Содержание

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

1 Формулы сокращённого умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Примечание: с большой вероятностью формулы (4-7) нам в этом задании не понадобятся.

2 Свойства корней

Определение. Арифметическим квадратным корнем (далее просто "квадратный корень") из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a. Иными словами, $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a, \\ b \geq 0. \end{cases}$

▶ **Пример.**
$\sqrt{36} = 6$, т.к. $6^2 = 36$ и 6 - неотрицательное число.

Свойства квадратного корня

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, при $a \geq 0, \quad b \geq 0$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, при $a \geq 0, \quad b > 0$
3. $\sqrt{a^2} = |a|$
4. $(\sqrt{a})^2 = a$, при $a \geq 0$

Зададимся вопросом: Почему $\sqrt{a^2} = |a|$, а $(\sqrt{a})^2 = a$?
Иначе говоря, почему в одном случае у нас появляется модуль, а в другом случае нет?
В первом случае a может принимать любые значения, в том числе и отрицательные. Тогда при возведении в квадрат у нас пропадет этот знак (если он был), то есть $a^2 \geq 0$ при любом значении a. При извлечении корня у нас должно получаться строго неотрицательное число и мы его получаем с помощью модуля.

▶ **Пример.**
При $a = -5$ получаем $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$

Во втором случае мы извлекаем корень уже из числа a, поэтому, чтобы корень существовал, надо, чтобы именно число a было неотрицательным ($a \geq 0$). Поскольку a будет принимать здесь только неотрицательные значения, то нам модуль для снятия возможного знака числа a уже не нужен.

▶ **Пример.**
При $a = 49$ получаем $(\sqrt{49})^2 = 7^2 = 49$

> **Определение.** Кубическим корнем числа a называется такое число b, куб которого равен a. Иными словами, $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$.

▶ **Пример.**
$\sqrt[3]{-125} = -5$, т.к. $(-5)^3 = -125$.

В отличие от квадратного корня, здесь никаких ограничений на значения a и b не ставится, так как, во-первых, результат возведения в куб может быть и отрицательным числом, а во-вторых, результат возведения в куб может получаться только единственным образом, то есть значение a соответствует единственному значению b.

▶ **Пример.**
$36 = 6^2 = (-6)^2$
Видим, что чтобы получить число 36 мы можем возвести в квадрат как число 6, так и число (-6). Значит, нам надо определяться, какое из них считать "квадратным корнем".
$-216 = (-6)^3$
При возведении в куб отрицательного числа получается тоже отрицательное число. Число 216 тоже можно получить только возведя в третью степень число 6. Поэтому и дополнительные условия при извлечении кубического корня не нужны.

Свойства кубического корня

1. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
2. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (при $b \neq 0$)
3. $\sqrt[3]{a^3} = a$
4. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

> **Определение.** Корнем степени n из неотрицательного числа a (при условии, что n - натуральное четное число!) называется такое неотрицательное число b, которое при возведении в степень n дает число a. То есть, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a, \\ n = 2k, k \in N \\ b \geq 0. \end{cases}$

▶ **Пример.**
$\sqrt[6]{64} = 2$, так как $2^6 = 64$ и 2 - неотрицательное число

Определение. Корнем степени n из числа a (при условии, что n - натуральное нечетное число!) называется такое число b, которое при возведении в степень n дает число a. То есть, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a, \\ n = 2k+1, k \in N \end{cases}$

► **Пример.**

$\sqrt[5]{-243} = -3$, так как $(-3)^5 = -243$

Чтобы понять, есть у нас ограничения на числа a и b, необходимо посмотреть на четность числа n. Это объясняется тем, что, во-первых, при возведении числа в четную степень результат может быть только неотрицательным, а при возведении в нечетную степень результат может иметь любой знак и ограничения ставить не нужно. Поэтому извлекать корни четных степеней мы можем только из неотрицательных чисел, а корни нечетных степеней - из любых. При этом, извлекая корень четной степени мы по определению получаем именно неотрицательное число, поэтому на b тоже накладываются ограничения.

Свойства корня положительной четной степени n

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$
4. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Свойства корня положительной нечетной степени n

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$

3 Свойства степеней

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

   ► **Пример.**

   $3^{x+5} = 3^7 \Leftrightarrow x + 5 = 7 \Leftrightarrow x = 2$

7. $a^{f(x)} = c \cdot b^{f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = c \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = c$

   ► **Пример.**

   $$30^{x+1} = 9 \cdot 10^{x+1} \Leftrightarrow \frac{30^{x+1}}{10^{x+1}} = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{30}{10}\right)^{x+1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 9 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

4 Логарифмы их свойства

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Для начала дадим определение логарифма.

> **Определение.** Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$ называется такое число c, что $a^c = b$.Для обозначения логарифма положительного числа b по основанию a используют запись $\log_a b = c$.
>
> В записи $\log_a b$ первое число (число a) называется **основанием** и показывает, какое число будет возводиться в степень.
>
> Число b показывает, какой результат мы должны получить после возведения в степень. Тогда логарифм показывает в какую степень мы будем возводить число a, чтобы получить b.
>
> Запись $\log_a b$ читается как *логарифм числа b по основанию a*.

► **Пример 1.** $\log_3 5$ - логарифм числа 5 по основанию 3.

► **Пример 2.** $\log_{\frac{1}{2}} 16$ - логарифм числа 16 по основанию $\frac{1}{2}$.

▶ **Примеры.** Вычислить:

1. $\log_3 9 = 2$, так как $3^2 = 9$. Действительно, 2 это степень, в которую нужно возвести 3, чтобы получить 9.

2. $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$. Действительно, 3 это степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить 8.

3. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Действительно, 4 это степень в которую нужно возвести $\frac{1}{2}$, чтобы получить $\frac{1}{16}$.

> **Определение.** Логарифм по основанию 10 называется *десятичным логарифмом.* Вместо записи $\log_{10} a$ обычно используется обозначение $\lg a$. Обозначение: $\lg x = \log_{10} x$.

▶ **Примеры.** Вычислить: $\lg 100 = 2$, $\quad \lg 10^{13} = 13$, $\quad \lg 0{,}1 = -1$

> **Определение.** Натуральный логарифм – это логарифм по основанию e. Обозначение: $\ln x = \log_e x$.

▶ **Примеры.** Вычислить $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

Замечание: В записи $\ln x$ буква l - логарифм, а буква n - натуральный

В дальнейшем, если нам встретится выражение $\log_a b$, то мы сразу можем сказать, что b и a – это положительные числа и $a \neq 1$.

Откуда берутся ограничения в логарифме?

Зададимся вопросом: "чему может быть равен $\log_1 2$?"

