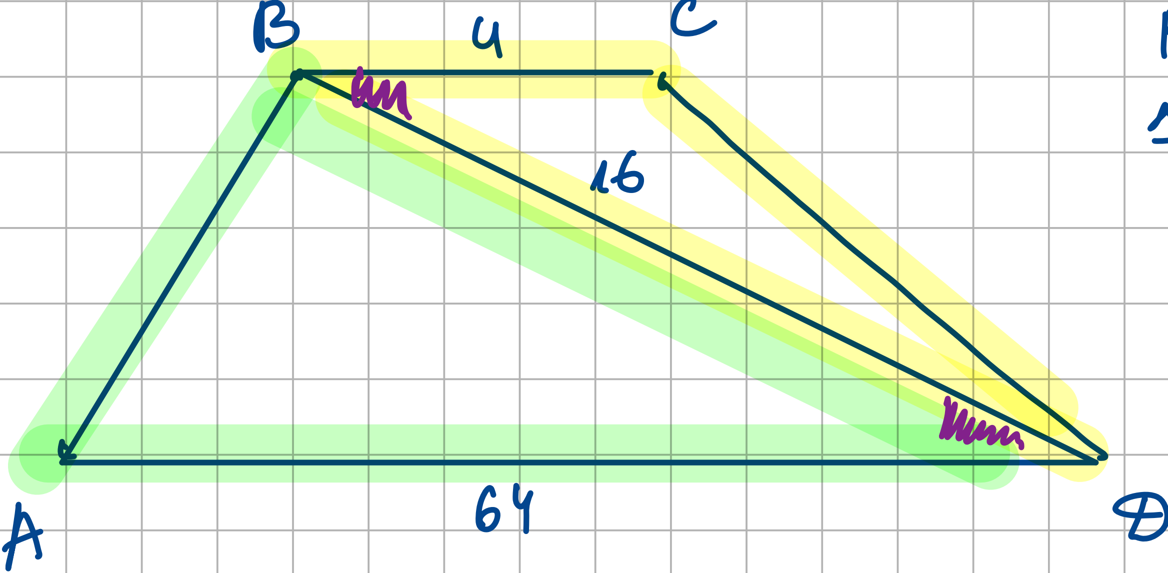
Щелчок. Задача на доказательство №24. 07.06

1 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Щелчок. Задача на доказательство №24. 07.06

1 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Рассм. $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$:

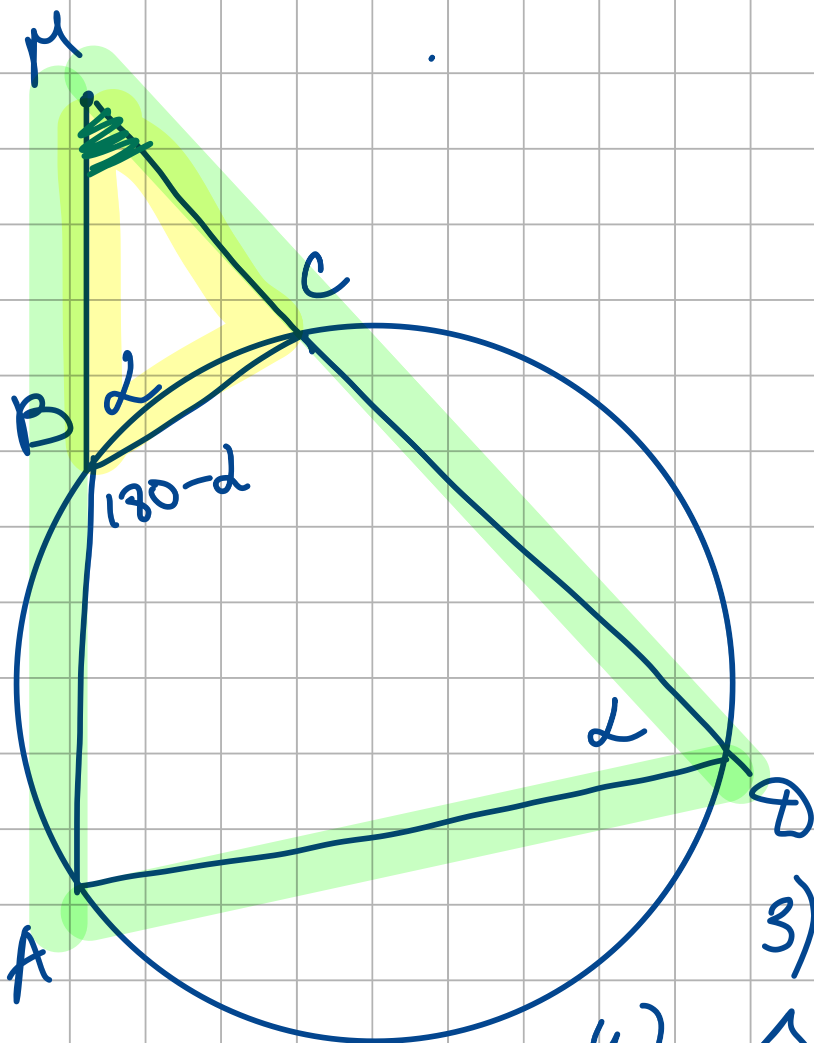
а) $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест леж. при $BC \parallel AD$ (основ. трап) и сек BD.

б) $\dfrac{CB}{BD} = \dfrac{BD}{AD}$ $\left(\dfrac{4}{16} = \dfrac{16}{64}\right)$

$\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$

$\triangle CBD \sim \triangle BDA$ по 2ум пропорц. сторон и $\angle$ м/ду ними.

2 Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.



1) Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда
т.к. чуг $ADCB$ вписанный,
то $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 180 - \alpha$

2) $\angle MBC$ и $\angle ABC$ – смеж.
$\Rightarrow \angle MBC + \angle ABC = 180^\circ$
$\Downarrow$
$\angle MBC = 180 - (180 - \alpha) =$
$= 180 - 180 + \alpha = \alpha$

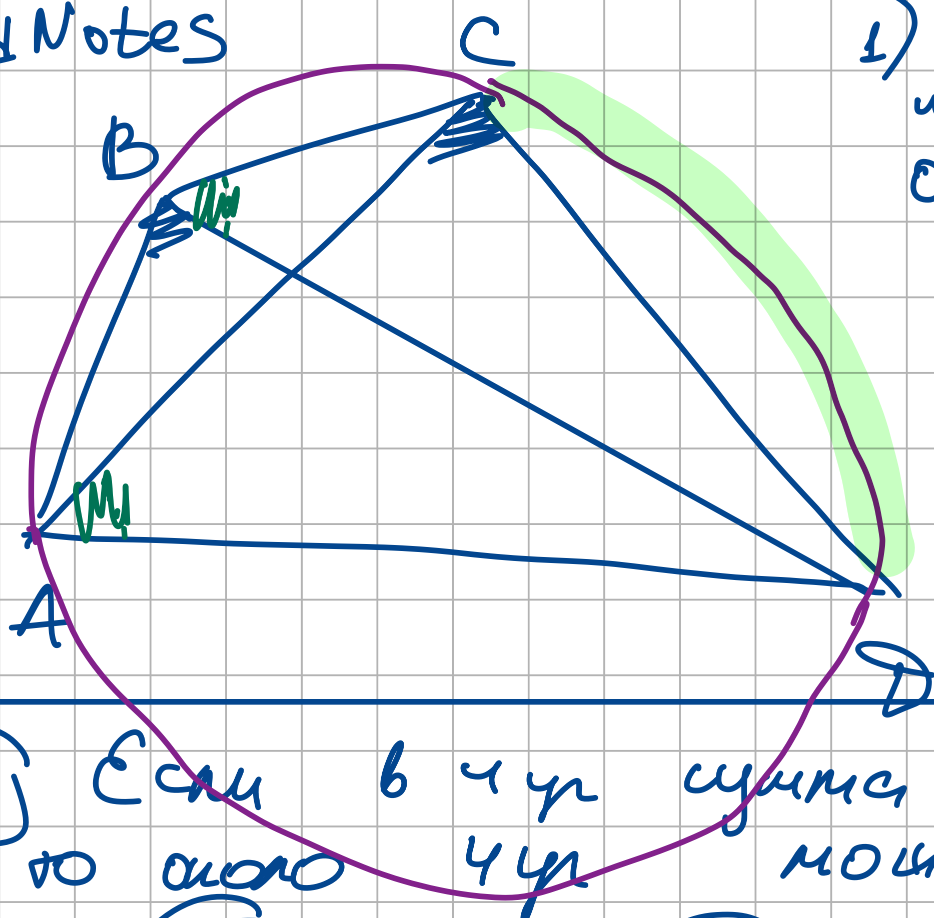
3) Итак, $\angle MBC = \angle ADC = \alpha$

4) $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ по 2ум $\angle$
а) $\angle MBC = \angle ADC = \alpha$
б) $\angle M$ – общ.

ч.т.д.

3 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

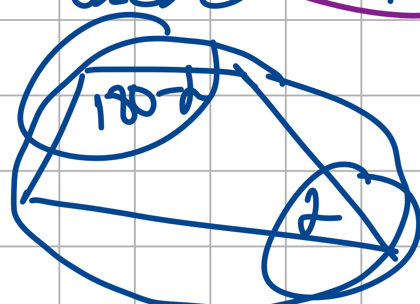
GoodNotes



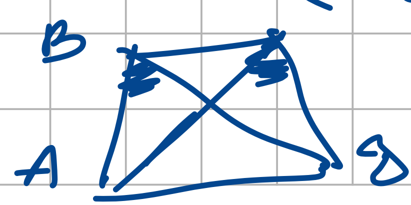
1) $\angle ABD = \angle ACD$ по усл. и они опир. на один отрезок AD $\Rightarrow$ около 4уг $ABCD$ можно опис. окр.

2) $\angle CBD = \angle CAD$, т.к. они впис. и опир. на 1 дугу $\cup CD$.

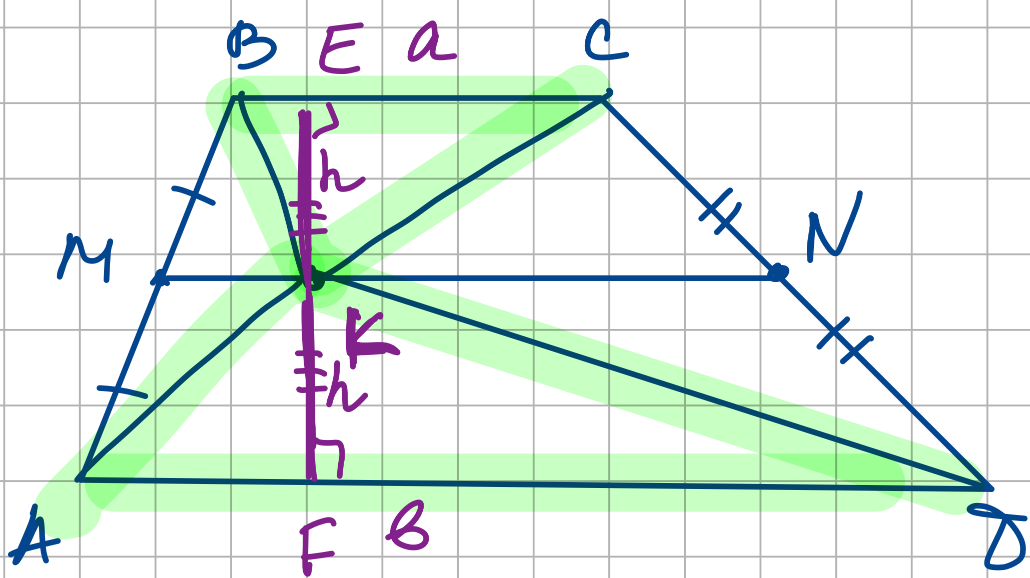
I) Если в 4уг сумма прот. углов $= 180°$, то около 4уг можно опис. окр.



II) Если в 4уг 2 угла, опирающ. на один отрезок, равны, то около с 4уг. можно опис. окр.



4 На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.



