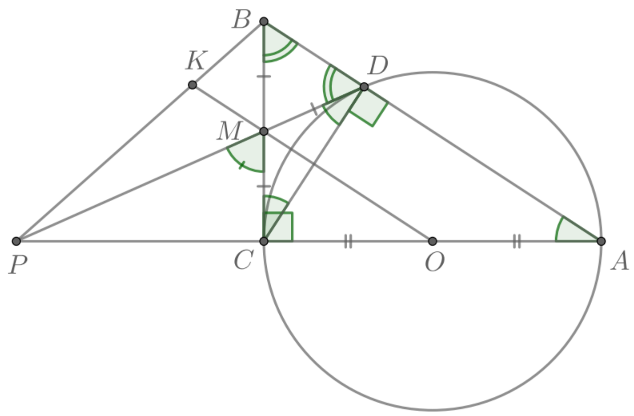
б) В предыдущем пункте мы доказали, что M — середина BC. Значит, OM — средняя линия $\triangle ABC$, поскольку $AO = OC$ как радиусы окружности. Значит, $OM \parallel AB$.

Поймем, где прямая MD пересекает прямую AC. Найдем сумму внутренних односторонних углов при прямых AC и MD и секущей AB :

$$\angle CAB + \angle MDA = \angle ADC + 2\angle CAB = 90^\circ + 2\angle CAB < 180^\circ$$

Тогда прямая MD пересекает продолжение стороны AC за точку C. Рассмотрим угол DPB. Его пересекают две параллельные прямые OK и AB. По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BK}{KP} = \frac{DM}{MP} = \frac{CM}{MP} = \cos \angle CMP = \cos 2\angle BAC$$



Последние два равенства верны, так как $\triangle CMP$ — прямоугольный с прямым углом C, а $\angle CMP$ равен сумме углов $\angle MCD + \angle MDC = 2\angle BAC$ как внешний для $\triangle MCD$. Тогда

$$\frac{BK}{KP} = \cos 2\angle BAC = 2\cos^2 \angle BAC - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{32 - 25}{25} = \frac{7}{25}$$

№16 из ЕГЭ 2020

№16.19 *(2020, основная волна)*

На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.

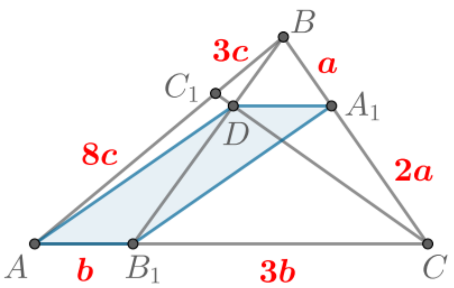
Ответ

б) 17

Решение

а) Рассмотрим $\triangle B_1BA$. Тогда C_1D — его секущая, она пересекает стороны B_1B, AB и продолжение стороны AB_1 за точку B_1 в точках D, C_1 и C соответственно. По теореме Менелая имеем:

$$\frac{B_1D}{DB}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AC}{CB_1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{B_1D}{DB}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{AC}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{1}$$



Заметим, что треугольники DBA_1 и B_1BC подобны по двум пропорциональным сторонам и общему углу между ними:

$$\frac{BC}{BA_1}=\frac{BA_1+A_1C}{BA_1}=\frac{3}{1}=\frac{BD+DB_1}{BD}=\frac{BB_1}{BD}, \qquad \angle DBA_1=\angle B_1BC$$

В подобных треугольниках соответственные углы равны, поэтому $\angle BDA_1 = \angle BB_1C$. Тогда соответственные углы, образованные прямыми DA_1, AC и секущей BB_1, равны. Значит, $DA_1 \parallel AC$.

Поскольку $\triangle B_1BC \sim \triangle DBA_1$, то

$$\frac{B_1C}{DA_1}=\frac{BC}{BA_1}=\frac{3}{1}=\frac{B_1C}{AB_1}= \quad\Rightarrow\quad DA_1=AB_1$$

Отрезки DA_1 и AB_1 равны и параллельны, тогда ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке H. Тогда по условию $\angle AHC = 90^\circ$. Нам надо найти длину отрезка CD. Он является гипотенузой в прямоугольном треугольнике DHC. Значит, нам нужно найти длины отрезков HC и HD.

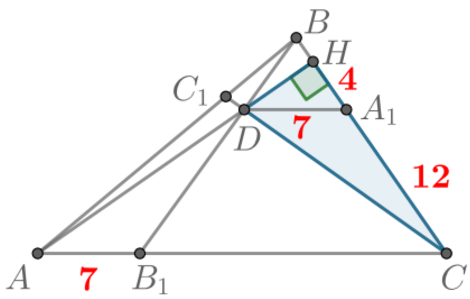
В предыдущем пункте мы выяснили, что $DA_1 \parallel AB_1$. Тогда соответственные углы, образованные параллельными прямыми DA_1, AC и секущей A_1C, равны. То есть $\angle HA_1D = \angle HCA$.

Рассмотрим треугольники DHA_1 и AHC. Они подобны по двум углам, так как $\angle DHA_1 = \angle AHC$ и $\angle HA_1D = \angle HCA$. Тогда

$$\frac{HC}{HA_1} = \frac{HA}{HD} = \frac{AC}{DA_1} = \frac{AC}{AB_1} = \frac{4}{1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{HC - HA_1}{HA_1} = \frac{HA - HD}{HD} = \frac{AC - DA_1}{DA_1} = 4 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_1C}{HA_1} = \frac{AD}{HD} = \frac{B_1C}{AB_1} = 3$$



Найдем длину отрезка HC. Из предыдущих рассуждений мы поняли, что $HA_1 : A_1C = 1 : 3$. По условию $18 = BC = BA_1 + A_1C$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$. Значит, $BA_1 = 6$ и $A_1C = 12$. Тогда

$$HC = HA_1 + A_1C = \frac{1}{3}A_1C + A_1C = \frac{12}{3} + 12 = 4 + 12 = 16$$

Теперь найдем длину отрезка HD. Он является катетом в прямоугольном треугольнике DHA_1. При этом $HA_1 = 4$, а $DA_1 = AB_1$ по предыдущему пункту. По условию

$$AC = AB_1 + B_1C = 28 \text{ и } AB_1 : B_1C = 1 : 3.$$

Значит, $AB_1 = 7$. Тогда по теореме Пифагора для $\triangle DHA_1$:

$$HD^2 = DA_1^2 - HA_1^2 = 49 - 16 = 33$$

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle DHC$:

$$CD = \sqrt{HD^2 + HC^2} = \sqrt{33 + 256} = \sqrt{289} = 17$$

№16.20 *(2020, основная волна)*

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1. Оказалось, что точки A, A_1, C и C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь четырехугольника AC_1A_1C, если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

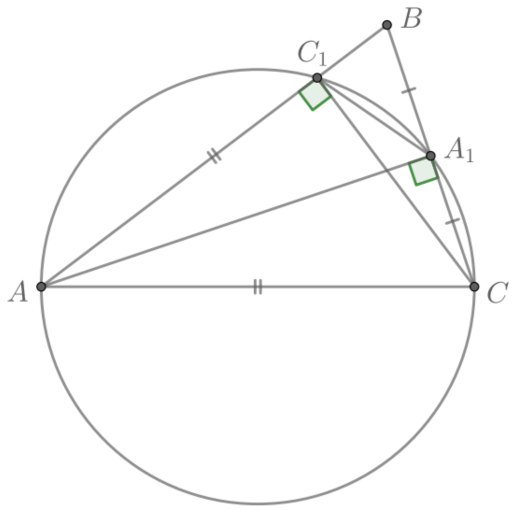
Ответ

б) $\dfrac{165\sqrt{55}}{16}$

Решение

а) Точки A, C_1, A_1 и C по условию лежат на одной окружности, значит, углы AC_1C и AA_1C — вписанные и опираются на одну дугу. Тогда, так как CC_1 — высота $\triangle ABC$, то $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^\circ$.

Следовательно, AA_1 — высота и медиана в треугольнике ABC, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный, причем $AB = AC$.



б) Точка A_1 — середина BC, значит, C_1A_1 — медиана прямоугольного треугольника BC_1C, проведенная к гипотенузе. Отсюда имеем:

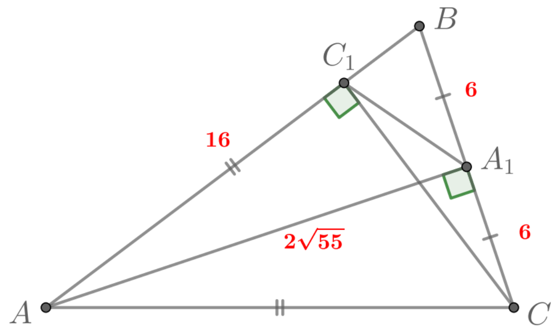
$$6 = C_1A_1 = BA_1 = CA_1 \quad \Rightarrow \quad BC = 12$$

Запишем площадь треугольника ABC двумя способами:

$$\frac{1}{2}AA_1 \cdot BC = S_{ABC} = \frac{1}{2}CC_1 \cdot AB \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AA_1}{CC_1} \cdot BC = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

По теореме Пифагора для треугольника BAA_1 :

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = 2\sqrt{55} \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{55} \cdot 12 = 12\sqrt{55}$$



По теореме об отрезках секущих:

$$BC_1 \cdot BA = BA_1 \cdot BC \quad \Rightarrow \quad BC_1 = \frac{BA_1 \cdot BC}{BA} = \frac{6 \cdot 12}{16} = \frac{9}{2}$$

У треугольников BCA и BC_1A_1 общий угол B, значит,

$$\frac{S_{BC_1A_1}}{S_{BCA}} = \frac{BC_1 \cdot BA_1}{BC \cdot BA} = \frac{\frac{9}{2} \cdot 6}{12 \cdot 16} = \frac{9}{64} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_{AC_1A_1C} = S_{ABC} - S_{BC_1A_1} = \frac{55}{64} S_{ABC} = \frac{165\sqrt{55}}{16}$$

№16.21 *(2020, основная волна)*

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1. Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

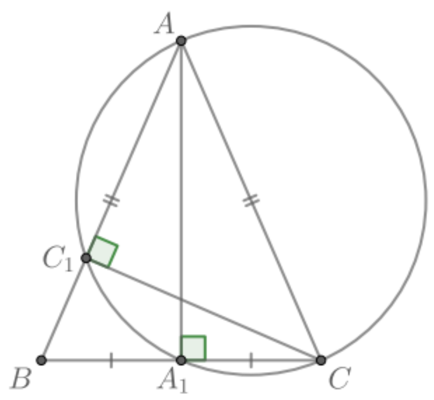
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 : CC_1 = 5 : 4$ и $A_1C_1 = 4$.