Это степень в которую нужно возвести 1, чтобы получить 2. Но 1 любой степени это 1. Поэтому 2 мы никогда не получим. Поэтому $\log_1 2$ не имеет смысла. Поэтому $\boldsymbol{a \neq 1}$.

Мы можем возводить в произвольную степень только положительные числа. Поэтому основание логарифма $\boldsymbol{a > 0}$

Из определения $b = a^c$. Значит, b это результат возведение неотрицательного числа a в степень c. Поэтому $\boldsymbol{b > 0}$.

Подробнее узнать об этом вы сможете в видео в начале параграфа.

Свойства логарифмов

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $\log_a a^k = k$
3. $\log_a b^m = m \log_a b$
4. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b$
5. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
6. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
7. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
8. $\dfrac{\log_d b}{\log_d a} = \log_a b$
9. $\log_d b = \dfrac{1}{\log_b d}$
10. $\log_a b \cdot \log_d a = \log_d b$

*выполняются для положительного и не равного 1 a и положительных b и c

5 Модуль числа

Определение.

$$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

1. $|a| \geqslant 0$
2. $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a| = |-a|$
5. $a^2 = |a|^2 = |a^2|$

Важные для нас следствия из свойств:

Следствие 1.

$$|a - b| = |b - a|$$

Действительно: $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$

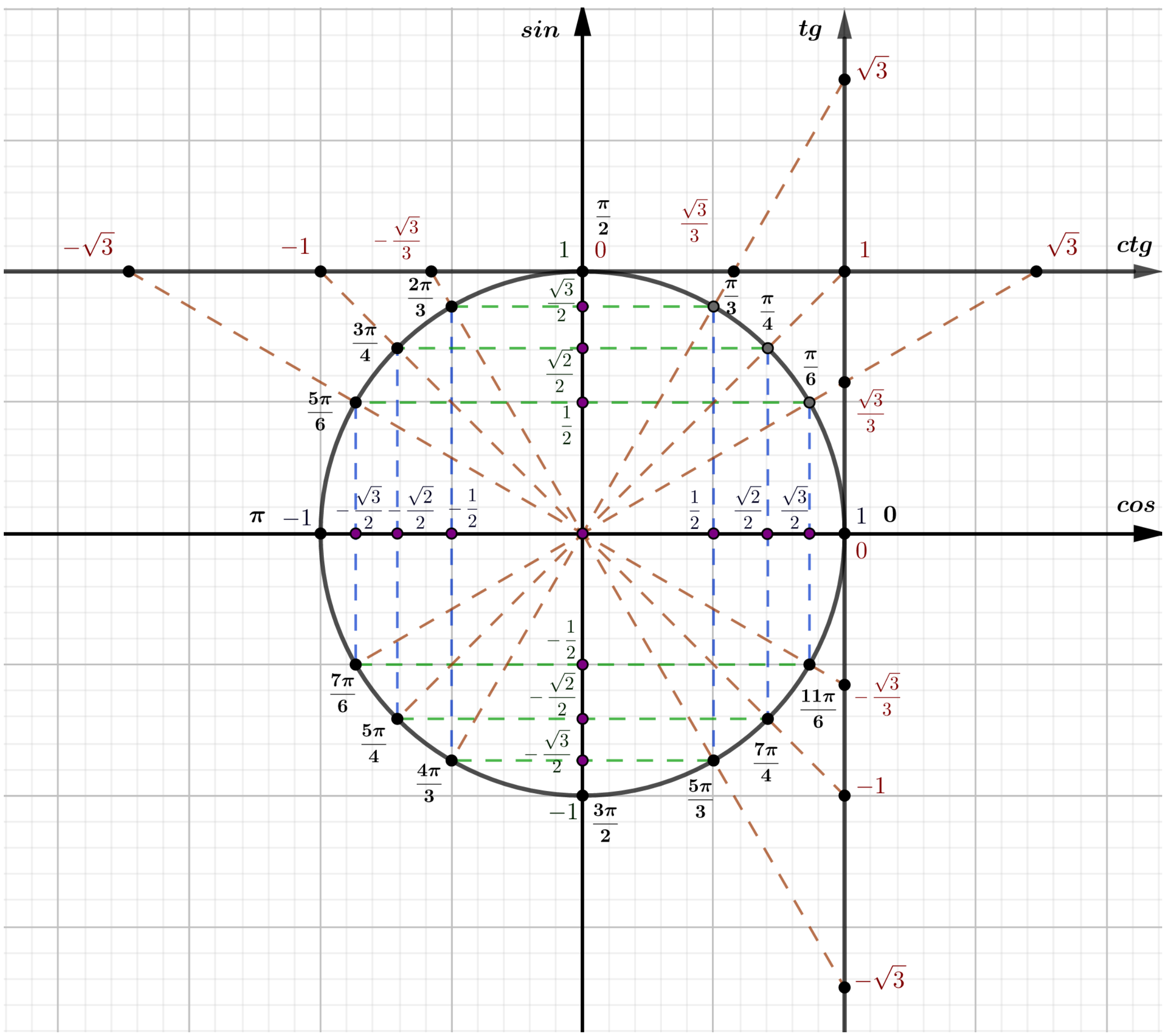
Следствие 2.

$$(a - b)^2 = |(a - b)^2| = |a - b|^2$$

Этот переход пригодится нам при решении уравнений и неравенств с модулем с помощью замены переменной.

6 Тригонометрические формулы

$\Longrightarrow$ **Тригонометрическая окружность**



Тригонометрические тождества

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
3. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
4. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$
5. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi l \quad (l \in \mathbb{Z})$
6. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \dfrac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$

Формулы приведения:

$\Longrightarrow$ **Теория и пример решения**

Формулы сложения и вычитания

1. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
2. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$
4. $\cos(x-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

Формулы двойного угла

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
4. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Формулы понижения степени

1. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
2. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

7 Задачи №6

7.1 Рациональные выражения

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25{,}6$.

2. Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{7}-1{,}2\right)\cdot 5\frac{5}{6}$.

3. Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{7}-2{,}5\right):\frac{1}{70}$.

4. Найдите значение выражения $4\frac{4}{9}:\frac{4}{9}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{1{,}23\cdot 45{,}7}{12{,}3\cdot 0{,}457}$.

6. Найдите значение выражения $(7x-13)(7x+13)-49x^2+6x+22$ при $x=80$.

7. Найдите значение выражения $\frac{9x^2-4}{3x+2}-3x$.

8. Найдите значение выражения $\frac{(11a)^2-11a}{11a^2-a}$.

9. Найдите значение выражения $\left(4x^2+y^2-(2x-y)^2\right):(2xy)$.