$S_{BKC} + S_{AKD} = \frac{1}{2} S_{тр}$

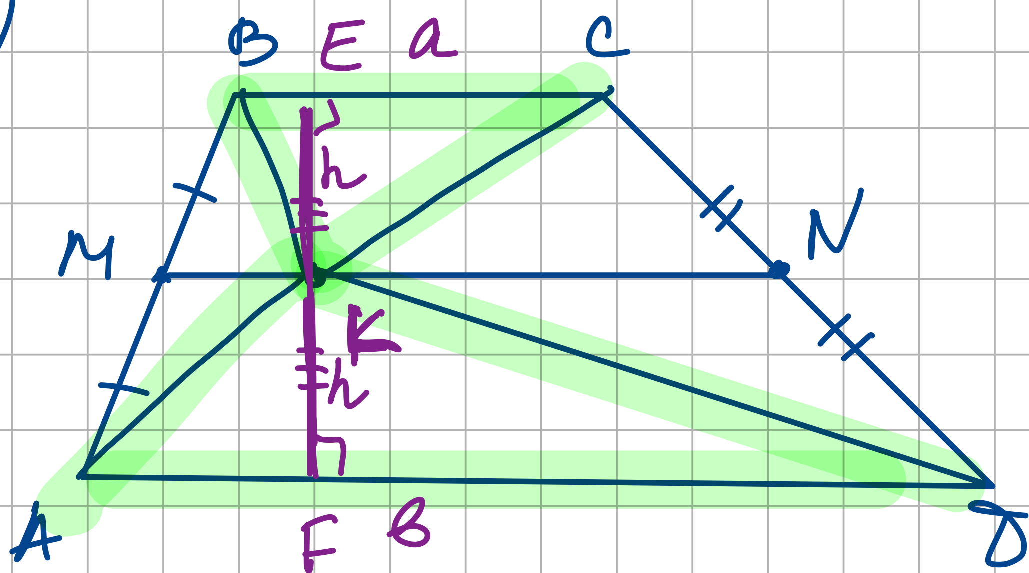
1) Пусть M – сер. AB
N – сер. CD, тогда
MN – ср. лин. трап.
По усл. $K \in MN$

2) Проведём высоту EF трап., прох. ч/з т. к. $\Rightarrow EF \perp BC$ и $EF \perp AD$ (т. к. $BC \parallel AD$)

3) Пусть $BC = a$; $AD = в$

4) по теор. Фалеса для прямых AB и EF, которые пересек. $\parallel$ прямыми BC; MN и AD ($MN \parallel BC \parallel AD$ как ср. л) $\Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{EK}{KF}$, но
M – сер $AB \Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{EK}{KF} = \frac{1}{1} \Rightarrow EK = KF = h$

5)



$S_{BKC} + S_{AKD} =$

$= \frac{1}{2} BC \cdot KE +$

$+ \frac{1}{2} AD \cdot KF =$

$= \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h =$

$= h\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) =$

$= \frac{a+b}{2} \cdot h$

6) $S_{тр} = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF =$

$= \frac{a+b}{2} \cdot 2h = (a+b) \cdot h$

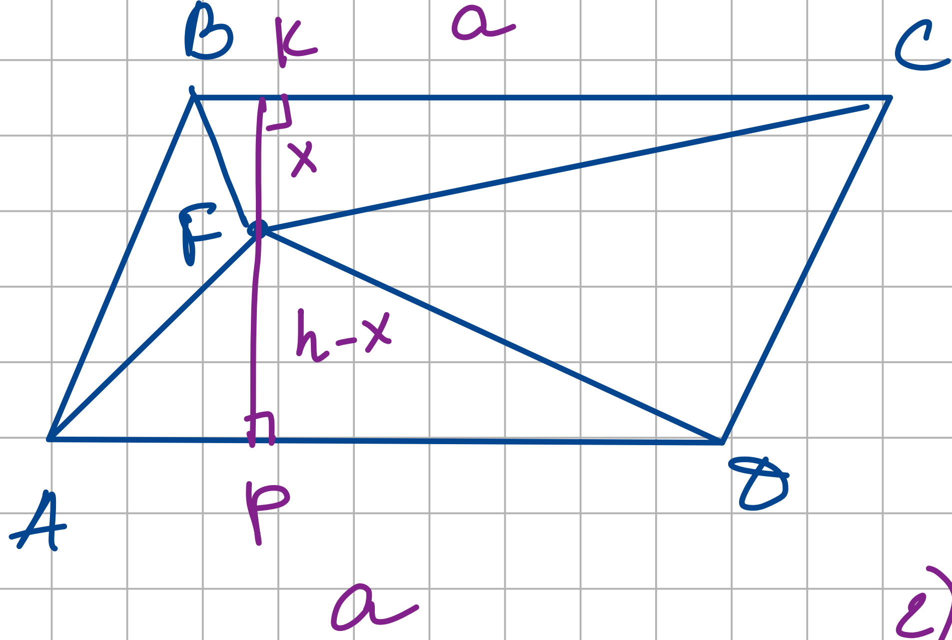
7) $S_{BKC} + S_{AKD} = \frac{a+b}{2} h$

$S_{тр} = (a+b)h$

$\Rightarrow S_{BKC} + S_{AKD} = \frac{1}{2} S_{тр}$

$\blacksquare$

6 Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.



$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} S_{пар}$

1) Пров. выс. пар-ма KP, прох. ч/з т. F

$KP \perp BC$ и $KP \perp AD$
$(BC \parallel AD)$

2) Пусть $AD = BC = a$
(как прот. стор. пар)

Пусть $KP = h$; $KF = x$, тогда $FP = KP - KF = h - x$

3) $S_{пар} = AD \cdot KP = a \cdot h$

$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} BC \cdot FK + \frac{1}{2} AD \cdot FP =$