Ответ

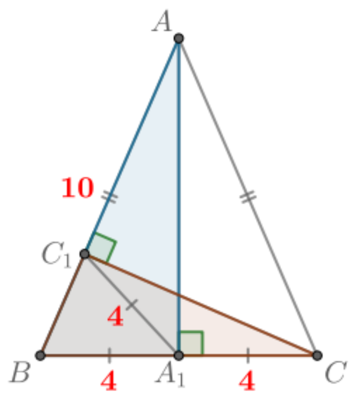
б) $8\sqrt{21}$

Решение

а) По условию точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности. Значит, углы AC_1C и AA_1C опираются на одну дугу AC. Тогда $\angle AA_1C = AC_1C = 90^\circ$, так как CC_1 — высота. То есть медиана AA_1 тоже является высотой треугольника ABC. Значит, $\triangle ABC$ равнобедренный.



б) Рассмотрим треугольник CC_1B. Он прямоугольный, так как CC_1 — высота в треугольнике ABC. При этом точка A_1 — середина отрезка BC, который является гипотенузой. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Значит, $BA_1 = A_1C = A_1C_1 = 4$. Тогда $BC = BA_1 + A_1C = 4 + 4 = 8$.



Рассмотрим треугольники AA_1B и CC_1B. Они подобны по двум углам: $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$ и $\angle ABC$ — общий. Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AA_1}{CC_1} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{5BC}{4} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$$

Найдем AA_1. По теореме Пифагора для треугольника AA_1B :

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 \quad \Rightarrow \quad AA_1 = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Тогда площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{AA_1 \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{21} \cdot 8}{2} = 8\sqrt{21}$$

№16.22 *(2020, основная волна)*

Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AC отмечена точка M, а на продолжении катета BC за точку C — точка N так, что $CM = CB$ и $CA = CN$.

а) Пусть CH и CF — высоты треугольников ABC и NMC соответственно. Докажите, что CF и CH перпендикулярны.

б) Пусть L — это точка пересечения BM и AN, $BC = 2$, $AC = 5$. Найдите ML.

Ответ

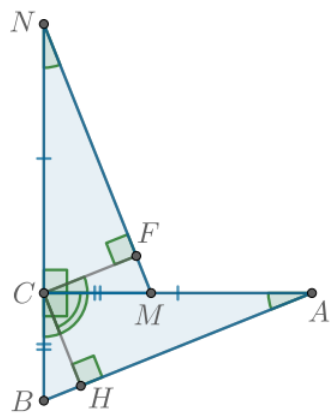
б) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Решение

а) Нас просят доказать, что $\angle HCF = 90^\circ$. По условию $\angle BCA = 90^\circ$, тогда будем доказывать, что $\angle HCF = \angle BCA$. Заметим, что

$$\angle HCF = \angle HCA + \angle ACF, \quad \angle BCA = \angle BCH + \angle HCA$$

Значит, чтобы доказать равенство углов HCF и BCA, достаточно показать, что $\angle BCH = \angle ACF$.



Теперь рассмотрим треугольники BCA и MCN. По условию $CB = CM$, $CA = CN$ и $\angle BCA = 90^\circ = \angle ACN$. Тогда $\triangle BCA = \triangle MCN$ по двум сторонам и углу между ними. В равных фигурах соответственные элементы равны. Углы BCH и MCF — углы между соответственными сторонами BC и MC и высотами CH и CF. Значит, $\angle BCH = \angle MCF$.

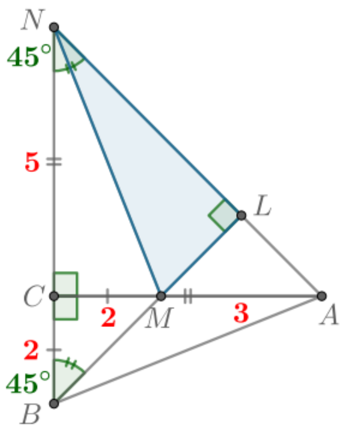
б) Нас просят найти длину отрезка ML. Он является одной из сторон $\triangle MNL$. Попробуем найти длины других сторон NL и NM и величину хотя бы одного угла.

Рассмотрим $\triangle BCM$. Он прямоугольный ($\angle BCM = 90^\circ$ по условию) и равнобедренный ($CB = CM$ по условию). Тогда $\angle CBM = 45^\circ$. Аналогично треугольник NCA прямоугольный и равнобедренный. Тогда $\angle CNA = 45^\circ$. Теперь заметим, что в $\triangle BNL$ два угла BNL и NBL равны 45°, тогда

$$\angle BLN = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

Значит, $\triangle BNL$ является прямоугольным равнобедренным треугольником. То есть $NL = BL$. По теореме Пифагора

$$BN^2 = NL^2 + BL^2 = 2NL^2 \quad \Rightarrow \quad NL^2 = \frac{1}{2}BN^2$$



Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник MCN. По теореме Пифагора

$$NM^2 = CM^2 + CN^2$$

Вернемся к треугольнику MNL. Мы выяснили, что $\angle NLM = 90°$. Тогда по теореме Пифагора

$$NM^2 = ML^2 + NL^2 \quad \Rightarrow \quad ML^2 = NM^2 - NL^2 = CM^2 + CN^2 - \frac{1}{2}BN^2$$

По условию

$$CM = CB = 2,\ CN = CA = 5 \quad \Rightarrow \quad BN = BC + CN = BC + CA = 2 + 5 = 7$$

Тогда

$$ML^2 = 2^2 + 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 7^2 = 4 + 25 - 24,5 = 4,5 \quad \Rightarrow \quad ML = \sqrt{4,5} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

№16.23 *(2020, досрочная волна)*

В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = 3$, $\angle ABC = 15°$.

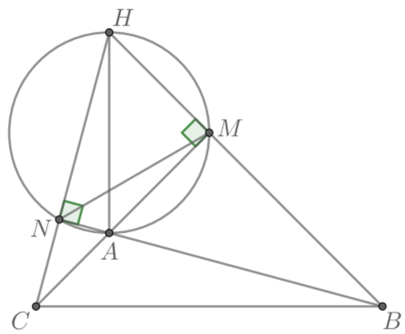
Ответ

б) $\dfrac{3}{4}$

Решение

а) Прямые BM и CN образуют треугольник BCH с высотами BN и CM. Тогда четырёхугольник $AMHN$ вписанный, так как сумма противоположных углов равна

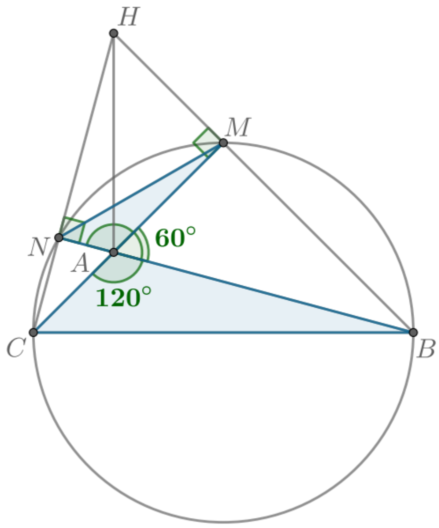
$$\angle ANH + \angle AMH = 90° + 90° = 180°$$



Заметим, что AH — диаметр окружности, описанной около четырёхугольника $AMHN$. Тогда по теореме синусов:

$$\frac{MN}{\sin\angle MAN} = 2R \quad\Rightarrow\quad AH = \frac{MN}{\sin 120°} = \frac{2MN\sqrt{3}}{3}$$

Найдем MN. Рассмотрим четырёхугольник $BMNC$. Он вписанный, так как углы BMC и BNC, опирающие на дугу BC, равны $\angle BMC = \angle BNC = 90°$.



Если две хорды одной окружности пересекаются, то произведение длин отрезков, на которые разбита каждая из хорд, равны. То есть для хорд BN и CM, которые пересекаются в точке A, верно следующее:

$$BA \cdot AN = CA \cdot AM \quad \Rightarrow \quad \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

Тогда треугольники AMN и ABC подобны по отношению сторон и углу между ними, так как углы MAN и BAC равны как вертикальные. Тогда

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

Заметим, что $\triangle AMB$ прямоугольный, поэтому

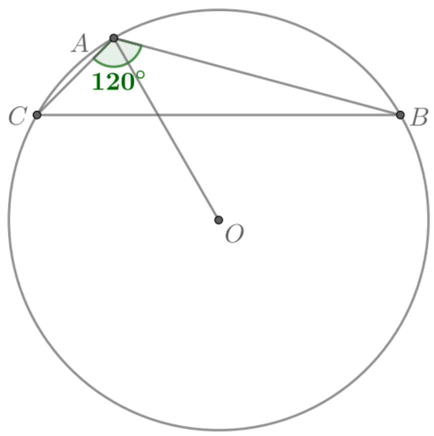
$$\frac{AM}{AB} = \cos\angle MAB = \cos(180^\circ - \angle BAC) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Тогда

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad MN = \frac{1}{2}BC \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{2MN\sqrt{3}}{3} = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$$

Теперь найдем AO. Мы знаем, что AO — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Тогда по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2AO \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{2BC\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = AH$$



б) Пусть прямая HA пересекает отрезок BC в точке S. В треугольнике BHC точка A является точкой пересечения высот BN и CM. Значит, HS — третья высота треугольника BHC. То есть $\angle BSH = 90^\circ$.