10. Найдите значение выражения $\left((3x+2y)^2-9x^2-4y^2\right):(6xy)$.

11. Найдите значение выражения $\left((4x-3y)^2-(4x+3y)^2\right):(4xy)$.

12. Найдите значение выражения $(2x-5)(2x+5)-4x^2$.

13. Найдите значение выражения $(9axy-(-7xya)):(4yax)$.

14. Найдите значение выражения $(432^2-568^2):1000$.

    Подсказка

15. Найдите значение выражения $(4a^2-9)\cdot\left(\frac{1}{2a-3}-\frac{1}{2a+3}\right)$.

    Подсказка

16. Найдите значение выражения $a(36a^2-25)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right)$ при $a=36{,}7$.

    Подсказка

17. Найдите значение выражения $(9b^2-49)\left(\frac{1}{3b-7}-\frac{1}{3b+7}\right)+b-13$ при $b=345$.

    Подсказка

18. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+5b}{5a+2b}=1$.

Подсказка

19. Найдите $61a-11b+50$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$.

Подсказка

20. Найдите $\frac{a+9b+16}{a+3b+8}$, если $\frac{a}{b}=3$.

Подсказка

21. Найдите значение выражения $3p(a)-6a+7$, если $p(a)=2a-3$.

Подсказка

22. Найдите значение выражения $q(b-2)-q(b+2)$, если $q(b)=3b$.

Подсказка

23. Найдите значение выражения $5(p(2x)-2p(x+5))$, если $p(x)=x-10$.

Подсказка

24. Найдите $p(x-7)+p(13-x)$, если $p(x)=2x+1$.

Подсказка

25. Найдите $2p(x-7)-p(2x)$, если $p(x)=x-3$.

Подсказка

26. Найдите $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b)=\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)$. При $b\neq 0$.

Подсказка

27. Найдите $p(x)+p(6-x)$, если $p(x)=\frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x\neq 3$.

Подсказка

28. Найдите значение выражения $2x+y+6z$, если $4x+y=5$, $12z+y=7$.

Подсказка

29. Найдите значение выражения $25x-30z$, если $5x+y=5$, $6z+y=7$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Разбор задач 28 и 29**

7.2 Иррациональные выражения

1. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$.

   Подсказка

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$.

3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2-56^2}$.

   Подсказка

   $\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}$.

   Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

8. Найдите значение выражения $\dfrac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + \dfrac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 4$ при $x = 3$.

Подсказка

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\dfrac{3}{28}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

10. Найдите значение выражения $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x \leq 2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

11. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \le a \le 10$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

12. Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

13. Найдите $h(5+x)+h(5-x)$, если $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

$\Longrightarrow$ **Разбор задач 11 и 12**

7.3 Действия со степенями

1. Найдите значение выражения $(7x^3)^2 : (7x^6)$.
2. Найдите значение выражения $(4a)^3 : a^7 \cdot a^4$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$ при $a = 12$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,33}}{a^{2,11} \cdot a^{2,22}}$ при $a = \dfrac{2}{7}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $a^{0,65} \cdot a^{0,67} \cdot a^{0,68}$ при $a = 11$.
6. Найдите значение выражения $\dfrac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n > 0$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7. Найдите значение выражения $\dfrac{n^{\frac{5}{6}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n = 64$.

8. Найдите значение выражения $3^{\sqrt{5}+10} \cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

9. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-5} \cdot x^{8}}{x}$ при $x = 4$.

10. Найдите значение выражения $b^5 : b^9 \cdot b^6$ при $b = 0{,}01$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

11. Найдите значение выражения $(5^{12})^3 : 5^{37}$.

12. Найдите значение выражения $b^{\frac{1}{5}} \cdot (b^{\frac{9}{10}})^2$ при $b = 7$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

13. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{7{,}4}}{a^{8{,}4}}$ при $a = 0{,}4$.

14. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

15. Найдите значение выражения $5^{3\sqrt{7}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{7}} : 5^{2\sqrt{7}-1}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

16. Найдите значение выражения $\dfrac{b^{3\sqrt{2}+2}}{(b^{\sqrt{2}})^3}$ при $b = 6$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

17. Найдите значение выражения $\dfrac{(b^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}}{b^4}$ при $b = 5$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

18. Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

19. Найдите значение выражения $\dfrac{7\,(m^5)^6 + 11\,(m^3)^{10}}{(3m^{15})^2}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

20. Найдите значение выражения $\dfrac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

21. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \dfrac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

22. Найдите значение выражения $((2x^3)^4 - (x^2)^6) : (3x^{12})$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

23. Найдите значение выражения $18x^7 \cdot x^{13} : (3x^{10})^2$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

24. Найдите значение выражения $(4b)^3 : b^9 \cdot b^5$ при $b = 128$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

25. Найдите значение выражения $6x \cdot \left(3x^{12}\right)^3 : \left(3x^9\right)^4$ при $x = 75$.

26. Найдите значение выражения $\left(49^6\right)^3 : \left(7^7\right)^5$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

27. Найдите значение выражения $\left(2a^3\right)^4 : \left(2a^{11}\right)$ при $a = 11$.

28. Найдите значение выражения $7^{2x-1} : 49^x : x$ при $x = \dfrac{1}{14}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

29. Найдите значение выражения $\dfrac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

30. Найдите значение выражения $\dfrac{(9b)^{1,5} \cdot b^{2,7}}{b^{4,2}}$ при $b > 0$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

31. Найдите значение выражения $\left(11a^6 \cdot b^3 - \left(3a^2b\right)^3\right) : \left(4a^6b^6\right)$ при $b = 2$.

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[3]{7a^2}\right)^6}{a^4}$ при $a \neq 0$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

33. Найдите значение выражения $x \cdot 3^{2x+1} \cdot 9^{-x}$ при $x = 5$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

34. Найдите значение выражения $5^{0{,}36} \cdot 25^{0{,}32}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

35. Найдите значение выражения $\dfrac{3^{6{,}5}}{9^{2{,}25}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

36. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

37. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

38. Найдите значение выражения $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

39. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9}$.

Подсказка

40. Найдите значение выражения $0{,}8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

41. Найдите значение выражения $\dfrac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$.

Подсказка

42. Найдите значение выражения $4^8 \cdot 11^{10} : 44^8$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

43. Найдите значение выражения $2^{3\sqrt{7}-1} \cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

Подсказка

44. Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}5^{\sqrt{10}-1}}{2^{-\sqrt{10}}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

45. Найдите значение выражения $\dfrac{6^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}}$.