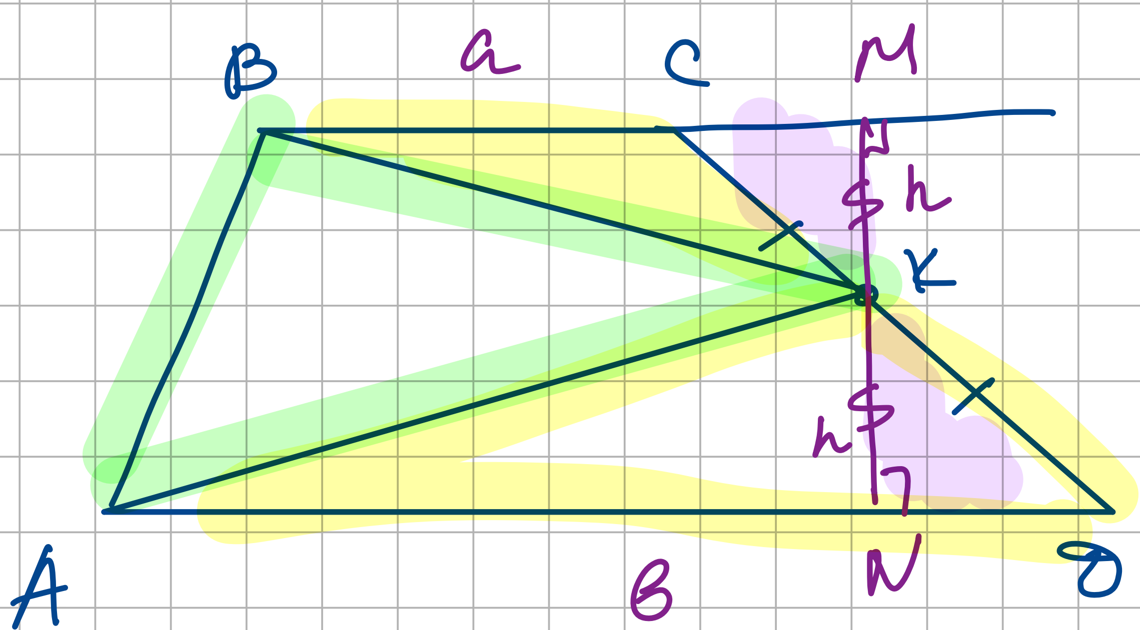
$= \frac{1}{2} a \cdot x + \frac{1}{2} a \cdot (h - x) = \frac{1}{2} \cancel{ax} + \frac{1}{2} ah - \cancel{\frac{1}{2} ax} =$

$= \frac{1}{2} ah$

4) Итак, $S_{пар} = ah$

$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} ah$ $\Rightarrow$ $S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} S_{пар}$

7 Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.



$S_{KAB} = \frac{1}{2} S_{тр}$

1) пров. высоту трап. MN ч/з т. K

MN ⊥ BC и
MN ⊥ AD

2) п/уг $\triangle CMK = \triangle DNK$
по гип. и остр. ∠
($CK = KD$ по усл; $\angle CKM = \angle DKN$ верт)

⇓

$KM = KN = h$

3) пусть $BC = a$; $AD = \text{в}$

$S_{BCK} + S_{AKD} = \frac{1}{2} BC \cdot KM + \frac{1}{2} AD \cdot KN = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} \text{в}h =$

$= \frac{a+\text{в}}{2} h$

$S_{тр} = \frac{BC+AD}{2} \cdot MN = \frac{a+\text{в}}{2} \cdot 2h = (a+\text{в})h$

4) Итак, $S_{BCK} + S_{AKD} = \frac{a+b}{2}h$ $\Rightarrow$ $S_{BCK} + S_{AKD} = \frac{1}{2} S_{тр}$

$S_{тр} = (a+b)h$

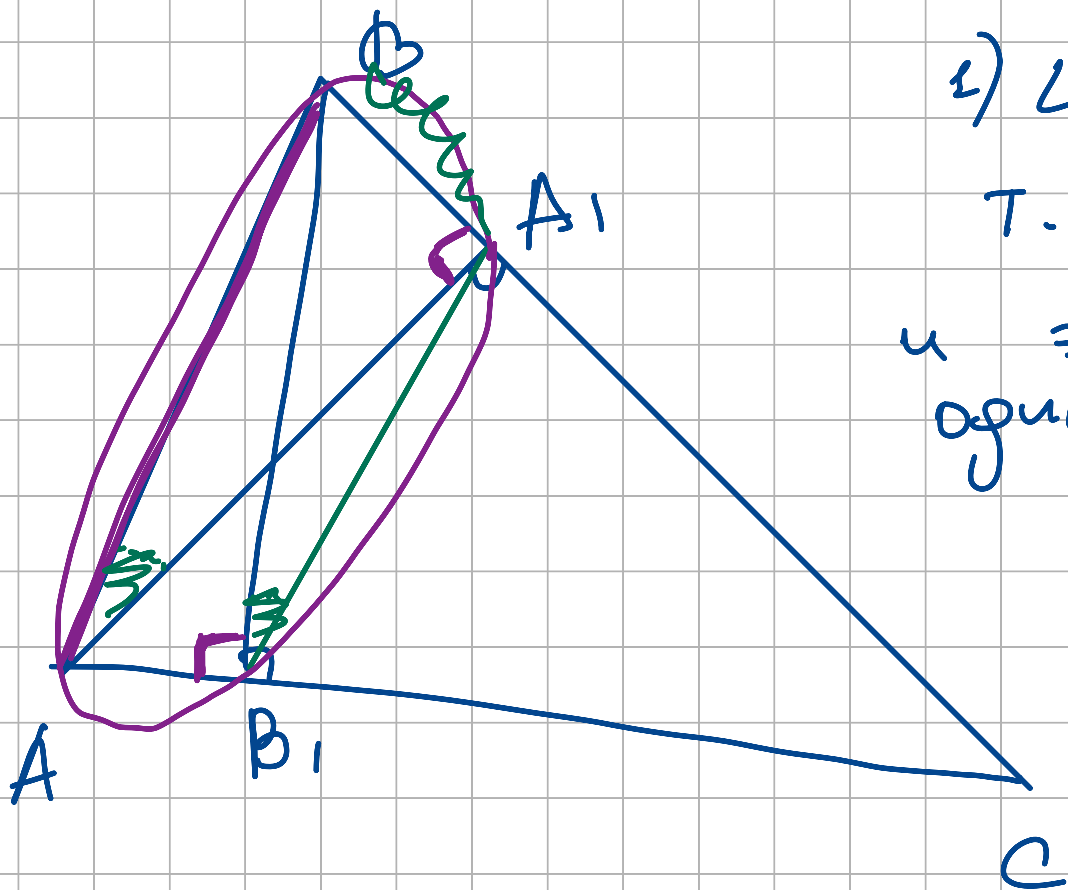
5) $\underbrace{S_{BCK} + S_{AKD}}_{\frac{1}{2} S_{тр}} + S_{BKA} = S_{тр}$

$$\Downarrow$$

$\underline{S_{BKA} =} \; S_{тр} - \frac{1}{2} S_{тр} = \underline{\frac{1}{2} S_{тр}}$

$\blacksquare$

8 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.



