Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1 апреля 2023 года   Продолжительность 150 минут   Вариант 21

………………………………………………...……………………………...…..

Часть 1

В задачах 1 – 5 оценивается только верный ответ.
В задачах 6 – 10 необходимы полные обоснованные решения задач.

1. (1 балл) Первый робот и второй робот разгружают вагон 52 минуты. Второй робот и третий робот могут выполнить то же задание за 39 минут, а третий и первый роботы — за 26 минут. За сколько минут роботы разгрузят вагон, работая втроем?

2. (1 балл) Упростите выражение $\sqrt[4]{105\sqrt{3}+215+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

3. (1 балл) Каждое основание *KN* и *LM* трапеции *KLMN* продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов *L* и *K* этой трапеции пересекаются в точке *A*. Биссектрисы внешних углов *M* и *N* пересекаются в точке *B*. Найдите периметр трапеции *KLMN*, если длина отрезка *AB* равна 32.

4. (1 балл) Числа x, y, z таковы, что $\frac{3y+z-2x}{x}=\frac{4y-2z+5x}{z}=1$. Найдите $\frac{y}{x}$.

5. (1 балл) Укажите все пары целых чисел *(n,m)*, для которых $2nm+n=14$ и $mn\ge 8$.

6. (2 балла) Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

7. (2 балла) Решите уравнение $\frac{sinx}{sin^2\frac{x}{2}}=4cos^2\frac{x}{2}$

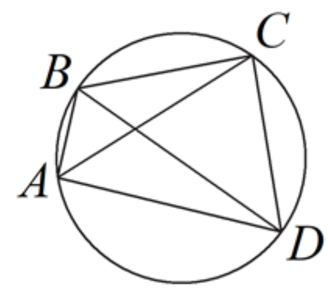
8. (2 балла) Через середину *K* медианы *BM* треугольника *ABC* и вершину *A* проведена прямая, пересекающая сторону *BC* в точке *P*. Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади четырёхугольника *KPCM*.

9. (4 балла) Найдите все значения *a*, при каждом из которых значения функции $f(x)=(2-a)|x|+3+a$ будут положительны на всем отрезке $-2\le x\le 2$.

10. (2 балла) Касательная к графику функции $f(\mathrm{x})=3x^3-18x^2+37x-3$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Найти координаты точки касания.

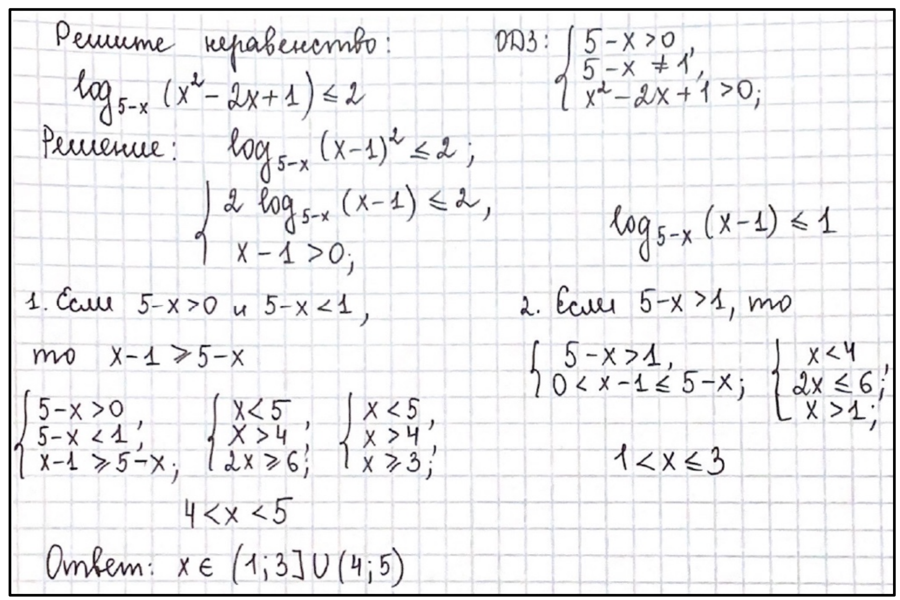
Часть 2

11. На экзамене было дано задание. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *BDC* равен 41°, угол *CAD* равен 46°. Найдите градусную меру угла *BCD*.