Подсказка

46. Найдите значение выражения $5 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

47. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

48. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

49. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

50. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ при $m>0$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

51. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{81\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ при $b > 0$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

52. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{3}a)^2\sqrt[5]{a^3}}{a^{2,6}}$ при $a > 0$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

53. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ при $m > 0$.

Подсказка

54. Найдите значение выражения $\dfrac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}} - 7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ при $a > 0$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

55. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m = 64$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

56. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{a}\,\sqrt[18]{a}}{a\sqrt[6]{a}}$ при $a = 1{,}25$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

57. Найдите значение выражения $\dfrac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 8^x$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7.4 Преобразование логарифмических выражений

1. Найдите значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 4}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\log_5 60 - \log_5 12$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}2 + \log_{0{,}5} 4$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

5. Найдите значение выражения $\log_{0{,}3} 10 - \log_{0{,}3} 3$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

6. Найдите значение выражения $\log_4 \log_5 25$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

7. Найдите значение выражения $\dfrac{24}{3^{\log_3 2}}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

8. Найдите значение выражения $\log_3 8{,}1 + \log_3 10$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

9. Найдите значение выражения $36^{\log_6 5}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

10. Найдите значение выражения $\log_{0{,}25} 2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

11. Найдите значение выражения $\log_4 8$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

12. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

13. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

14. Найдите значение выражения $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

15. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

16. Найдите значение выражения $6\log_7\sqrt[3]{7}$.

Подсказка

17. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[6]{13}}13$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

18. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

19. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}+\log_7 0{,}2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

20. Найдите значение выражения $\log_{0{,}8}3\cdot\log_3 1{,}25$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

21. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 49}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

22. Найдите значение выражения $\log^2_{\sqrt{7}} 49$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

23. Найдите значение выражения $5^{3+\log_5 2}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

24. Найдите значение выражения $8^{2\log_8 3}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

25. Найдите значение выражения $64^{\log_8 \sqrt{3}}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

26. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

27. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

28. Вычислите значение выражения: $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

29. Найдите значение выражения $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

30. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \dfrac{1}{7}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

31. Найдите $\log_a \dfrac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

32. Найдите $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = -2$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

1. Найдите значение выражения $36\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

2. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{7\pi}{3}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

3. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

4. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.
5. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)$.
6. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.
7. Найдите значение выражения $24\sqrt{2}\cos(-\dfrac{\pi}{3})\sin(-\dfrac{\pi}{4})$.
8. Найдите значение выражения $12\sin 150^\circ\cdot\cos 120^\circ$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

9. Найдите $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}2$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

10. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\beta+3\pi\right)}$.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

12. Найдите $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

13. Найдите $-47\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}4$.

14. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

15. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

16. Найдите $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

17. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

18. Найдите значение выражения $5\,\mathrm{tg}(5\pi-\gamma)-\mathrm{tg}(-\gamma)$, если $\mathrm{tg}\,\gamma=7$.

19. Найдите $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

20. Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\,\pi\right)$.

21. Найдите $\mathrm{tg}\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}4$.

22. Найдите значение выражения $7\cos(\pi+\beta)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\dfrac{1}{3}$.

23. Найдите значение выражения $5\sin(\alpha-7\pi)-11\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}25$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

24. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

25. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

26. Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

27. Найдите значение выражения $\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,163^\circ}{\mathrm{tg}\,17^\circ}$.

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

28. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

Подсказка

29. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{tg}107^\circ$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

30. Найдите значение выражения $7\operatorname{tg}13^\circ \cdot \operatorname{tg}77^\circ$.

Подсказка

31. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

32. Найдите значение выражения $\dfrac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

33. Найдите значение выражения $\dfrac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

34. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$.

Подсказка

35. Найдите значение выражения $\dfrac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

36. Найдите $\dfrac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}6$.

Подсказка

37. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

38. Найдите $\dfrac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Подсказка

39. Найдите $\dfrac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

40. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{7\sin\alpha + 13\cos\alpha}{5\sin\alpha - 17\cos\alpha} = 3$.

Подсказка

41. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2}{\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6} = \dfrac{1}{3}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

42. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \cdot \sin 41^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

43. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

44. Найдите значение выражения $8\sin\dfrac{5\pi}{12} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

45. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

46. Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$.

Подсказка

47. Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

Подсказка

$\Longrightarrow$ **Решение задачи**

8 Подсказки

Рациональные выражения

14. Воспользуйтесь формулой разности квадратов.

15. Воспользуйтесь формулой разности квадратов (1.3).

16. Воспользуйтесь формулой разности квадратов (1.3).

17. Воспользуйтесь формулой разности квадратов (1.3).

18. Представим исходное равенство $\frac{2a+5b}{5a+2b} = 1$ в виде $\frac{2a+5b}{5a+2b} = \frac{1}{1}$ откуда, используя свойства пропорции, получаем, что

$$(2a+5b)\cdot 1 = 1\cdot(5a+2b)$$

Откуда

$$2a+5b = 5a+2b \Leftrightarrow 3b = 3a \Leftrightarrow a = b$$

Поэтому $\frac{a}{b} = 1$.

19. Представим исходное равенство $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$ в виде $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = \frac{9}{1}$ откуда, используя свойства пропорции, получаем, что

$$(2a-7b+5)\cdot 1 = 9\cdot(7a-2b+5)$$

Откуда

$$2a-7b+5 = 63a-18b+45 \Leftrightarrow 61a-11b = -40.$$

Следовательно,

$$61a-11b+50 = -40+50 = 10.$$

20. Используя свойство пропорции, перепишем условие $\frac{a}{b} = 3$ в виде $a = 3b$ Воспользуемся этим соотношением и подставим его в исходную дробь

$$\frac{3b+9b+16}{3b+3b+8} = \frac{12b+16}{6b+8}.$$

Остаётся вынести 2 за скобку в числителе и найти значение полученного выражения.

21. Подставим в наше выражение $2a-3$ вместо $p(a)$. Мы получим

$$3\cdot(2a-3)-6a+7$$

Остаётся только упростить полученное выражение.

22. Если $q(b) = 3b$, то $q(b-2) = 3(b-2)$ и $q(b+2) = 3(b+2)$. Остаётся подставить эти выражения в исходное и найти его значение.