1) $\angle AA_1B = \angle BB_1A = 90°$,

т.к. AA_1 и BB_1 - высоты

и эти углы опир. на один отр AB

$\Downarrow$

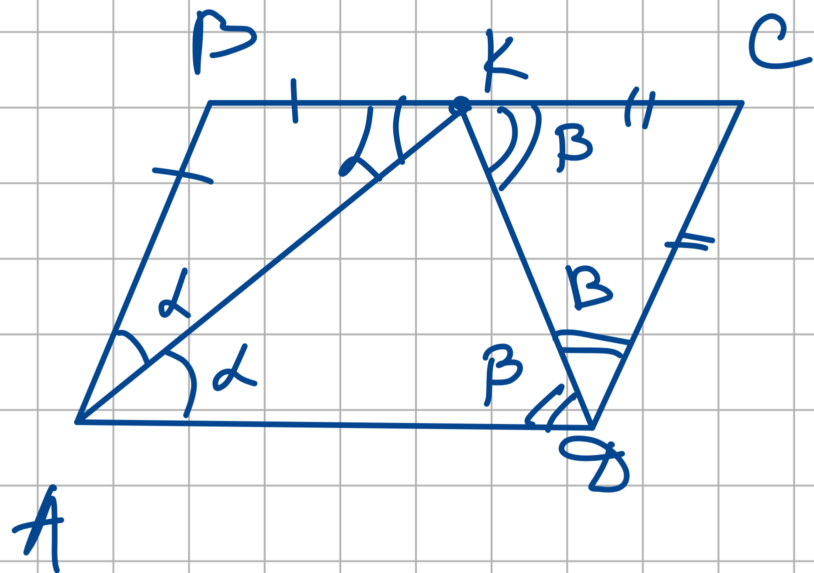
около чуг ABA_1B_1 можно опис. окр.

2) $\Downarrow$

$\angle BAA_1 = \angle BB_1A_1$

как впис, опир. на одну дугу $\cup A_1B$

9 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K середина BC.



1) AK – бисс $\angle A \Rightarrow \angle BAK = \angle KAD = \alpha$

$\angle BKA = \angle KAD = \alpha$ как н/л при $BC \parallel AD$ (т.к. для пар) и сек AK

Итак, $\angle BAK = \angle BKA = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow ABK$ – р/б $\Rightarrow AB = BK$

2) DK – бисс. $\angle D \Rightarrow \angle ADK = \angle KDC = \beta$

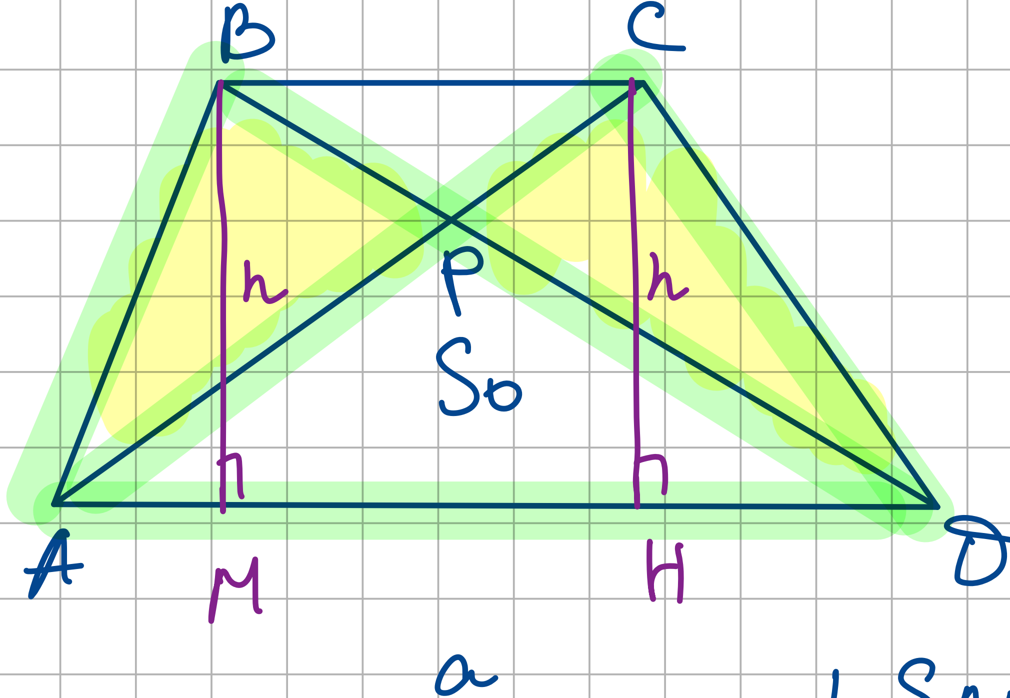
$\angle CKD = \angle KDA = \beta$ как н/л при $BC \parallel AD$ и сек. KD

Итак, $\angle CKD = \angle CDK = \beta \Rightarrow \triangle KCD$ – р/б $\Rightarrow$ $KC = CD$

3) $AB = BK$ (п.1); $AB = CD$ как прот. стор. пар
$KC = CD$ (п.2)

$\Rightarrow BK = KC \Rightarrow$
$\Rightarrow K$ – сер.

10 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.



1) пров. выс. BM и CH трап. $ABCD$
$BM = CH = h$ как расст. м/ду ∥ прям. BC и AD ($BC \parallel AD$, т.к. это осн. трап.)