Найдём угол HAO. По построению HS — прямая, поэтому

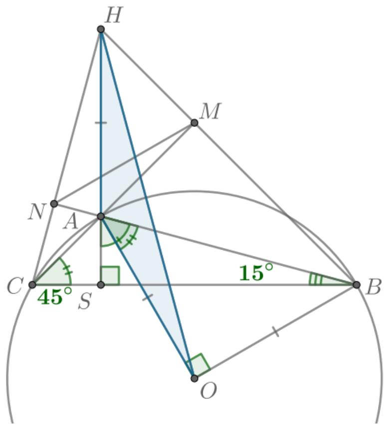
$$180^\circ = \angle HAO + \angle OAS \quad \Rightarrow \quad \angle HAO = 180^\circ - \angle OAS = 180^\circ - (\angle SAB - \angle BAO)$$

Найдём угол SAB. По условию $\angle ABC = 15^\circ$, следовательно,

$$\angle SAB = 180^\circ - \angle BSA - \angle ABS = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

Найдём угол BAO. Для этого рассмотрим треугольник BAO. В нём стороны OA и OB являются радиусами описанной окружности треугольника ABC, поэтому $\triangle BAO$ — равнобедренный с учетом $OA = OB$. Угол BOA является центральным и опирается на дугу AB. Тогда $\angle BOA = 2\angle BCA$, так как $\angle BCA$ — вписанный угол, опирающийся на дугу AB. То есть

$$\angle BOA = 2\angle BCA = 2(180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) = 2(180^\circ - 120^\circ - 15^\circ) = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$



Так как треугольник BAO равнобедренный, то

$$\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle BOA}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Значит, мы можем найти $\angle HAO$:

$$\angle HAO = 180^\circ - \angle SAB + \angle BAO = 180^\circ - 75^\circ + 45^\circ = 150^\circ$$

Вычислим площадь треугольника AHO :

$$S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot AO \cdot \sin\angle HAO = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BC\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

№16.24 *(2020, резервная волна)*

К окружности с диаметром $AB = 10$ проведена касательная BC так, что $BC = 5$. Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D. Точка E окружности диаметрально противоположна точке D. Прямые ED и BC пересекаются в точке F.

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE$.

б) Найдите площадь треугольника FBE.

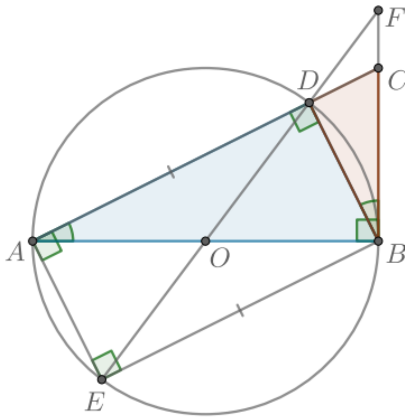
Ответ

б) $\dfrac{80}{3}$

Решение

а) Рассмотрим четырёхугольник $ADBE$. Его диагонали AB и DE являются диаметрами окружности. Тогда каждый угол четырехугольника опирается на диаметр окружности, поэтому $ADBE$ — прямоугольник и $AD = BE$.

Рассмотрим треугольник ABC. Он прямоугольный, так как касательная BC перпендикулярна проведенному в точку касания радиусу OB. Заметим, что BD — высота треугольника ABC, так как $\angle ADB = 90°$.



Рассмотрим треугольники ADB и BDC. В них углы ADB и BDC прямые. Тогда

$$\angle DAB = 90° - \angle DBA = \angle ABC - \angle DBA = \angle DBC$$

Значит, $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ по двум углам. Тогда

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD} \quad \Rightarrow \quad BD^2 = CD \cdot AD = CD \cdot BE$$

б) По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

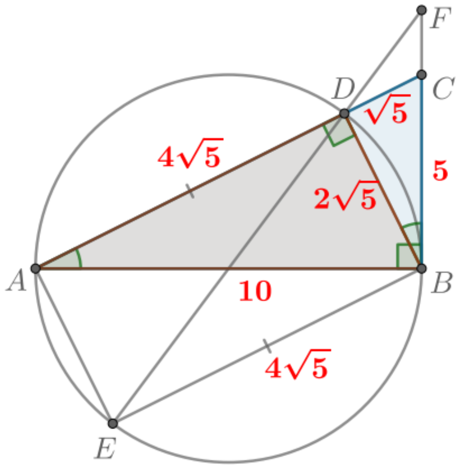
Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ по двум углам, так как $\angle ABC = \angle ADB = 90°$, $\angle BAC$ — общий. Тогда

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{10 \cdot 5}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{BD \cdot AB}{BC} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 10}{5} = 4\sqrt{5}$$

Кроме того,

$$5\sqrt{5} = AC = AD + CD \quad \Rightarrow \quad CD = AC - AD = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$$



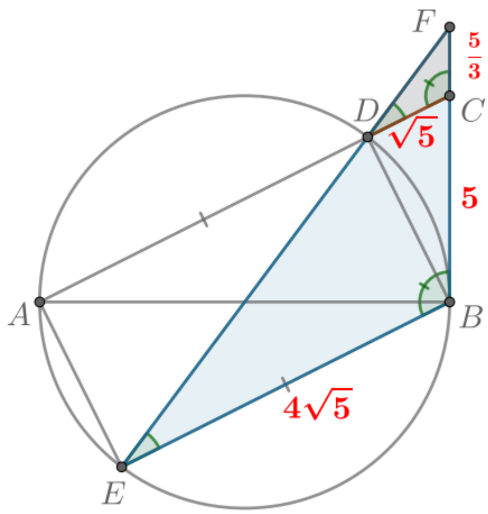
Заметим, что прямые CD и BE параллельны, так как $ADBE$ — прямоугольник. Тогда $\angle FCD = \angle FBE$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми CD и BE и секущей BC.

Аналогично $\angle FDC = \angle FEB$ равны как углы, образованные параллельными прямыми CD и BE и секущей DE.

Тогда $\triangle DFC \sim \triangle EFB$ по двум углам. Значит,

$$\frac{FB}{FC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \frac{FC + CB}{FC} = \frac{4}{1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{CB}{FC} = 3 \quad \Rightarrow \quad FC = \frac{CB}{3} = \frac{5}{3}$$



Запишем выражение для площади треугольника FBE :

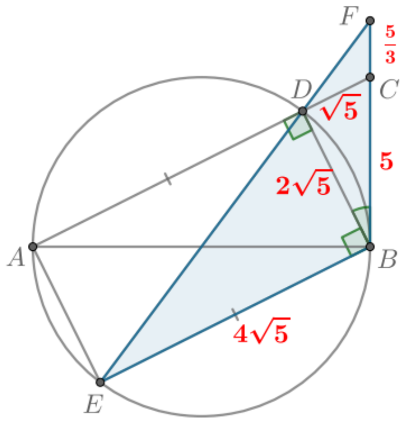
$$S_{FBE} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot BE \cdot \sin \angle FBE = \frac{1}{2} \cdot (FC + BC) \cdot BE \cdot \sin \angle FBE =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \sin \angle FBE = \frac{40\sqrt{5}}{3} \sin \angle FBE$$

Найдём $\sin \angle FBE$:

$$\sin \angle FBE = \sin(\angle FBD + \angle DBE) = \sin(\angle FBD + 90°) =$$

$$= \cos \angle FBD = \frac{BD}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Значит, площадь треугольника FBE равна

$$S_{FBE} = \frac{40\sqrt{5}}{3} \sin \angle FBE = \frac{40\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{80}{3}$$

№16.25 *(2020, резервная волна)*

Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L. Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, $\angle BML = \angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

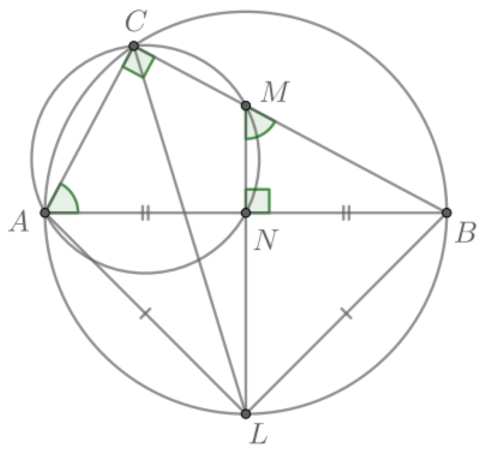
Ответ

б) 80

Решение

а) Докажем, что треугольник ALB равнобедренный. Так как CL — биссектриса угла ACB, то точка L делит дугу ALB пополам. То есть дуги AL и BL равны. Равные дуги стягиваются равными хордами. Значит, $AL = BL$. Тогда $\triangle ALB$ равнобедренный.

Отрезок LN — медиана, проведённая к середине основания равнобедренного треугольника ALB. Следовательно, LN ещё является высотой и биссектрисой $\triangle ALB$. Тогда $\angle ANL = 90°$.



Рассмотрим четырёхугольник $ACMN$. В нём сумма противоположных углов равна

$$\angle ACM + \angle ANM = 90° + 90° = 180°$$

Значит, четырехугольник $ACMN$ — вписанный. То есть $\angle NAC + \angle CMN = 180°$. Углы CMN и NMB — смежные, поэтому $\angle CMN + \angle BMN = 180°$. Тогда

$$\angle NAC + \angle CMN = 180° = \angle CMN + \angle BMN \quad \Rightarrow \quad \angle NAC = \angle BMN$$

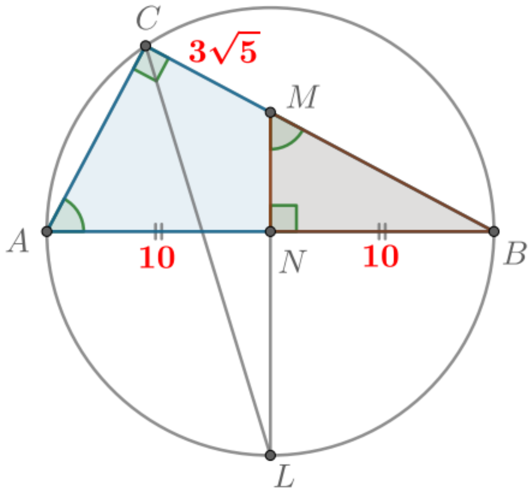
То есть $\angle BAC = \angle BML$.

б) В предыдущем пункте мы доказали, что $\angle ACB = \angle BNM = 90°$ и $\angle BAC = \angle BML$. Тогда заметим, что треугольники ACB и BNM подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{BM}{AB} = \frac{\frac{AB}{2}}{BM + CM} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BM}{20} = \frac{10}{BM + 3\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad BM^2 + 3BM\sqrt{5} - 200 = 0$$

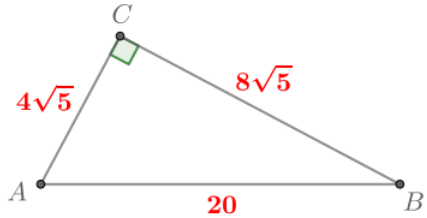
Решив данное квадратное уравнение относительно BM, получим $BM = 5\sqrt{5}$.