23. Если $p(x) = x - 10$, то $p(2x) = 2x - 10$ и $p(x+5) = x + 5 - 10 = x - 5$. Остаётся подставить эти выражения в исходное.

$$5 \cdot ((2x - 10) - 2(x - 5)) = 5 \cdot (2x - 10 - 2x + 10) = 5 \cdot 0 = 0$$

Лайфхак: поскольку это задание из тестовой части ЕГЭ, ответом на него должно быть число. Тогда наше выражение должно быть константой (не должно зависить от x). Действительно, если бы у нашего выражения было много разных значений, то мы бы не смогли выбрать из них одно конкретное.
Теперь подставим вместо x любое число, например, 0, и найдём значение выражения:

$$p(0) = 0 - 10 = -10$$

$$p(5) = 5 - 10 = -5$$

$$5 \cdot (p(0) - 2p(5)) = 5 \cdot (-10 - 2 \cdot (-5)) = 5 \cdot (-10 + 10) = 0$$

24. Если $p(x) = 2x + 1$, то $p(x - 7) = 2(x - 7) + 1$ и $p(13 - x) = 2 \cdot (13 - x) + 1$. Остаётся подставить эти выражения в исходное или воспользоваться лайфхаком из предыдущего задания.

25. Аналогично предыдущим заданиям, $p(x - 7) = x - 7 - 3 = x - 10$, а $p(2x) = 2x - 3$. Следовательно,

$$2p(x - 7) - p(2x) = 2(x - 10) - (2x - 3).$$

Остаётся только упростить.

26. Для начала, решим это задание "в лоб"

$$p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 3b\right)\left(\frac{3}{b} + b\right)$$

Тогда

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b} + 3b\right)\left(\frac{3}{b} + b\right)}$$

Осталось только сократить.
Однако, есть и более быстрый способ. Воспользуемся способом из задания 23 и подставим $b = 1$:

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{p(1)}{p(1)} = 1$$

27. Заметим, что

$$p(6-x)=\frac{(6-x)(6-(6-x))}{(6-x)-3}=\frac{(6-x)x}{3-x}=-\frac{(6-x)x}{x-3}=-p(x)$$

Поэтому наше выражение сводится к совсем простому

$$p(x)+p(6-x)=\frac{x(6-x)}{x-3}-\frac{(6-x)x}{x-3}=0$$

Можно, как и в предыдущих заданиях, просто подставить вместо x любое число, кроме $x=3$, ведь при $x=3$ знаменатель обращается в 0 и выражение теряет смысл. Подставим, например, $x=0$. Тогда:

$$p(x)+p(6-x)=p(0)+p(6)=\frac{0\cdot(6-0)}{0-3}+\frac{6\cdot(6-6)}{6-3}=0.$$

28. Первый способ. Заметим, что из

$$4x+y=5$$

следует

$$4x=5-y\Leftrightarrow x=\frac{5-y}{4}.$$

Аналогично, из

$$12z+y=7$$

следует

$$12z=7-y\Leftrightarrow z=\frac{7-y}{12}.$$

Тогда

$$2x+y+6z=2\cdot\frac{5-y}{4}+y+6\cdot\frac{7-y}{2}=\frac{5-y}{2}+y+\frac{7-y}{2}=\frac{5-y+2y+7-y}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Второй способ. Сложив два уравнения, получим: $4x+2y+12z=12$. Затем разделим левую и правую часть на 2: $2x+y+6z=6$. Таким образом, ответ: 6.

29. Заметим, что из

$$5x+y=5$$

следует

$$5x=5-y\Leftrightarrow 25x=25-5y.$$

Аналогично, из

$$6z+y=7$$

$$6z=7-y\Leftrightarrow 30z=35-5y.$$

Тогда

$$25x-30z=25-5y-35+5y=-10.$$

Иррациональные выражения

1. Обратите внимание, что данное выражение является правой частью формулы разности квадратов (1.3).

5. Воспользуйтесь формулой разности квадратов (1.3).

6. Воспользуйтесь формулой квадрата суммы (1.1) для того, чтобы преобразовать числитель, а затем сравните его со знаменателем.

7. Домножим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{x}$, тогда она примет вид: $\dfrac{5x+2\sqrt{x}}{x}$. Таким образом, мы привели дроби к общему знаменателю x:

$$\frac{5x+2\sqrt{x}}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{5x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x}.$$

Далее остаётся только упростить числитель и сократить полученную дробь (это можно сделать благодаря ограничению на x, данному в условии).

8. Домножим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{x}$, тогда она примет вид: $\dfrac{7x-5\sqrt{x}}{x}$. Таким образом, мы привели дроби к общему знаменателю x:

$$\frac{7x-5\sqrt{x}}{x} + \frac{5\sqrt{x}}{x} = \frac{7x-5\sqrt{x}+5\sqrt{x}}{x}.$$

Остаётся упростить числитель, сократить полученную дробь (это можно сделать, так как $x \neq 0$) и учесть два последних слагаемых.

9. Преобразуем подкоренные выражения в неправильные дроби:

$$\left(\sqrt{\frac{27}{7}} - \sqrt{\frac{12}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$$

Вынесем из под корней то, что возможно:

$$\sqrt{\frac{27}{7}} = \sqrt{\frac{9\cdot 3}{7}} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\left(3\sqrt{\frac{3}{7}} - 2\sqrt{\frac{3}{7}}\right) : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\sqrt{\frac{3\cdot 7}{7\cdot 3}} = 2\sqrt{1} = 2$$

Существует и другой способ:

$$\left(\sqrt{\frac{27}{7}} - \sqrt{\frac{12}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}} = \sqrt{\frac{27}{7}} : \sqrt{\frac{3}{28}} - \sqrt{\frac{12}{7}} : \sqrt{\frac{3}{28}} = \sqrt{\frac{27\cdot 28}{7\cdot 3}} - \sqrt{\frac{12\cdot 28}{7\cdot 3}} = \sqrt{9\cdot 4} - \sqrt{4\cdot 4} = 2$$

10. Для решения задачи нам понадобятся, во-первых, формула квадрата разности (1.2), а, во-вторых, следующее свойство: $\sqrt{x^2} = |x|$ Тогда наше выражение можно представить в виде:

$$x + \sqrt{(x-2)^2} = x + |2-x|.$$

По определению модуля (10) $|2-x| = 2-x$, тогда

$$x + |2-x| = x + 2 - x = 2.$$

Можно было просто воспользоваться способом из задания 23 и подставить вместо x любое число, меньшее 2, например, 0. Ответ при этом, конечно, останется прежним:

$$0 + \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0 + 4} = 2$$

11. Как и в прошлом задании, заменим корень из квадрата на модуль: $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2} = |a-6| + |a-10|$, а затем раскороем модуль по определению (10) с учётом ограничений на a, данных в условии:

$$|a-6| + |a-10| = (a-6) - (10-a) = -6 - 10 = -16$$

12. Выражение для функции $g(2-x)$ получается из выражения для функции $g(x)$ подстановкой $2-x$ вместо каждого x, входящего в выражение для $g(x)$.

$$g(2-x) = \sqrt[3]{(2-x)(4-(2-x))} = \sqrt[3]{(2-x)(2+x)}$$

Аналогично выражение для функции $g(2+x)$ получается из выражения для функции $g(x)$ подстановкой $2+x$ вместо каждого x, входящего в выражение для $g(x)$.
Таким образом:

$$g(2+x) = \sqrt[3]{(2+x)(4-(2+x))} = \sqrt[3]{(2+x)(2-x)}$$

Выражения для наших функций оказались одинаковыми. Значит их отношение $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)} = 1$.