2) пусть $AD = a$

$$\begin{cases} S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BM = \frac{1}{2} a \cdot h \\ S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CH = \frac{1}{2} a \cdot h \end{cases}$$

$\Downarrow$

$S_{ABD} = S_{ACD} = S$

3) пусть $S_{APD} = S_0$,

тогда

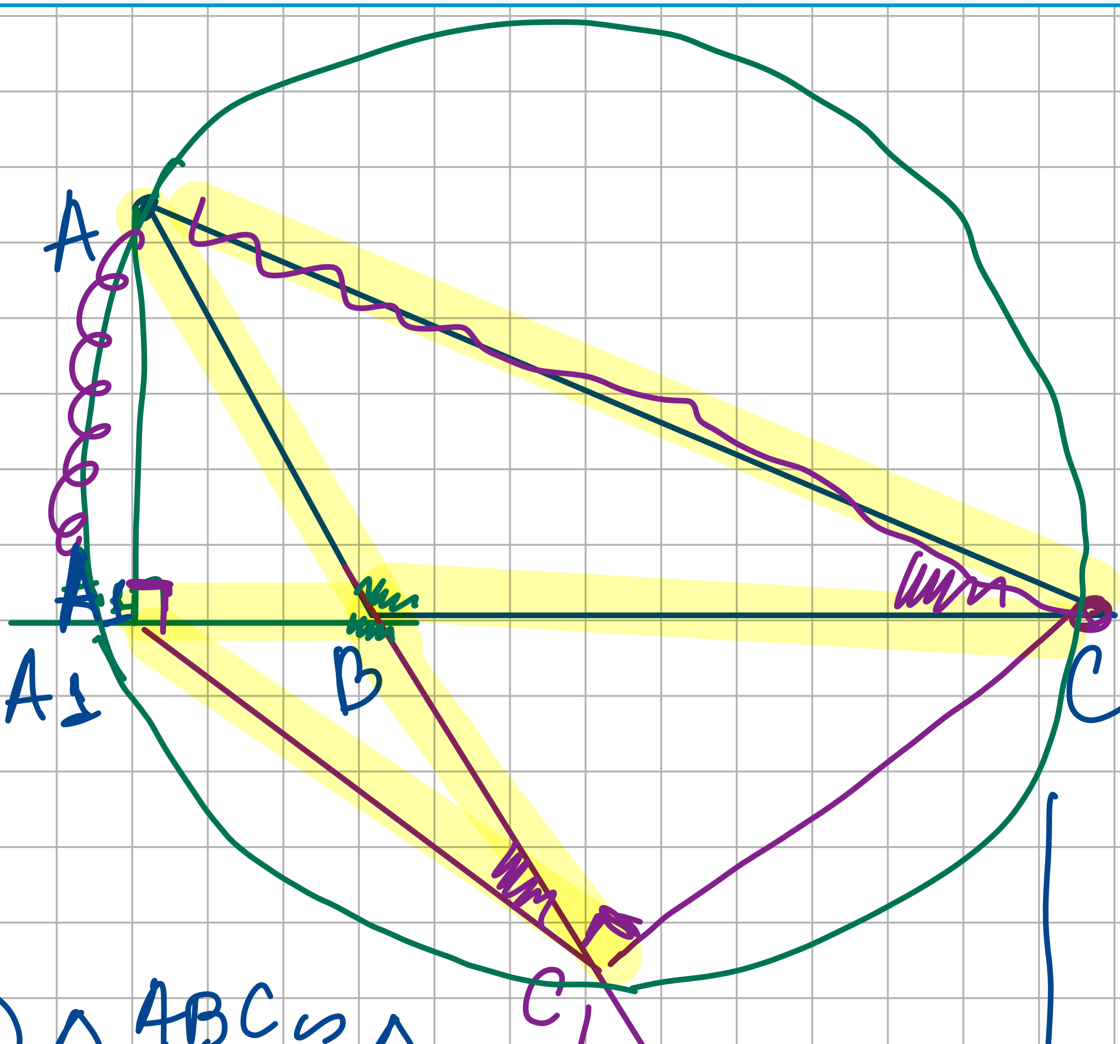
$S_{ABP} = S_{ABD} - S_{APD} = S - S_0$

$S_{CPD} = S_{ACD} - S_{APD} = S - S_0$

$\Longrightarrow S_{ABP} = S_{CPD}$

ч.т.д.

11 В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.



1) $\angle AA_1C = \angle CC_1A = 90^\circ$, т.к. AA_1 и CC_1 – высоты.

и эти углы опир. на один отр. AC $\Rightarrow$ около чет ACC_1A_1 можно опис. окр.

$\Downarrow$

$\angle AC_1A_1 = \angle ACA_1$, как впис, опир. на одну дугу AA_1

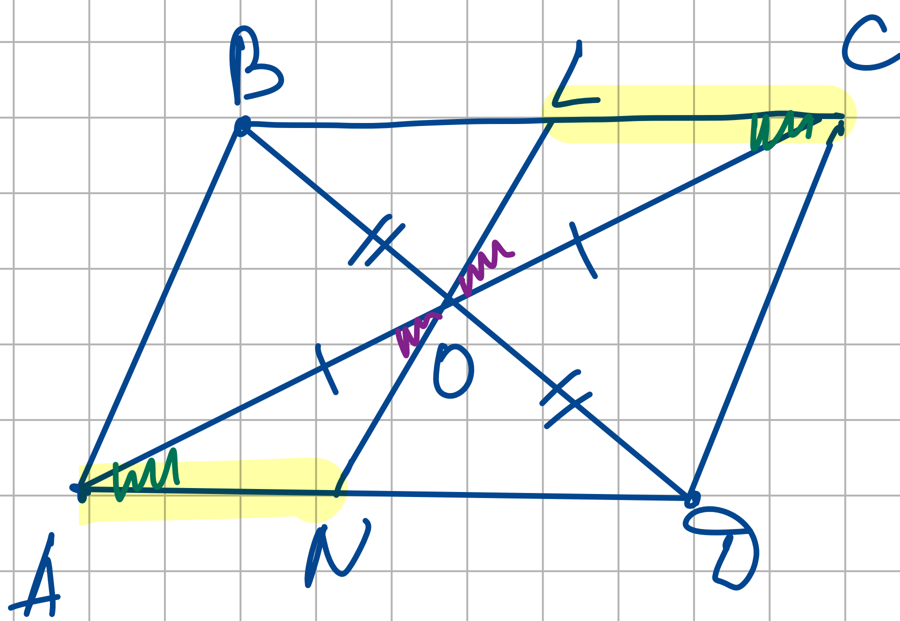
2) $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ по 2 ум $\angle$:

$\angle A_1BC_1 = \angle ABC$ (верт)

$\angle A_1C_1B = \angle BCA$ из п. 1

☒

12 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.