Среди ответов наиболее часто встречались значения 87, 98, 93 и 90.
а) (1 балл) Какой ответ правильный?
б) (2 балла) В результате каких ошибок могли быть получены другие ответы из приведенного списка? Предложите вариант объяснения для каждого из них.

12.Представлено решение ученика.
(1 балл) Кратко прокомментируйте это решение. В своем комментарии укажите ошибки и неточности, если они есть. Объясните, в чем состоят эти ошибки и к каким последствиям привели.
(1 балл) Исправьте эту ошибку (ошибки) и доведите (допишите) решение до верного ответа. (Оценивается решение, соответствующее логике решения ученика, но верное. Оформление не оценивается.)
(2 балла) Решите данное неравенство графическим способом. (построение графика необходимо объяснить – достаточно кратких пояснений).



Решите неравенство:
$\log_{5-x}(x^2-2x+1)\le 2$

ОДЗ: $\begin{cases}5-x>0,\\ 5-x\ne 1,\\ x^2-2x+1>0;\end{cases}$

Решение: $\log_{5-x}(x-1)^2\le 2$;

$\begin{cases}2\log_{5-x}(x-1)\le 2,\\ x-1>0;\end{cases}$ $\log_{5-x}(x-1)\le 1$

1. Если $5-x>0$ и $5-x<1$, то $x-1\ge 5-x$

$\begin{cases}5-x>0,\\ 5-x<1,\\ x-1\ge 5-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x<5,\\ x>4,\\ 2x\ge 6;\end{cases}$ $\begin{cases}x<5,\\ x>4,\\ x\ge 3;\end{cases}$

$4<x<5$

2. Если $5-x>1$, то

$\begin{cases}5-x>1,\\ 0<x-1\le 5-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x<4\\ 2x\le 6;\\ x>1;\end{cases}$

$1<x\le 3$

Ответ: $x\in(1;3]\cup(4;5)$

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

………………………………………………………………………………………...

В задачах 1–5 оценивается только верный ответ – 1 балл.

1	2	3	4	5
$\mathbf{24}$	$\mathbf{2\sqrt{3}+1}$	$\mathbf{64}$	$\mathbf{\frac{4}{13}}$	$\mathbf{(-14;-1)\ \ (-2;-4)}$

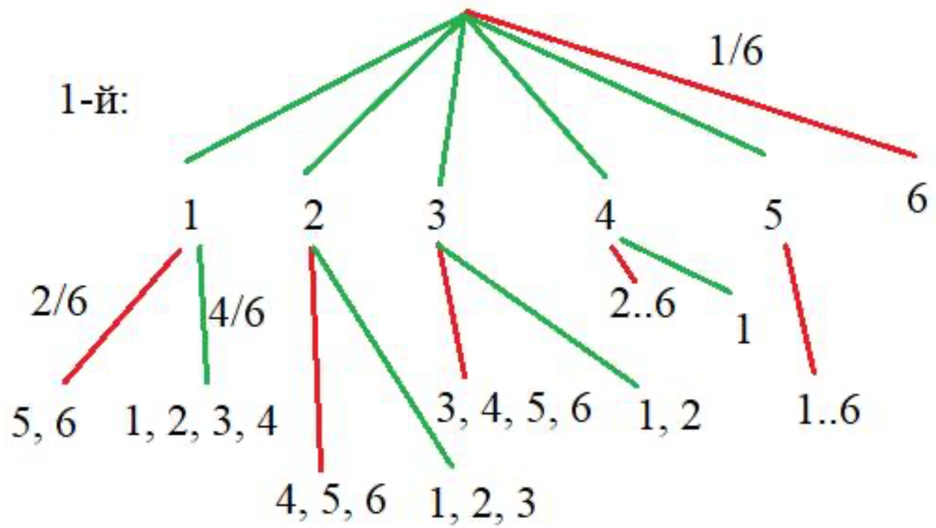
6. Ответ: **0,56**

2 балла – приведено верное решение, построено дерево или словами правильно объясняется формула.

1 балл – приведена только верная формула и ответ или есть арифметическая ошибка.