13.

$$h(5+x) = \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5+x-10} = \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{x-5}.$$

$$h(5-x) = \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{5-x-10} = \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{-x-5}.$$

Воспользуемся свойством кубического корня (2.3):

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

тогда

$$\sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[3]{x-5}$$

$$\sqrt[3]{-x-5} = -\sqrt[3]{x+5}$$

И таким образом

$$h(5+x)+h(5-x) = \sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{x-5}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{-x-5} = \sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[3]{x+5} = 0.$$

Можно снова воспользоваться нашим лайфхаком из задания 23 и подставить вместо x ноль, ведь ответ от значения x зависеть не должен:

$$h(5+0)+h(5-0) = 2h(5) = 2(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{-5}) = 2(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}) = 0$$

Действия со степенями

1.34. Представьте 25 как 5^2 и воспользуйтесь свойством степени (3.1).

35. Представьте 9 как 3^2 и воспользуйтесь свойством степени (3.2).

36. Представьте 49 как 7^2 и воспользуйтесь свойством степени (3.1).

37. Представьте 6 как $2 \cdot 3$ и преобразуйте знаменатель, пользуясь тем, что степень произведения равна произведению степеней, то есть $6^n = 2^n \cdot 3^n$. Затем воспользуйтесь свойствами (3.1) и (3.2).

38. Представьте 35 как $7 \cdot 5$ и преобразуйте знаменатель, пользуясь тем, что степень произведения равна произведению степеней, то есть $35^n = 7^n \cdot 5^n$. Затем воспользуйтесь свойствами (3.1) и (3.2).

39. Сначала воспользуйтесь тем, что степень произведения равна произведению степеней (3.1):

$$\frac{\left(2^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9} = \frac{2^{\frac{3\cdot 15}{5}} \cdot 5^{\frac{2\cdot 15}{3}}}{10^9} = \frac{2^9 \cdot 5^{10}}{10^9}$$

Далее, представьте 10 как $2 \cdot 5$, то есть $10^9 = 2^9 \cdot 5^9$.

40. Один из вариантов решения - представить 0,8 как $\dfrac{4}{5}$ или $4^1 \cdot 5^{-1}$, а 20 как $4^1 \cdot 5^1$.

41. Представьте 49 как 7^2 и воспользуйтесь свойством степени (3.2).

42. Представьте 44 как $4 \cdot 11$ и воспользуйтесь свойством степени (3.1).

43. Представьте 8 как 2^3 и воспользуйтесь свойством степени (3.1).

44. $0{,}5 = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$, поэтому наше выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{2^{1-\sqrt{10}}}{2^{-\sqrt{10}}} = 2^{1-\sqrt{10}+\sqrt{10}} = 2^1 = 2$$

45. Поскольку 6 и 7 стоят в одинаковых степенях, можно их перемножить:

$$\frac{(6\cdot 7)^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}} = \frac{42^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}} = 42^1 = 42$$

46. Заменим корни на дробные степени:

$$5 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9} = 5 \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} = 5 \cdot 9^{\frac{1}{3}+\dfrac{1}{6}} = 5 \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 3 = 15.$$

47. Заменим корни на дробные степени:

$$\frac{7^{\frac{1}{9}} \cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6}} = 7^0 = 1.$$

48. Занесём все числа под один корень:

$$\sqrt[5]{\frac{10 \cdot 16}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

49.

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2 = 2^{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}\right)\cdot 2} = 2^1 = 2$$

50.

$$\frac{12\sqrt[9]{m} \cdot \sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}} = 12m^{\frac{1}{9}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6}} = 12m^0 = 12.$$

51. Воспользуемся тем, что корень из произведения - это произведение корней при положительных множителях, а также заменим корни на дробные степени:

$$\frac{\sqrt{81\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}} = \frac{\sqrt{81} \cdot \sqrt{\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}} = \frac{9 \cdot b^{\frac{1}{14}}}{b^{\frac{1}{14}}} = 9$$

52. Представим корни в виде дробных степеней, а также учтём, что при положительных множителях корень из произведения равен произведению корней:

$$\frac{(\sqrt{3}a)^2 \sqrt[5]{a^3}}{a^{2,6}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{2,6}}$$

Далее, воспользуемся свойством степени (3.2):

$$3a^{2+0,6-2,6} = 3a^0 = 3$$

53. Представим корни в виде дробных степеней, а также учтём, что при положительных множителях корень из произведения равен произведению корней:

$$\frac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}} = \frac{\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{9}}}{4m^{\frac{1}{18}}} = 0,25$$

54. Представим корни в виде дробных степеней и воспользуемся свойством степени (3.2):

$$\frac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}=\frac{15a^{\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{5}}-7a^{\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{7}}}{2a^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{35}}}=\frac{15a^{\frac{1}{140}}-7a^{\frac{1}{140}}}{2a^{\frac{1}{140}}}=4$$

55. Представим корни в виде дробных степеней и воспользуемся свойствами степени (3.1) и (3.2):

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}=m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{18}}=m^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{3}}=4$$

56. Представим корни в виде дробных степеней и воспользуемся свойствами степени (3.1) и (3.2):

$$\frac{\sqrt[9]{a}\sqrt[18]{a}}{a\sqrt[6]{a}}=a^{\frac{1}{9}+\dfrac{1}{18}-1-\dfrac{1}{6}}=a^{-1}=\frac{1}{1{,}25}=0{,}8$$

57.

$$g(x-9)=8^{x-9}$$

$$g(x-11)=8^{x-11}$$

Тогда

$$\frac{8^{x-9}}{8^{x-11}}=8^{(x-9)-(x-11)}=8^2=64$$

Преобразование логарифмических выражений

9. Представим 36 как 6^2:

$$36^{\log_6 5}=6^{2\log_6 5}=\left(6^{\log_6 5}\right)^2$$

Далее воспользуемся логарифмическим тождеством (5.1):

$$\left(6^{\log_6 5}\right)^2=5^2=25$$

10. Представим 0,25 как 2^{-2} и воспользуемся свойством (5.4):

$$\log_{2^{-2}}2=-\frac{1}{2}\log_2 2=-0{,}5$$

11. Представим 4 как 2^2, а 8 как 2^3 и воспользуемся свойствами (5.3) и (5.4):

$$\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=1{,}5$$

12. Представим 25 как 5^2 и воспользуемся свойством (5.3):