По теореме Пифагора в треугольнике ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{AB^2 - (CM + BM)^2} =$$

$$= \sqrt{400 - (8\sqrt{5})^2} = \sqrt{400 - 320} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$



Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{2} = (4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$$

№16.26 *(2020, резервная волна)*

На стороне CD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечена точка M, которая является серединой этой стороны.

а) Докажите, что $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

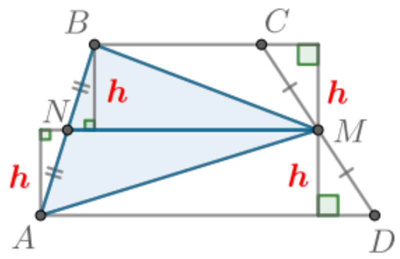
б) На стороне CD отмечена точка K, такая, что $S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{AKD}$, причём $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до стороны AB.

Ответ

б) $7\frac{1}{2}$

Решение

а) Пусть высота трапеции $ABCD$ равна $2h$. Средняя линия трапеции — это отрезок прямой, равноудаленной от прямых, содержащих основания трапеции. Точка M лежит на средней линии трапеции $ABCD$, поэтому расстояние от точки M до каждого из оснований равно h.



Пусть точка N — середина стороны AB. Тогда высота треугольника ANM, проведенная из точки A, равна расстоянию между прямыми AD и MN, то есть равна h.

Аналогично высота в треугольнике BNM, проведенная из точки B, равна h. Тогда

$$S_{ABM} = S_{ANM} + S_{BNM} = \frac{MN \cdot h}{2} + \frac{MN \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot (MN \cdot 2h)$$

Площадь трапеции $ABCD$ равна произведению средней линии MN на высоту. Значит,

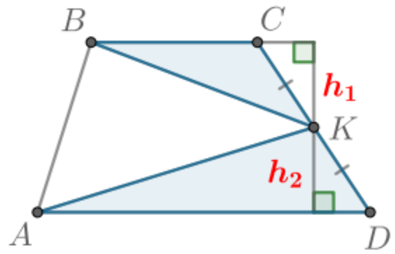
$$S_{ABCD} = MN \cdot 2h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (MN \cdot 2h) = S_{ABM}$$

б) Пусть высота треугольника BKC, проведенная из точки K, равна h_1, а высота треугольника AKD, проведенная из точки K, равна h_2. Тогда

$$S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{AKD} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD \cdot h_2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2BC \cdot h_1 = AD \cdot h_2 \quad \Rightarrow$$

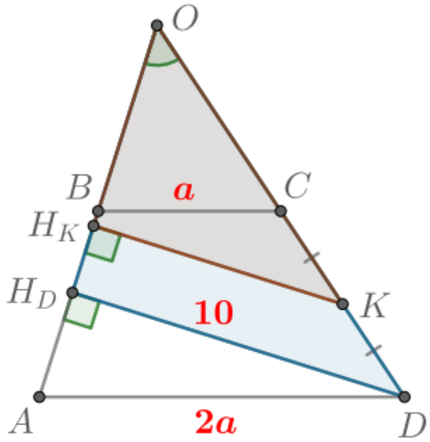
$$\Rightarrow \quad AD \cdot h_1 = AD \cdot h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

Следовательно, точка K равноудалена от прямых, содержащих основания трапеции. Значит, точка K лежит на средней линии, то есть K — середина CD и $CK = KD$.



Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O. Тогда $\angle OBC = \angle OAD$ и $\angle OCB = \angle ODA$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми и секущими AB и CD соответственно. Тогда треугольники BOC и AOD подобны по двум углам. То есть

$$\frac{OC}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2OC = OD \quad \Rightarrow \quad OC = CD$$



Опустим из точек D и K перпендикуляры на AB. Пусть точки H_D и H_K — основания этих перпендикуляров соответственно. По условию $DH_D = 10$. Найдем длину KH_K.

Рассмотрим треугольники KH_KO и DH_DO. Они подобны по двум углам, так как $\angle OH_KK = \angle OH_DD = 90^\circ$ и угол AOD — общий. Тогда

$$\frac{KH_K}{DH_D} = \frac{OK}{OD} = \frac{OC+CK}{OC+CD} = \frac{CD+CK}{2CD} = \frac{2CK+KD}{2CK+2KD} = \frac{3CK}{4CK} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad KH_K = \frac{3}{4}DH_D = \frac{3\cdot 10}{4} = 7\frac{1}{2}$$

№16 из ЕГЭ 2019

№16.27 *(2019, основная волна)*

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ — биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.

б) Найдите PQ, если $BC = 3$, а $AC = 5$.

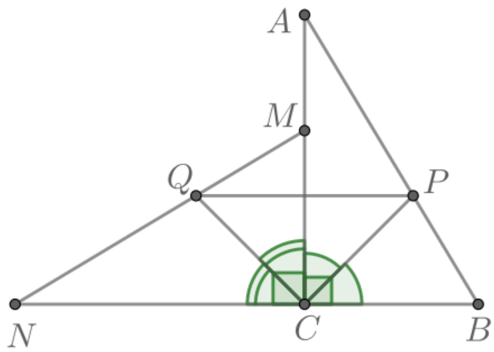
Ответ

б) 3,75

Решение

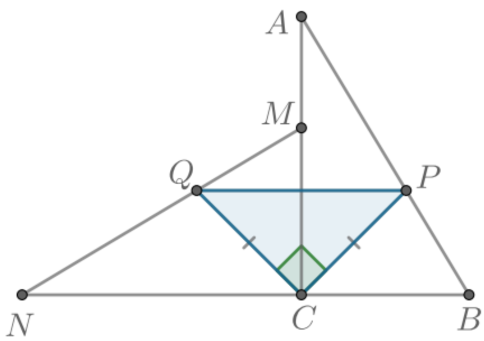
а) Так как CP — биссектриса угла ACB, то $\angle ACP = \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Аналогично, так как CQ — биссектриса угла $\angle NCA$, то $\angle NCQ = \angle QCA = \frac{1}{2}\angle NCA$. Также заметим, что углы NCA и ACB смежные, значит, $\angle NCA + \angle ACB = 180°$. Тогда

$$\angle QCP = \angle QCA + \angle ACP = \frac{1}{2}\angle NCA + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\left(\angle NCA + \angle ACB\right) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$



б) В предыдущем пункте мы доказали, что $\angle QCP = 90°$, следовательно, треугольник PQC прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора:

$$PQ^2 = CP^2 + CQ^2 \quad \Rightarrow \quad PQ = \sqrt{CP^2 + CQ^2}$$

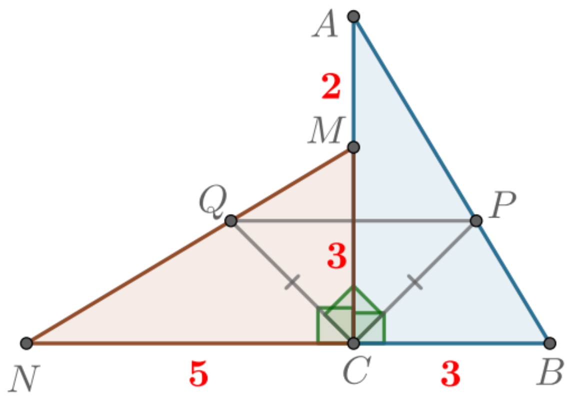


Рассмотрим треугольники ABC и NMC. По условию $NC = AC = 5$ и $MC = BC = 3$. По предыдущему пункту имеем:

$$\angle NCM + \angle ACB = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle NCM = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Тогда треугольники NMC и ABC равны по первому признаку равенства треугольников. В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, биссектрисы прямых углов CQ и CP равны. Следовательно,

$$PQ = \sqrt{CP^2 + CQ^2} = \sqrt{2CP^2}$$



Найдем длину CP. В треугольнике ABC биссектриса CP делит сторону AB на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть

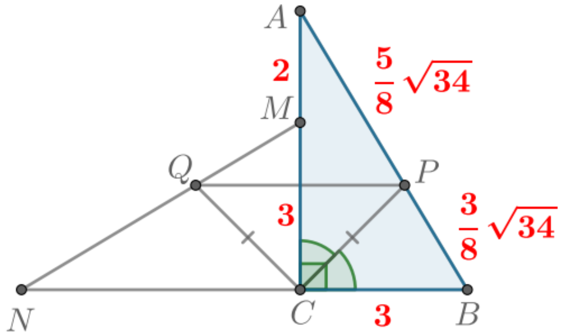
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

По теореме Пифагора в треугольнике ABC :

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Так как $BP : AP = 3 : 5$ и $BP + AP = AB = \sqrt{34}$, то

$$BP = \frac{3}{8}AB = \frac{3\sqrt{34}}{8}$$



Так как ABC — прямоугольный треугольник, то

$$\cos\angle CBP = \frac{BC}{AB} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

Рассмотрим треугольник BCP. По теореме косинусов имеем:

$$CP^2 = BC^2 + BP^2 - 2BC\cdot BP\cdot\cos\angle CBP = 9 + \frac{9\cdot 34}{64} - 2\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{34}}{8}\cdot\frac{3\sqrt{34}}{34} =$$

$$= 9\left(1 + \frac{34}{64} - \frac{6}{8}\right) = 9\cdot\frac{50}{64} = \frac{9\cdot 25}{32}$$

Окончательно получаем:

$$PQ = \sqrt{2CP^2} = \sqrt{2\cdot\frac{9\cdot 25}{32}} = \sqrt{\frac{9\cdot 25}{16}} = \frac{3\cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

№16.28 *(2019, основная волна)*

В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь $\triangle AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45°$.

