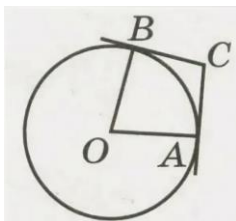


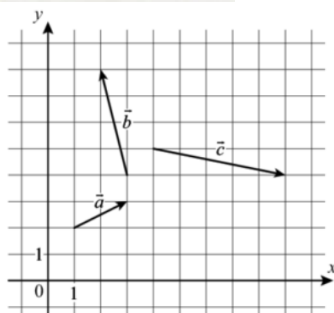
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень Вариант № 23

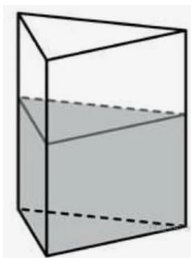
1. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 32° . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



2. На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Найдите значение выражения $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c}$.



3. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.



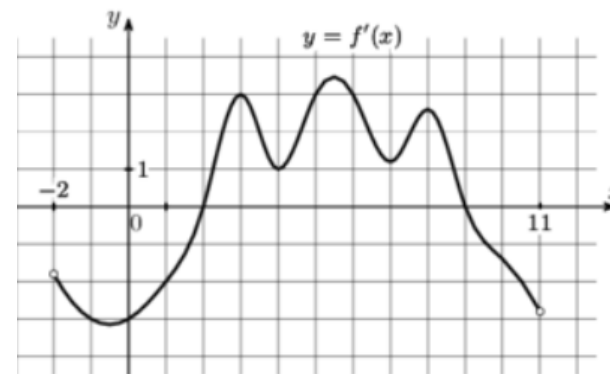
4. Игральную кость бросили два раза. Известно, что четыре очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».
5. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней»

больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

6. Найдите корень уравнения $\log_4 2^{6x-1} = 4$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.

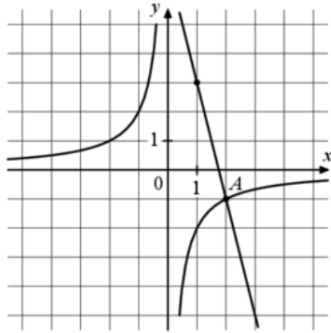
8. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. В ответе укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 9$ или совпадает с ней.



9. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $p \cdot V^{\frac{4}{3}} = 8,1 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, где p – давление газа в паскалях, V – объем газа в кубических метрах. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $6,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

10. Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот проплыл 30 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{c}{x}$ и $g(x) = kx + p$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

13. а) Решите уравнение $4\sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3\sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина ребра основания равна 4, а длина бокового ребра равна 2.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α , проходящей через середину ребра AB перпендикулярно отрезку, соединяющему середины рёбер BC и A_1B_1 , делит ребро AC в отношении 1:3, считая от вершины A .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α .

15. Решите неравенство:

$$\frac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{2-x}} - 4} \leq 0.$$

16. В октябре 2027 года планируется взять кредит в банке на 7 лет в размере 4350 тыс. руб. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по сентябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в октябре каждого из годов с 2028 по 2032 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с октябрём предыдущего года;
 - в 2033 и 2034 годах выплаты по кредиту равны;
 - к октябрю 2034 года кредит должен быть погашен полностью.
- Известно, общая сумма выплат по кредиту составит 6025 тысяч рублей. Сколько рублей составит выплата 2031 года?

17. Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90^\circ$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC .

б) Найдите CN , если $BC = 2$, $AC = 4$, $CM = 1$.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + a}$$

имеет ровно один отрицательный корень.

19. Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?