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5}=\frac{\log_3 5^2}{\log_3 5}=2\frac{\log_3 5}{\log_3 5}=2$$

13. Представим 49 как 7^2 и воспользуемся свойством (5.4):

$$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \frac{\log_7 13}{\log_{7^2} 13} = \frac{2\log_7 13}{\log_7 13} = 2$$

14. Воспользуемся свойством (5.7) и поменяем местами основания логарифмов, а затем представим 9 как 3^2, а 25 как 5^2 и воспользуемся свойством (5.3):

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \log_3 9 \cdot \log_5 25 = \log_3 3^2 \cdot \log_5 5^2 = 2\log_3 3 \cdot 2\log_5 5 = 4$$

15. Воспользуемся свойством степени (3.4):

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2}$$

Затем представим 50 как $50 = 2 \cdot 5^2$, тогда по свойствам логарифма (5.3 и 5.5)

$$\log_5 50 = \log_5 (2 \cdot 5^2) = \log_5 5^2 + \log_5 2 = 2\log_5 5 + \log_5 2 = 2 + \log_5 2.$$

Тогда

$$9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{2 + \log_5 2 - \log_5 2} = 9^2 = 81$$

16. Воспользуемся свойством степени (3.6) и свойством логарифма (5.3):

$$6\log_7 \sqrt[3]{7} = 6\log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3}\log_7 7 = 2$$

17. Воспользуемся свойством степени (3.6) и свойством логарифма (5.4):

$$\log_{\sqrt[6]{13}} 13 = \log_{13^{\frac{1}{6}}} 13 = 6\log_{13} 13 = 6$$

18. Представим число 18 в виде $18 = 2 \cdot 3^2$, тогда по свойствам логарифма (5.3 и 5.5) $\log_3 18 = 2\log_3 3 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$. Тогда:

$$\frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2} = \frac{2 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = 1$$

19. Воспользуемся свойством логарифма (5.8), а 0,2 представим как 5^{-1}:

$$\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0{,}2 = \log_7 5 + \log_7 5^{-1}$$

Теперь воспользуемся свойством логарифма (5.3):

$$\log_7 5 + \log_7 5^{-1} = \log_7 5 - \log_7 5 = 0$$

20. Воспользуемся свойством (5.7) и поменяем местами основания логарифмов:

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25 = \log_3 3 \cdot \log_{0,8} 1{,}25$$

Теперь представим 1,25 как $0{,}8^{-1}$

$$\log_3 3 \cdot \log_{0,8} 1{,}25 = 1 \cdot \log_{0,8} 0{,}8^{-1} = -\log_{0,8} 0{,}8 = -1$$

21. Представим 25 как 5^2, а 49 как 7^2 и воспользуемся свойствами логарифма (5.3) и (5.4), тогда:

$$\log_{25} 49 = \log_{5^2} 7^2 = \frac{2}{2}\log_5 7 = \log_5 7$$

Теперь воспользуемся тождеством (5.1):

$$5^{\log_5 7} = 7$$

22. Представим 49 как 7^2, а $\sqrt{7}$ как $7^{\frac{1}{2}}$ и воспользуемся свойствами логарифмов (5.3) и (5.4):

$$\log^2_{\sqrt{7}} 49 = \log^2_{7^{\frac{1}{2}}} 7^2 = (4\log_7 7)^2 = 16$$

23. Сначала воспользуемся свойством степени (3.1), а затем логарифмическим тождеством (5.1):

$$5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250$$

24. Эту задачу можно решить несколькими способами.
<u>Способ 1</u>: с помощью свойства степени (3.3) и логарифмического тождества (5.1)

$$8^{2\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

<u>Способ 2</u>: с помощью свойства логарифма (5.3) и логарифмического тождества (5.1)

$$8^{2\log_8 3} = 8^{\log_8 3^2} = 8^{\log_8 9} = 9$$

25. Эта задача, как и предыдущая, имеет несколько способов решения. Приведём один из них (здесь мы используем свойства степени (3.3) и логарифма (5.3), (5.1)):

$$64^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{2\log_8 3^{\frac{1}{2}}} = 8^{\frac{2}{2}\log_8 3} = 8^{\log_8 3} = 3$$

26. Воспользуемся свойствами степени (3.5), (3.6):

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{\frac{1}{2}}$$

Теперь воспользуемся свойствами логарифма (5.3), (5.4):

$$\log_{13^{-1}} 13^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_{13} 13 = -0{,}5$$

27. Воспользуемся свойством логарифма (5.3):

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \frac{\log_6 13^{\frac{1}{2}}}{\log_6 13} = \frac{\log_6 13}{2\log_6 13} = 0{,}5$$

28. Воспользуемся свойством степени (3.3) и свойством логарифма (5.7):

$$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = 3^{\log_2 3 \cdot \log_3 2} = 3^{\log_2 2 \cdot \log_3 3} = 3^{1 \cdot 1} = 3$$

30. Используем свойство логарифма $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
Тогда $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3$.
Вспомним также, что $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$ и $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
Преобразуем полученные слагаемые: $\log_a a = 1$ и $\log_a b^3 = 3 \cdot \log_a b = 3 \cdot \dfrac{1}{\log_b a}$
Тогда

$$\log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_b a} = 1 + 21 = 22$$

31. Используем свойство логарифма $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
Тогда $\log_a \dfrac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3$.
Вспомним также, что $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$.
Преобразуем полученные слагаемые: $\log_a a = 1$ и $\log_a b^3 = 3 \cdot \log_a b = 3 \cdot 5 = 15$
Тогда

$$\log_a a - \log_a b^3 = 1 - 15 = -14$$

32. Используем свойство логарифма $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
Тогда $\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3$.
Вспомним также, что $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$.
Преобразуем полученные слагаемые: $\log_a a^2 = 2\log_a a = 2$ и $\log_a b^3 = 3 \cdot \log_a b = 3 \cdot (-2) = -6$
Тогда

$$\log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 - 6 = -4$$

Преобразование тригонометрических выражений

28. В нашем выражении присутствуют углы 409° и 49°. Поищем между ними связь. Заметим, что $409^\circ = 360^\circ + 49^\circ$. Тогда исходное выражение можно представить в виде

$$\sin 409^\circ = \sin(360^\circ + 49^\circ).$$

Далее преобразуем выражение $\sin(360^\circ + 49^\circ)$, например, по формуле приведения.