1) Диаг пар-ма т. пересеч. дел. пополам $\Rightarrow AO = OC$

2) Рассм. $\triangle AON$ и $\triangle COL$

а) $AO = OC$ из п. 1

б) $\angle AON = \angle COL$ (верт)

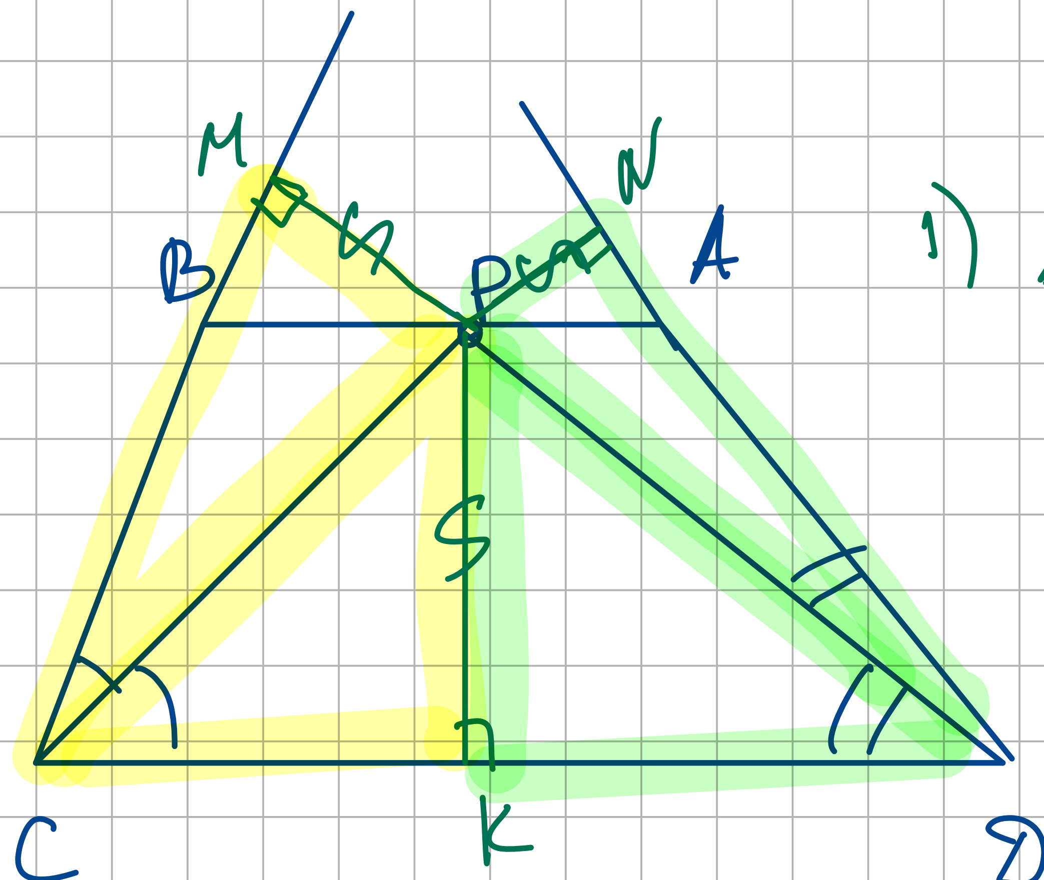
в) $\angle LCO = \angle NAO$ как н/л при $BC \parallel AD$ (т.к. дан пар-м) и сек. AC

$\Downarrow$

$\triangle AON = \triangle COL$ по стор. и 2ум прил. к ней углам

$LC = AN$ $\Leftarrow$ как соотв эл-ты равн. $\triangle$.

13 Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.



1) $\Delta CPM = \Delta CPK$

по гип. и остр $\angle$

$\Downarrow$

$PM = PK$

2) $\Delta KPD = \Delta NPD$

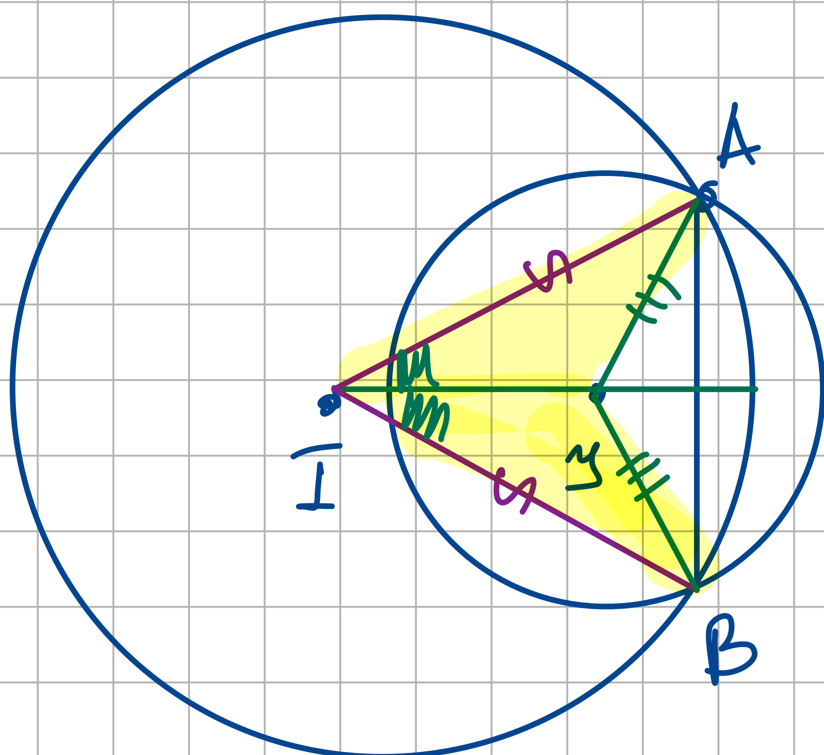
по гип. и остр. $\angle$

$\Downarrow$

$PK = PN$

Из 1 и 2 $\Rightarrow$ $PM = PN = PK$

14 Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.