Ответ

б) 9

Решение

а) Рассмотрим треугольник ABN. Так как BN — высота треугольника ABC, то ABN — это прямоугольный треугольник с углом BAN, равным $60°$. Тогда по сумме углов треугольника

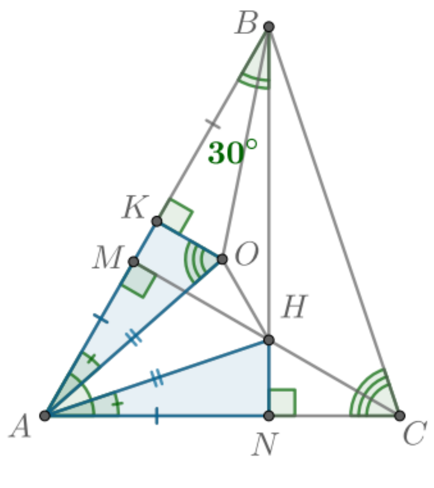
$$\angle ABN = 90° - \angle BAN = 90° - 60° = 30°$$

В прямоугольном треугольнике ABN катет AN, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы AB. Пусть K — середина AB, тогда $AK = BK = AN$.

Рассмотрим треугольник AOB. Он равнобедренный, так как AO и BO — радиусы описанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$\angle BAO = \angle ABO = \frac{1}{2}\left(180° - \angle AOB\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB$$

Также заметим, что отрезок OK является медианой равнобедренного треугольника AOB, а значит и высотой. Тогда $\angle AKO = 90°$.



Заметим, что угол AOB является центральным углом описанной окружности треугольника ABC. Он опирается на хорду AB. Следовательно, угол AOB в два раза больше вписанного угла ACB. То есть

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB \quad \Rightarrow \quad \angle BAO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle ACB$$

Пусть AT — третья высота треугольника ABC. Тогда рассмотрим $\triangle ATC$. По сумме углов треугольника

$$\angle CAT = 180^\circ - \angle ATC - \angle ACT = 180^\circ - 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAO$$

Рассмотрим треугольники AKO и ANH. Они равны по второму признаку равенства треугольников:

$$AK = AN,\ \angle BAO = \angle CAT,\ \angle AKO = \angle HNA = 90^\circ$$

В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, $AO = AH$.

б) По условию $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Тогда по сумме углов треугольника

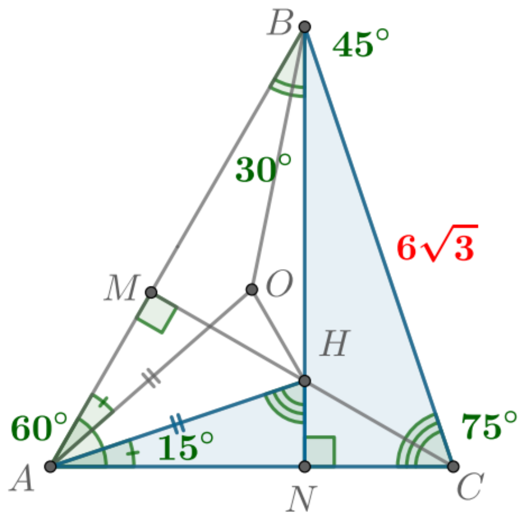
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

По предыдущему пункту

$$\angle BAO = \angle CAT = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \angle OAH = \angle BAC - \angle BAO - \angle CAT = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

Так как $AH = AO$ по пункту а), то площадь треугольника AHO равна

$$S_{AHO} = \frac{1}{2}AO \cdot AH \cdot \sin\angle OAH = \frac{1}{2}AH^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{AH^2}{4}$$



Найдем AH. Для этого рассмотрим треугольники AHN и BCN. Они подобны по двум углам, так как $\angle ANH = \angle BNC = 90^\circ$ и

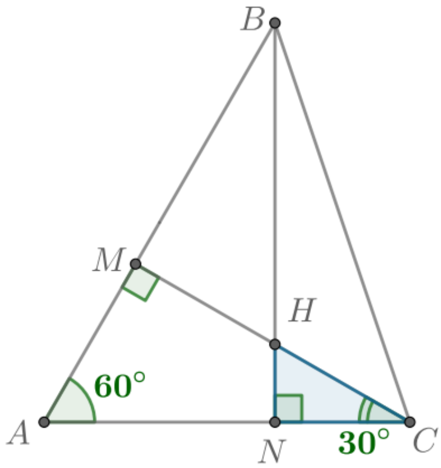
$$\angle AHN = 90^\circ - \angle NAH = 90^\circ - (90^\circ - \angle ACB) = \angle ACB$$

Тогда

$$\frac{AH}{BC} = \frac{NH}{NC}$$

Рассмотрим треугольник NHC. Он прямоугольный, так как BN — высота треугольника ABC. Тогда

$$\frac{NH}{NC} = \operatorname{tg}\angle NCH$$



Заметим, что $\angle NCH = \angle ACM$. Треугольник AMC прямоугольный, так как CM — высота $\triangle ABC$. Тогда по сумме углов треугольника

$$\angle NCH = \angle ACM = 180^\circ - \angle AMC - \angle MAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{NH}{NC} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Тогда найдем AH и искомую площадь треугольника:

$$\frac{AH}{BC} = \frac{NH}{NC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad AH = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$$
$$S_{AHO} = \frac{AH^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

№16.29 *(2019, основная волна)*

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120°$.

Ответ

б) $12\sqrt{3}$

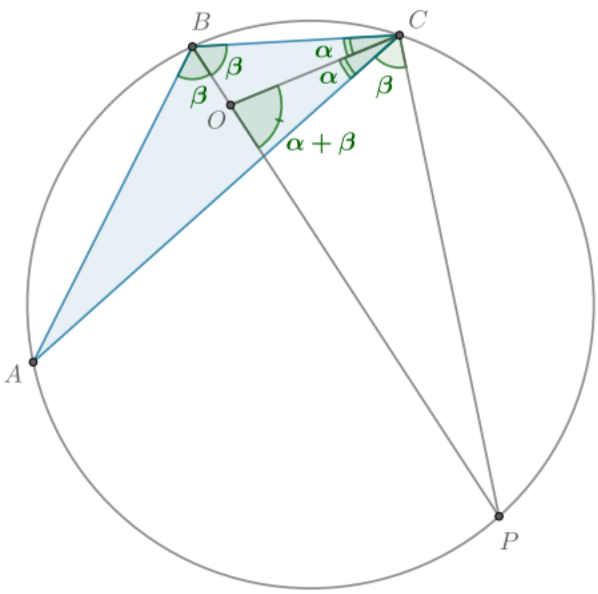
Решение

Точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC, так как O — центр вписанной окружности этого треугольника. Значит, BO и CO — биссектрисы углов ABC и ACB соответственно. Тогда введем обозначения:

$$\angle ABO = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \beta$$
$$\angle BCO = \angle OCA = \frac{1}{2}\angle ACB = \alpha$$

а) Рассмотрим $\triangle BCO$. Его внешний угол $\angle COP$ равен сумме двух не смежных с ним углов треугольника. Получаем

$$\angle POC = \angle OCB + \angle OBC = \alpha + \beta$$



Теперь заметим, что $\angle ACP = \angle ABP$, так как они опираются на одну дугу AP. Тогда

$$\angle PCO = \angle ACP + \angle OCA = \angle ABP + \alpha = \angle ABO + \alpha = \beta + \alpha$$

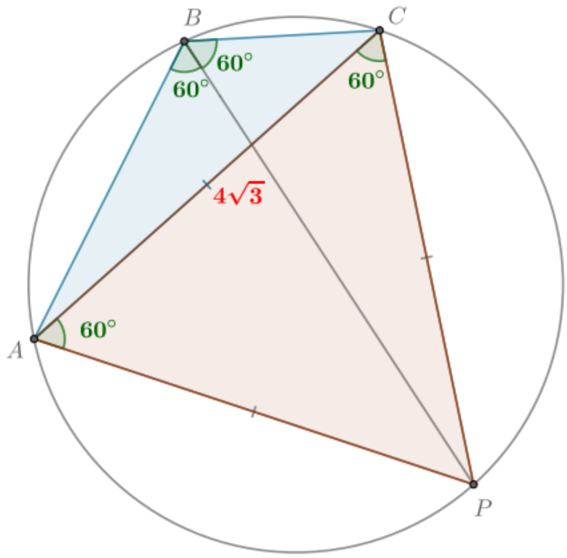
Значит, $\angle POC = \alpha + \beta = \angle PCO$.

б) Так как $\angle ABC = 120^\circ$, то по предыдущему пункту

$$\angle ACP = \angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

По аналогичным соображениям

$$\angle CAP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$



Тогда $\triangle APC$ — равносторонний, так как два угла в нём равны 60°.

Найдем длину его сторону AC. Для этого рассмотрим $\triangle ABC$. По условию около него описана окружность радиуса $R = 4$. Тогда по теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \quad \Rightarrow \quad AC = 2\cdot 4\cdot \sin 120^\circ = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Тогда площадь равностороннего треугольника APC равна

$$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}AC^2\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{3})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$

№16.30 *(2019, основная волна)*

Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN, если $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$, а радиус окружности равен 12.

Ответ

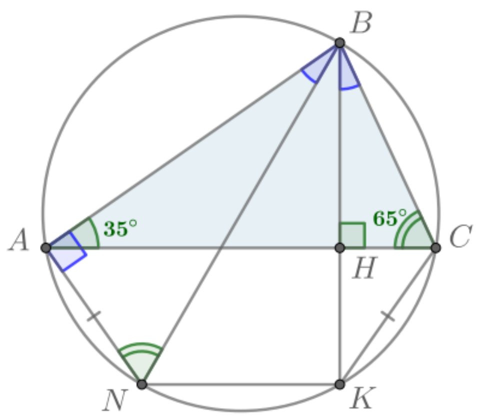
б) 12

Решение

а) Нужно доказать, что хорды AN и CK равны. Так как равные дуги стягиваются равными хордами, достаточно показать, что дуги AN и CK равны. Поскольку дуги равны, если на них опираются равные вписанные углы, то докажем, что $\angle ABN = \angle KBC$.

По условию BN — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle NAB = 90°$, так как он опирается на диаметр. Кроме того, $\angle BHC = 90°$, так как BH — высота треугольника ABC. Углы $\angle ACB$ и $\angle ANB$ опираются на одну дугу AB, поэтому $\angle ACB = \angle ANB$.

Рассмотрим $\triangle ABN$ и $\triangle HBC$. Они подобны по двум углам, так как $\angle BAN = \angle BHC = 90°$ и $\angle ANB = \angle HCB$. Тогда оставшиеся углы этих треугольников также равны: $\angle ABN = \angle HBC$. Значит, $\angle ABN = \angle KBC$. Так как $\angle ABN = \angle KBC$, то $AN = CK$.