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Построим дерево решений при двух бросках, пока число очков не превысило в сумме 5:



Нас интересует возникновение любого «красного» исхода при втором броске. Это есть не что иное, как сумма вероятностей этих исходов. Имеем:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{2+3+4+5+6}{36}=\frac{5}{9}\approx 0{,}56$$

7. Ответ: $\boldsymbol{x=\pi+2\pi k, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}}$

2 балла – приведено верное обоснованное решение.

1 балл – приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов или верное решение с арифметической ошибкой (не более двух).

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Заметим, что в силу формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, справедлива формула $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Откуда $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2 x$.

Имеем:

$$\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}=4\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin x = 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin x=\sin^2 x,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = 1,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}\neq\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\end{cases}k,n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\end{cases}k,n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\ k\in\mathbb{Z}.$$

8. Ответ: **0,6**

2 балла – приведено верное решение с доказательством всех фактов (арифметические ошибка не считаются).

1 балл – приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов.

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Проведём отрезок *MT*, параллельный *AP*. Тогда *MT* – средняя линия треугольника *APC* и *CT*=*TP*, а *KP* – средняя линия треугольника *BMT* и *TP*=*BP*. Обозначим площадь треугольника *BKP* через *S*. Тогда площадь треугольника *KPC*, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна 2*S*. Значит, площадь треугольника *CKB* равна 3*S* и равна площади треугольника *CMK* (треугольники имеют одну высоту, проведённую из вершины *C*, и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника *AMK*. Площадь треугольника *ABK* равна площади треугольника *AMK*. Итак, $S_{BKP}=S$, $S_{KPC}=2S$, $S_{CMK}=3S=S_{AMK}=S_{ABK}$, $S_{KPCM}=5S$. Значит, $S_{ABK}:S_{KPCM}=3:5=0{,}6$.

9. Ответ: $-\mathbf{3} < \boldsymbol{a} < \mathbf{7}$

4 балла – приведено верное обоснованное решение.

3 балла – с помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого только включением концов.

2 балла – получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.

1 балл – задача верно сведена к исследованию двух прямых.

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Проверить концы отрезков для $x > 0$ и $x < 0$. Теорема, если на концах отрезка значения функции положительны, то и весь отрезок даст положительные значения линейной функции (док-ва не требуется, но факт должен быть сформулирован).

10. Ответ: **(2; 23)**

2 балла – приведено верное обоснованное решение.

1 балл – ход рассуждений верный, но допущена арифметическая ошибка.

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. $f'(x_0) = 9{x_0}^2 - 36x_0 + 37 = tg\ 45° = 1 \implies 9{x_0}^2 - 36x_0 + 37 = = 1 \implies 9{x_0}^2 - 36x_0 + 36 = 0 \implies (x_0 - 2)^2 = 0 \implies x_0 = 2.$

Тогда $f(x_0) = 3 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 37 \cdot 2 - 3 = 24 - 72 + 74 - 3 = 23$

11а. Ответ: **93**

1 балл – верный ответ.

11б.

2 балла – приведены 3 верных объяснения.

1 балл – приведены 2 верных объяснения.

0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Возможны различные правдоподобные объяснения. Например, 98 могло появиться в результате деления угла пополам с ошибкой.

12.

1) *1 балл –верно указана ошибка, приведены обоснования.*

Ошибка: неравносильный переход из $log_{5-x}(x-1)^2 \le 2$, верный переход к $2log_{5-x}|x-1| \le 2$. В результате потеряны решения $x < 1$.

2) Ответ: $(-\infty; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}; \mathbf{3}] \cup (\mathbf{4}; \mathbf{5})$

1 балл – приведено решение (начиная с ошибочного перехода) или просто рассмотрен потерянный случай и получен верный ответ.

3) *2 балла – верно построен график функции* $log_{5-x}(x-1)^2$, $log_2\frac{|x-1|}{5-x}$ *или* $log_{5-x}|x-1|$, *верно найдены решения неравенства, есть пояснения к построению.*

1 балл – на графике нет ключевых точек: пересечения с осями, выколотые точки, не указаны асимптоты (или нет пояснений к ним).

0 баллов – в остальных случаях.