1) пров. рад. IA и IB $\quad IA = IB = R$

2) пров. рад. JA и JB $\quad JA = JB = r$

3) Рассм $\triangle IJA$ и $\triangle IJB$

•) IJ – общ. ст
••) $IB = IA = R$
•••) $JA = JB = r$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle IJA = \triangle IJB$ по 3-м стор

$\Downarrow$

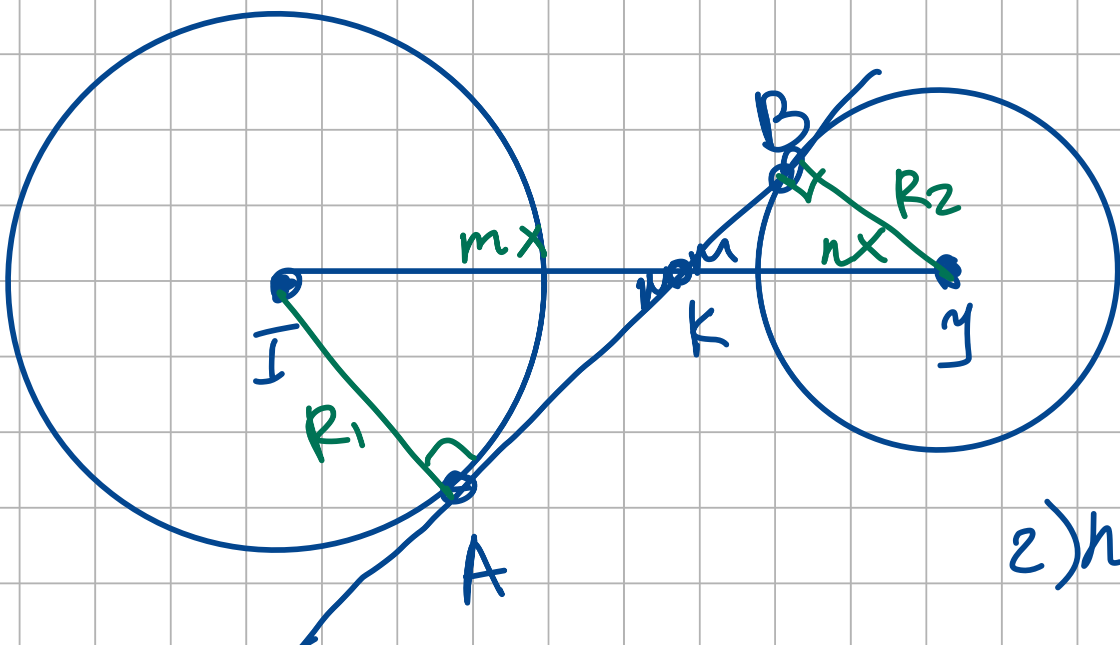
$\angle AIJ = \angle BIJ$ как соотв $\angle$ в равн. $\triangle$

$\Downarrow$

IJ – бисс. в р/б $\triangle AIB$ $(IA = IB = R)$

$\Rightarrow IJ$ и выс. $\Rightarrow IJ \perp AB$.

15 Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.



1) Пусть A и B — точки кас. с окр-ми.

$AB \cap IJ = K$

по усл. $\frac{IK}{KJ} = \frac{m}{n}$

2) Пров. рад IA и JB

$IA \perp AB$, $JB \perp AB$ | радиус, пров. в т. кас., $\perp$ касат.

3) $\triangle IKA \sim \triangle JKB$ по 2ум $\angle$

- $\angle IKA = \angle JKB$ (верт)
- $\angle IAK = \angle KBJ = 90^\circ$ из п. 2

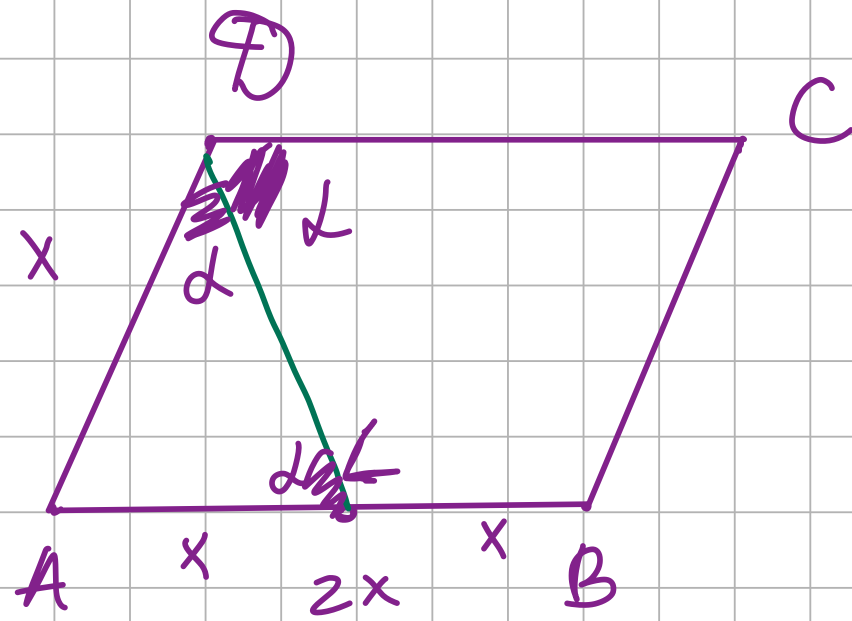
$$\frac{IA}{BJ} = \frac{IK}{KJ} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{IA}{BJ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{m}{n}$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m}{n}}$$

16 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что DL биссектриса угла ADC.



1) Т.к. AB вдвое больше, чем AD, то пусть $AD = x$, тогда $AB = 2x$

2) Т.к L – сер. AB, то $AL = LB = \frac{AB}{2} = \frac{2x}{2} = x$

3) рассм $\triangle ADL$
$AD = AL = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADL$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADL = \angle ALD = \alpha$

4) $\angle CDL = \angle DLA$ как н/л при $DC \parallel AB$ и сек. DL

5) Итак, $\angle ADL = \angle LDC = \alpha \Rightarrow DL$ – бисс. $\angle D$.