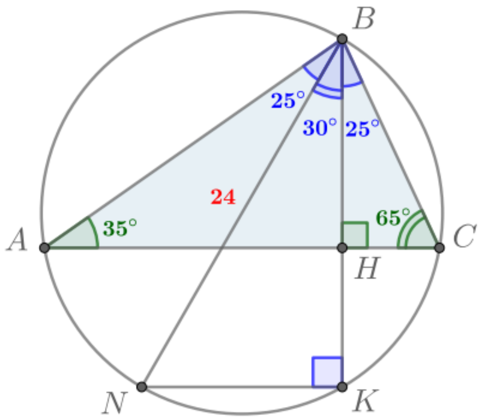
б) Заметим, что $\angle NKB$ опирается на диаметр BN, поэтому $\angle NKB = 90°$. Нужно найти KN — катет прямоугольного треугольника NKB. В треугольнике NKB известна длина гипотенузы $BN = 2 \cdot 12 = 24$, так как BN — диаметр окружности, радиус которой равен 12.

Рассмотрим $\triangle BHC$. Сумма его углов равна 180°, поэтому

$$\angle HBC = 180° - \angle BHC - \angle BCH = 180° - 90° - 65° = 25°$$

В предыдущем пункте доказано, что $\angle ABN = \angle KBC$. Тогда

$$\angle ABN = \angle KBC = \angle HBC = 25°$$



Рассмотрим $\triangle ABC$. Так как известны два его угла, то найдем третий:

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 35^\circ - 65^\circ = 80^\circ$$

Теперь можем найти $\angle NBK$:

$$\angle NBK = \angle ABC - \angle ABN - \angle KBC = 80^\circ - 25^\circ - 25^\circ = 30^\circ$$

В прямоугольном треугольнике NKB катет KN лежит напротив угла $\angle NBK = 30^\circ$, поэтому

$$KN = \frac{BN}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

№16.31 *(2019, досрочная волна)*

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

Ответ

б) $\sqrt{65}$

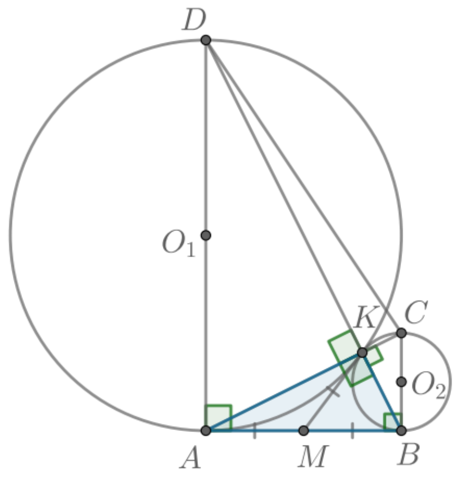
Решение

а) Проведём в точке K общую касательную к окружностям. Пусть она пересекает прямую AB в точке M. Заметим, что MA и MK — отрезки касательных к первой окружности, проведённые из одной точки. Значит, $MA = MK$.

Аналогично $MK = MB$ как отрезки касательных, проведённых из точки M ко второй окружности.

Тогда в треугольнике AKB медиана KM равна половине стороны AB, следовательно, треугольник AKB прямоугольный и $\angle AKB = 90°$. Углы AKD и BKC смежны с углом AKB, значит,

$$\angle AKD = \angle BKC = 180° - \angle AKB = 180° - 90° = 90°$$



Прямые углы AKD и BKD опираются на хорды AD и BC первой и второй окружностей соответственно. Значит, AD — диаметр первой окружности, а BC — диаметр второй.

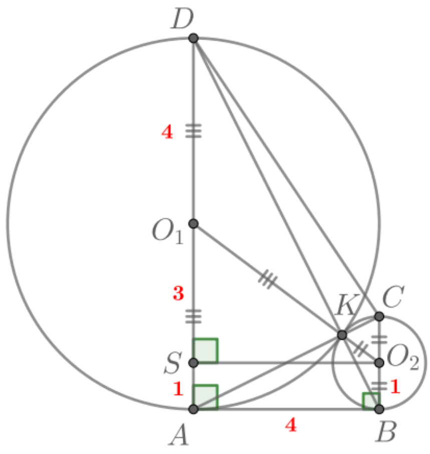
Пусть O_1 — центр первой окружности, а O_2 — центр второй. То есть O_1 — середина AD, а O_2 — середина BC. Тогда AO_1 и DO_1 — радиусы первой окружности, а BO_2 и CO_2 — радиусы второй.

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания, значит, $AO_1 \perp AB$ и $AD \perp AB$. Аналогично $BO_2 \perp AB$ и $BC \perp AB$. Следовательно, $AD \parallel BC$.

б) В предыдущем пункте мы доказали, что AD — диаметр первой окружности, а BC — диаметр второй. Тогда имеем:

$$AD = AO_1 + DO_1 = 2 \cdot 4 = 8, \quad BC = BO_2 + CO_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

По предыдущему пункту $AD \parallel BC$ и $AD \perp AB$, следовательно, $ABCD$ — прямоугольная трапеция, а AB — ее высота. Найдем AB.



Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1O_2BA. Опустим из точки O_2 перпендикуляр на AO_1. Пусть точка S — его основание. Заметим, что SO_2BA — прямоугольник, так как все его углы прямые. Значит, $AB = SO_2$ и $BO_2 = AS = 1$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1O_2S. В нем имеем:

$$O_1O_2 = 4 + 1 = 5, \quad SO_1 = AO_1 - AS = 4 - 1 = 3$$

Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$(O_1O_2)^2 = (SO_1)^2 + (SO_2)^2$$

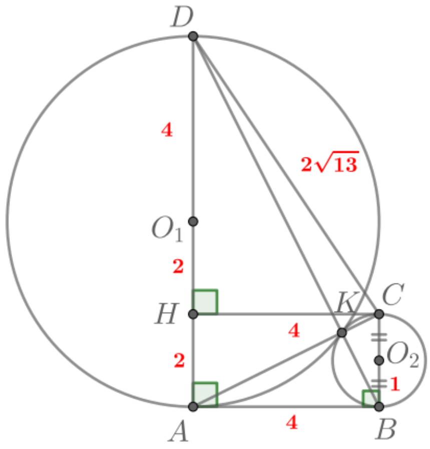
$$SO_2 = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (SO_1)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Тогда $AB = SO_2 = 4$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$. Опустим из точки C перпендикуляр на AD. Пусть точка H — его основание. Заметим, что $ABCH$ — прямоугольник, так как все его углы прямые. Значит, $AB = CH = 4$ и $BC = AH = 2$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник CDH. В нем имеем:

$$CH = 4, \quad DH = AD - AH = 8 - 2 = 6$$



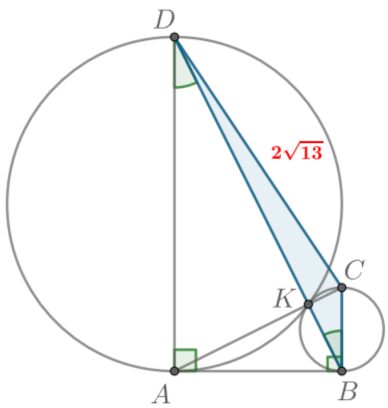
Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$CD^2 = CH^2 + DH^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$$

$$CD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Нам нужно найти радиус R описанной окружности треугольника BCD. По теореме синусов имеем:

$$2R = \frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{2\sqrt{13}}{\sin \angle CBD} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{13}}{\sin \angle CBD}$$

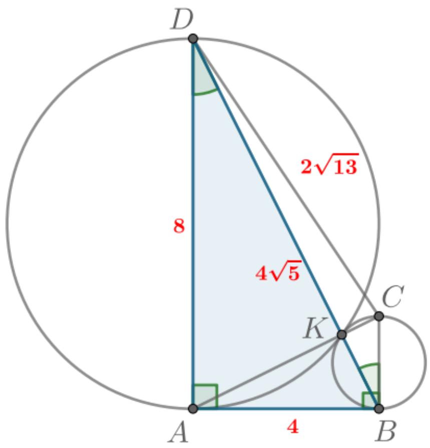


Найдем $\sin \angle CBD$. Заметим, что $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей BD.

Рассмотрим треугольник ADB. Он прямоугольный, так как $AD \perp AB$. Тогда $\sin \angle ADB$ равен отношению $AB : BD$. По теореме Пифагора имеем:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$BD = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$



Теперь можем найти $\sin\angle CBD$:

$$\sin\angle CBD = \sin\angle ADB = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{13}}{\sin\angle CBD} = \sqrt{13}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{65}$$

№16.32 *(2019, досрочная волна)*

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в отличных от их концов точках P и Q.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

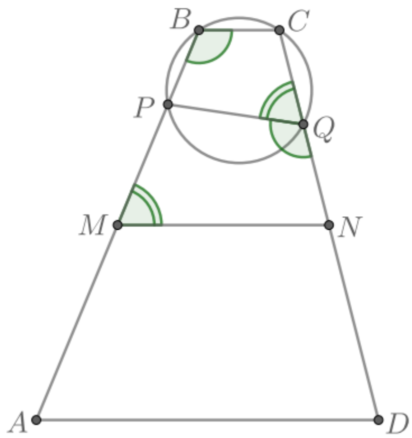
Ответ

б) $\dfrac{336}{65}$

Решение

а) По условию четырёхугольник $PBCQ$ вписанный. Значит, сумма его противоположных углов равна 180°. То есть

$$\angle PBC + \angle PQC = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle PQC = 180^\circ - \angle PBC$$



Заметим, что MN — средняя линия трапеции $ABCD$ по условию. Значит, $MN \parallel BC$. Тогда четырёхугольник $MBCN$ — трапеция. То есть

$$\angle MBC + \angle BMN = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle BMN = 180^\circ - \angle MBC = 180^\circ - \angle PBC = \angle PQC$$

Заметим, что углы PQC и PQN являются смежными. То есть $\angle PQC + \angle PQN = 180^\circ$. Тогда рассмотрим четырёхугольник $MPQN$. В нём сумма противоположных углов равна

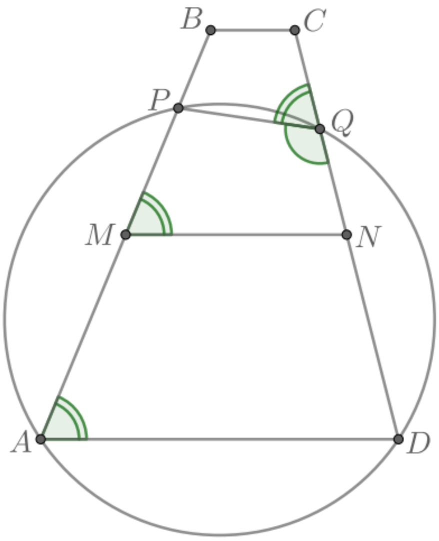
$$\angle PMN + \angle PQN = \angle BMN + \angle PQN = \angle PQC + \angle PQN = 180^\circ$$

Значит, четырёхугольник $MPQN$ вписанный.

б) Рассмотрим четырёхугольник $APQD$. Докажем, что он вписанный. Так как $MN \parallel AD$, то $\angle PMN = \angle PAD$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и AD и секущей AP. Тогда сумма противоположных углов четырёхугольника $APQD$ равна

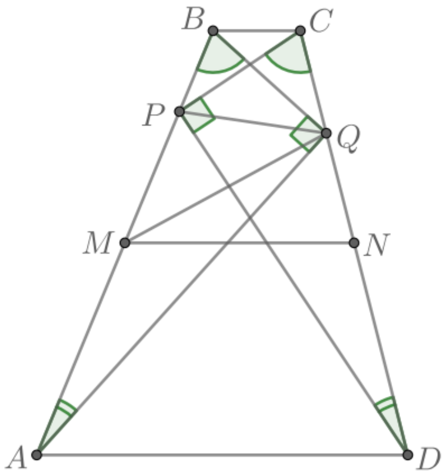
$$\angle PAD + \angle PQD = \angle PMN + \angle PQN = 180^\circ$$

То есть четырёхугольник $APQN$ вписанный.



Во вписанном четырёхугольнике $PBCQ$ углы PBQ и PCQ равны, так как они опираются на одну сторону PQ. Аналогично во вписанном четырёхугольнике $APQD$ углы PAQ и PDQ равны, так как они опираются на одну сторону PQ. Сложим два этих равенства и получим

$$\angle PBQ + \angle PAQ = \angle PCQ + \angle PDQ$$



Рассмотрим треугольник CPD. По условию в нём $\angle CPD = 90^\circ$. Тогда по сумме углов треугольника имеем:

$$90^\circ = \angle PCD + \angle PDC = \angle PCQ + \angle PDQ = \angle PBQ + \angle PAQ = \angle ABQ + \angle BAQ$$

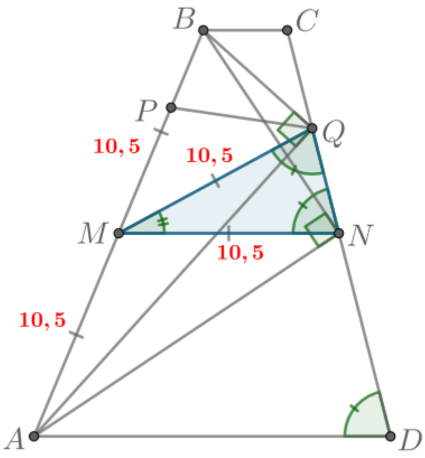
То есть по сумме углов в треугольнике AQB :

$$\angle BQA = 180^\circ - (\angle ABQ + \angle BAQ) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Значит, треугольник BQA является прямоугольным. Отрезок QM — его медиана, проведенная к гипотенузе AB. Значит, $QM = AM = BM = \frac{1}{2}AB = 10,5$.

Рассмотрим треугольник BNA. Заметим, что в трапеции $ABCD$ отрезок MN является средней линией, то есть

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{17 + 4}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$



Следовательно, $AM = NM = BM = QM = 10,5$. Тогда точки A, B, Q и N лежат на окружности с центром в точке M и радиусом 10,5. Рассмотрим треугольник QMN. Он равнобедренный, так как $QM = NM$. То есть $\angle MQN = \angle MNQ$, а $\angle QMN = 180^\circ - 2\angle MNQ$. Тогда по теореме синусов имеем:

$$\frac{QM}{\sin\angle MNQ} = \frac{QN}{\sin\angle QMN} \quad \Rightarrow \quad QN = \frac{QM \cdot \sin\angle QMN}{\sin\angle MNQ} =$$

$$= \frac{QM \cdot \sin(180^\circ - 2\angle MNQ)}{\sin MNQ} = \frac{QM \cdot \sin 2\angle MNQ}{\sin\angle MNQ}$$

По формуле синуса двойного угла $\sin 2\angle MNQ = 2 \cdot \cos\angle MNQ \cdot \sin\angle MNQ$. То есть

$$QN = \frac{QM \cdot \sin 2\angle MNQ}{\sin\angle MNQ} = \frac{QM \cdot 2 \cdot \cos\angle MNQ \cdot \sin\angle MNQ}{\sin\angle MNQ} = 2QM \cdot \cos\angle MNQ$$

Найдем косинус угла MNQ. Заметим, что так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то $MN \parallel AD$. Тогда $\angle MNQ = \angle ADC$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и AD и секущей CD. Следовательно, $\cos\angle MNQ = \cos\angle ADC$.

Через точку C проведем прямую, параллельную прямой AB. Пусть она пересекает AD в точке K. Тогда $ABCK$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AK$ и $AB \parallel CK$. Тогда $AK = BC = 4$ и $CK = AB = 21$. Следовательно, $KD = AD - AK = 17 - 4 = 13$.

Рассмотрим треугольник KDC. По теореме косинусов имеем:

$$CK^2 = KD^2 + CD^2 - 2KD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\angle ADC = \frac{KD^2 + CD^2 - CK^2}{2KD \cdot CD} = \frac{169 + 400 - 441}{2 \cdot 13 \cdot 20} = \frac{16}{65}$$

Следовательно,

$$QN = 2QM \cdot \cos\angle MNQ = AB \cos\angle ADC = 21 \cdot \frac{16}{65} = \frac{336}{65}$$

№16.33 *(2019, досрочная волна)*

Дана трапеция $ABCD$. Точка M — середина основания точка N — середина боковой стороны CD, точка F — середина диагонали BD.

а) Докажите, что прямая CF проходит через середину отрезка MN.

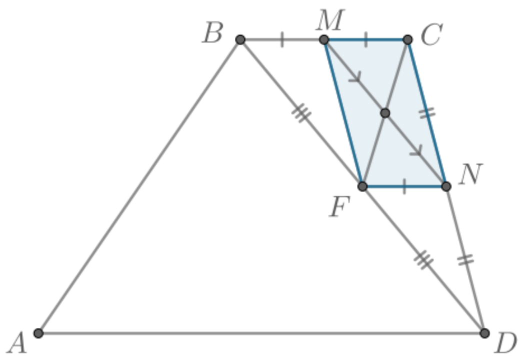
б) Известно, что $CD = 10$, $BD = 15$ и $\angle BDC = 30^\circ$. Найдите площадь четырехугольника $MCKD$, где K — точка пересечения прямых MN и AD.

Ответ

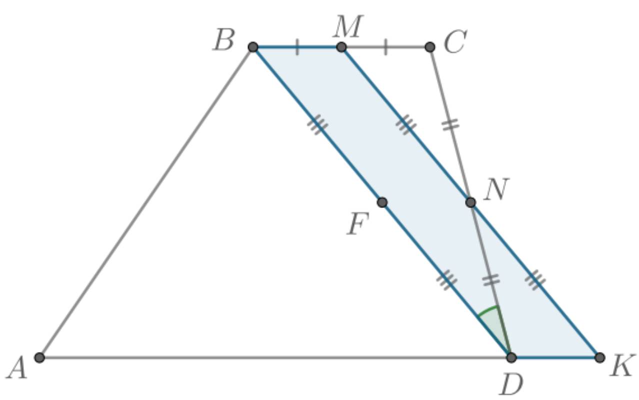
б) 37,5

Решение

а) Рассмотрим треугольник BCD. Так как FN — его средняя линия, то $FN \parallel BC$ и $FN = BM = MC$. Значит, четырехугольник $MCNF$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны MC и FN равны и параллельны. Диагонали CF и MN параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, следовально, CF проходит через середину MN.

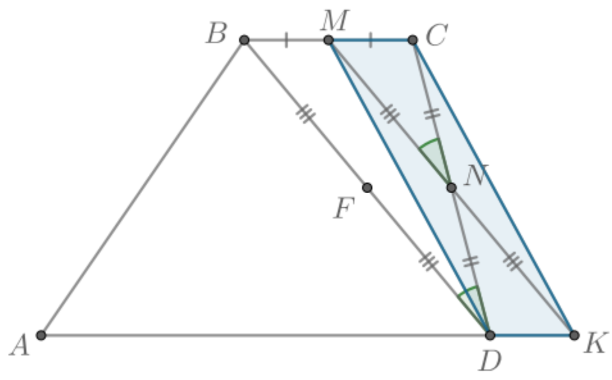


б) Рассмотрим треугольник BCD. В нем отрезок MN — средняя линия. Значит, $MN \parallel BD$. Тогда четырехугольник $BMKD$ — параллелограмм, так как в нем противоположные стороны попарно параллельны. Тогда $MK = BD = 15$.



Рассмотрим четырехугольник $MCKD$. В нем диагонали $MK = 15$ и $CD = 10$ пересекаются под углом $\angle MNC$. Заметим, что $\angle MNC = \angle BDC = 30^\circ$, как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и BD и секущей CD. Тогда

$$S_{MCKD} = \frac{1}{2}MK \cdot CD \cdot \sin\angle MNC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 37,5$$



№16.34 *(2019, резервная волна)*

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH как на диаметрах, равно $(\operatorname{tg}\angle ABC)^4$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметром AH, вторично пересекающей отрезок AC в точке P, а точка O_2 — центр окружности диаметром BH, вторично пересекающей отрезок BC в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2, если $AC = 12$, $BC = 10$.

Ответ

б) 30

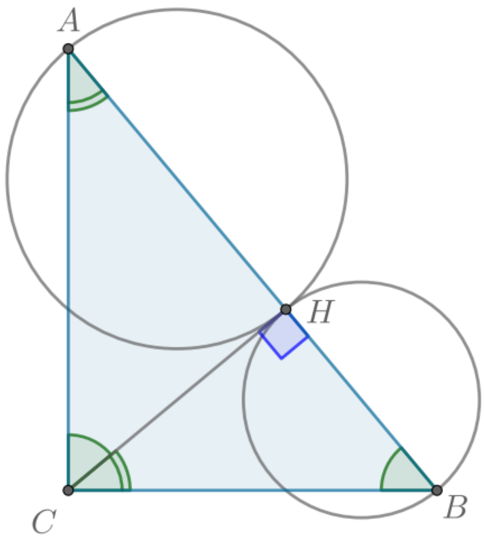
Решение

а) Запишем площади S_{AH} и S_{BH} кругов, построенных на AH и BH соответственно как на диаметрах:

$$S_{AH} = \pi \cdot \frac{1}{4}AH^2, \quad S_{BH} = \pi \cdot \frac{1}{4}BH^2$$

Тогда отношение площадей кругов равно

$$\frac{S_{AH}}{S_{BH}} = \frac{\pi \cdot AH^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi \cdot BH^2} = \frac{AH^2}{BH^2} = \left(\frac{AH}{BH}\right)^2$$



Рассмотрим треугольник BHC. В нём $\angle BHC = 90^\circ$, так как CH — высота. Тогда

$$\angle HCB = 180^\circ - \angle BHC - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle ABC$$

С другой стороны, $\angle HCB = 90^\circ - \angle HCA$, так как $\angle C = 90^\circ$ по условию. Значит,

$$90^\circ - \angle HCA = 90^\circ - \angle ABC \quad \Rightarrow \quad \angle ABC = \angle HCA \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\angle ABC = \operatorname{tg}\angle HCA$$

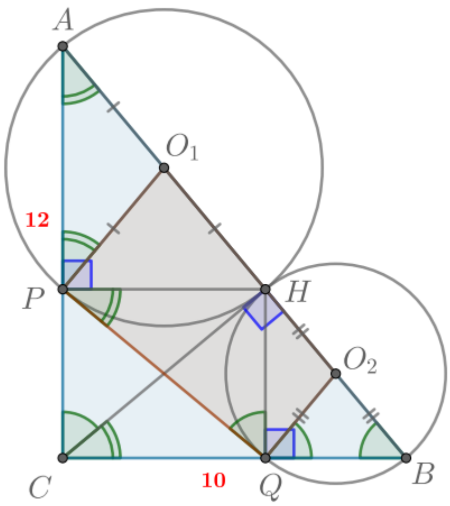
Рассмотрим $\triangle HBC$. Так как он прямоугольный, то $\operatorname{tg}\angle HBC = \dfrac{CH}{BH}$.

Аналогично в $\triangle HCA$ имеем $\operatorname{tg}\angle HCA = \dfrac{AH}{CH}$. Тогда

$$(\operatorname{tg}\angle ABC)^4 = (\operatorname{tg}\angle HBC)^2 \cdot (\operatorname{tg}\angle HCA)^2 = \left(\frac{CH}{BH}\right)^2 \cdot \left(\frac{AH}{CH}\right)^2 = \left(\frac{AH}{BH}\right)^2 = \frac{S_{AH}}{S_{BH}}$$

б) Докажем, что $PHQC$ — прямоугольник. Для этого рассмотрим $\triangle APH$. В нём $\angle APH = 90^\circ$, так как он опирается на диаметр AH. Тогда $\triangle APH$ — прямоугольный треугольник с $\angle APH = 90^\circ$. Из аналогичных соображений для $\triangle BQH$ получим, что $\angle BQH = 90^\circ$.

Так как три угла четырёхугольника $PHQC$ равны 90°, то $PHQC$ — прямоугольник. Прямоугольник является вписанным четырёхугольником, поэтому углы, опирающиеся на одну сторону, равны. То есть $\angle HPQ = \angle HCQ$ и $\angle HQP = \angle HCP$. Кроме того, в прямоугольнике диагонали равны, поэтому $PQ = CH$.



По предыдущему пункту $\angle HCA = \angle ABC$. По аналогичным соображениям $\angle HCB = \angle BAC$. Тогда имеем:

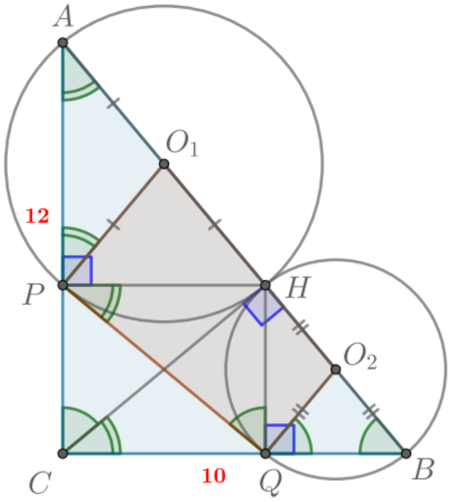
$$\angle ABC = \angle HCA = \angle HCP = \angle HQP, \quad \angle BAC = \angle HCB = \angle HCQ = \angle HPQ$$

Рассмотрим $\triangle APH$. Если O_1 — центр окружности, построенной на AH как на диаметре, то отрезки AO_1, PO_1 и HO_1 — это радиусы. Значит, $AO_1 = PO_1 = HO_1$. Тогда треугольник AO_1P равнобедренный, поэтому $\angle O_1AP = \angle O_1PA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Имеем равенство:

$$\angle O_1PA = \angle O_1AP = \angle BAC = \angle HPQ$$

Тогда

$$\angle QPO_1 = \angle HPQ + \angle HPO_1 = \angle O_1PA + \angle HPO_1 = \angle HPA = 90^\circ$$



Из аналогичных соображений для $\triangle BQH$ получим, что $\angle O_2QB = \angle HQP$ и $\angle PQO_2 = 90^\circ$. Тогда прямые PO_1 и QO_2 параллельны, так как сумма односторонних углов равна

$$\angle QPO_1 + PQO_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Значит, четырёхугольник O_1PQO_2 — прямоугольная трапеция, поэтому её площадь равна

$$S = PQ \cdot \frac{PO_1 + QO_2}{2} = CH \cdot \frac{\frac{AH}{2} + \frac{BH}{2}}{2} = CH \cdot \frac{AH + BH}{4} = CH \cdot \frac{AB}{4}$$

Заметим, что площадь прямоугольного треугольника ABC можно посчитать двумя способами:

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2}$$

Тогда площадь четырехугольника O_1PQO_2 равна

$$S = CH \cdot \frac{AB}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

Замечание. Тот же результат можно получить, если заметить, что четырехугольник O_1PQO_2 состоит из «половинок» фигур, составляющих исходный треугольник ABC.

№16.35 *(2019, резервная волна)*

Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что $AB = BC$.

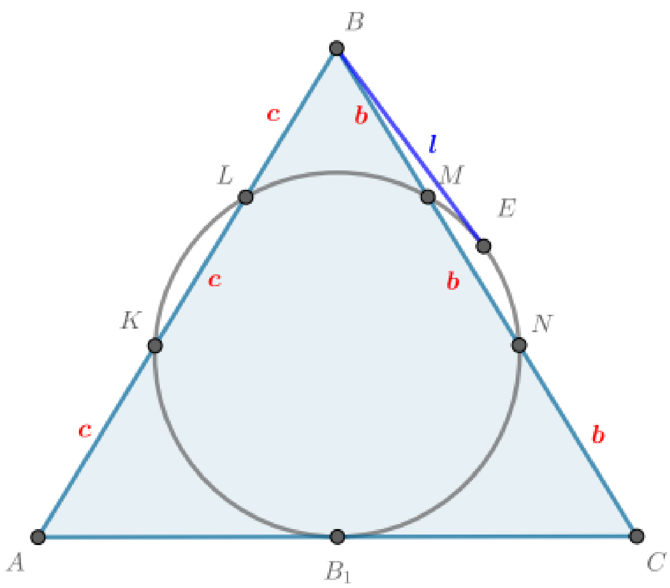
б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины A, делит сторону BC.

Ответ

б) $5:4$

Решение

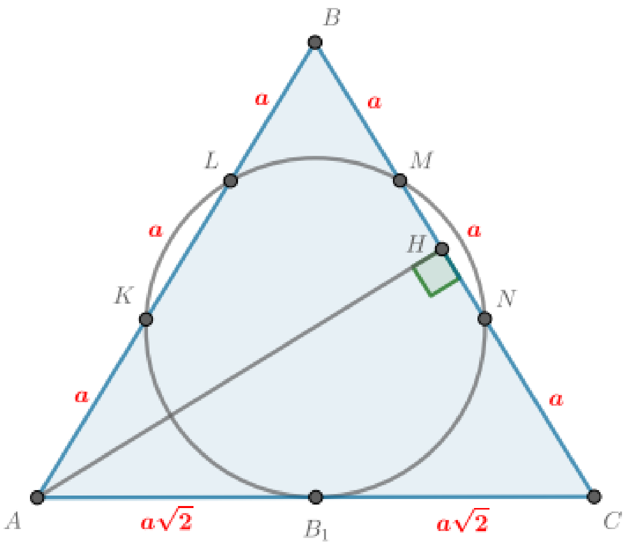
а) Обозначим длину трети стороны AB через c, длину трети стороны BC через b. По свойству касательной $BL \cdot BK = l^2 = BM \cdot BN$, где l — длина касательной к окружности из точки B. Тогда $2b \cdot b = 2c \cdot c \Rightarrow b = c \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.



б) Введем новые обозначения. Мы доказали, что треугольник равнобедренный, обозначим треть его боковой стороны через a. По свойству касательной $AB_1^2 = AK \cdot AL$, $CB_1^2 = CN \cdot CM$. Тогда $CB_1^2 = AB_1^2 = 2a^2 \Rightarrow CB_1 = AB_1 = a\sqrt{2}$. Пусть p — полупериметр $\triangle ABC$: $p = 3a + a\sqrt{2}$. Запишем площадь треугольника ABC двумя способами

$$\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$$

$$AH = \frac{2\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}}{BC} = \frac{2\sqrt{(3a+a\sqrt{2})(a\sqrt{2})^2(3a-a\sqrt{2})}}{3a} = \frac{2a^2\sqrt{14}}{3a} = \frac{2a\sqrt{14}}{3}$$



По теореме Пифагора для $\triangle ABH$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{56}{9}a^2} = \frac{5}{3}a \Rightarrow CH = \frac{4}{3}a \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{5}{4}.$$