29. В нашем выражении присутствуют углы 107° и 17°. Поищем между ними связь. Заметим, что $107^\circ = 90^\circ + 17^\circ$. Тогда исходное выражение можно представить в виде

$$\mathrm{tg}\, 107^\circ = \mathrm{tg}(90^\circ + 17^\circ).$$

Далее преобразуем выражение $\operatorname{tg}(90^\circ + 17^\circ)$, например, по формуле приведения.

30. В нашем выражении присутствуют углы 77° и 13°. Поищем между ними связь. Заметим, что $77^\circ = 90^\circ - 13^\circ$. Тогда исходное выражение можно представить в виде

$$\operatorname{tg} 77^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ).$$

Далее преобразуем выражение $\operatorname{tg}(90^\circ - 13^\circ)$, например, по формуле приведения.

31. В нашем выражении присутствуют углы 22° и 11°. Заметим, что $22^\circ = 2 \cdot 11^\circ$. Тогда исходное выражение можно представить в виде

$$\sin 22^\circ = \sin(2 \cdot 11^\circ).$$

Далее преобразуем это выражение по формуле синуса двойного угла: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то есть $\sin 22^\circ = 2\sin 11^\circ \cos 11^\circ$.

32. В нашем выражении присутствуют углы 34° и 17°. Заметим, что $34^\circ = 2 \cdot 17^\circ$. Тогда исходное выражение можно представить в виде

$$\cos 34^\circ = \cos(2 \cdot 17^\circ).$$

Далее преобразуем это выражение по формуле косинуса двойного угла: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, то есть

$$\cos 34^\circ = \cos 17^\circ - \sin 17^\circ.$$

33. В нашем выражение присутствуют углы 127° и 37°. Поищем между ними связь. Заметим, что $127^\circ = 90^\circ + 37^\circ$. Тогда по формуле приведения

$$\sin 127^\circ = \sin 90^\circ + 37^\circ = \cos 37^\circ.$$

Поэтому, $\sin^2 127^\circ = \cos^2 37^\circ$. Далее воспользуемся основным тригонометрическим тождеством.

34. В нашем выражение присутствуют углы 127° и 37°. Поищем между ними связь. Заметим, что $113^\circ = 90^\circ + 23^\circ$. Тогда по формуле приведения

$$\cos 113^\circ = \cos(90^\circ + 23^\circ) = -\sin 23^\circ.$$

Поэтому,

$$\cos^2 113^\circ = (\cos 113^\circ)^2 = (-\sin 23^\circ)^2 = \sin^2 23^\circ.$$

Далее воспользуемся основным тригонометрическим тождеством.

35. Воспользуйтесь тем, что $207^\circ = 180^\circ + 27^\circ$ и преобразуйте выражение $\cos 207^\circ$ по формуле приведения. Далее воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

36. Воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$$\sin 6\alpha = \sin(2 \cdot 3\alpha) = 2\sin 3\alpha \cos 3\alpha$$

37. Как мы знаем, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тогда $6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha = 6$. Заменим 6 на $6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$.
Решение. Первый способ. Воспользуемся подсказкой и получим:

$$5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$$

$$7\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Тогда:

$$7 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$$

Второй способ. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и заменим квадрат синуса на квадрат косинуса:

$$5 - 5\cos^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6$$

$$8\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{8}$$

Воспользуемся формулой 7.4, которая является следствием основного тригонометрического тождества:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 8 - 1 = 7$$

38. По условию $\operatorname{tg}\alpha = 3$, следовательно, $\sin\alpha = 3\cos\alpha$. Поэтому,

$$\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\cos\alpha - 12\cos\alpha}{6\cos\alpha - 5\cos\alpha} = -9$$

39. По условию $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5$, то есть $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2{,}5$. Следовательно, $\sin\alpha = -2{,}5\cos\alpha$. Теперь вместо каждого входящего в нашу дробь $\sin x$ подставим $-2{,}5\cos\alpha$:

$$\frac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3} = \frac{10\cos\alpha + 4\cdot\ (-2{,}5\cos\alpha) + 15}{2\cdot\ (-2{,}5\cos\alpha) + 5\cos\alpha + 3} = \frac{10\cos\alpha - 10\cos\alpha + 15}{-5\cos\alpha + 5\cos\alpha + 3} = 5$$

40.

$$\frac{7\sin\alpha + 13\cos\alpha}{5\sin\alpha - 17\cos\alpha} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sin\alpha + 13\cos\alpha = 3(5\sin\alpha - 17\cos\alpha) \\ 5\sin\alpha - 17\cos\alpha \neq 0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения следует, что

$$64\cos\alpha = 8\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = 8\cos\alpha$$

Очевидно, что при этом выполняется вторая строчка системы. Поэтому,

$$\operatorname{tg}\alpha = 8$$

41. По основному свойству пропорции:

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2}{\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2) = \sin\alpha + 3\cos\alpha + 6) \\ \sin\alpha + 3\cos\alpha + 6 \neq 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$8\sin\alpha = 18\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = 2{,}25\cos\alpha$$

Тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2{,}25$$

Вторая часть системы при этом выполняется. Действительно:

$$\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6 = 2{,}25\cos\alpha + 3\cos\alpha + 6 = 5{,}25\cos\alpha + 6 > 0$$

42. Для начала воспользуемся формулой синуса двойного угла

$$\frac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ} = \frac{10\sin 49^\circ \cos 49^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ} = \frac{10\cos 49^\circ}{\sin 41^\circ}$$

Теперь можно использовать формулу приведения:

$$\frac{10\cos(90^\circ - 49^\circ)}{\sin 41^\circ} = \frac{10\sin 41^\circ}{\sin 41^\circ} = 10$$

43. Так как $74^\circ = 2 \cdot 37^\circ$, то мы можем применить к выражению $\sin 74^\circ$ формулу синуса двойного угла. Сделаем это:

$$\frac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ} = \frac{10\sin 37^\circ \cdot \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ} = \frac{10\sin 37^\circ}{\cos 53^\circ}$$

Теперь так как $53^\circ = 90^\circ - 37^\circ$, то можно использовать формулу приведения $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$:

$$\frac{10\sin 37^\circ}{\cos(90^\circ - 37^\circ)} = \frac{10\sin 37^\circ}{\sin 37^\circ} = 10$$

44. Вспомним формулу синуса двойного угла (9.5) и заметим, что наше выражение представляет собой правую часть этой формулы, поэтому

$$8\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}=4\cdot\left(2\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}\right)=4\sin\frac{10\pi}{12}=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\cdot 0{,}5=2$$

Для нахождения $\sin\frac{5\pi}{6}$ можно было воспользоваться, например, тригонометрической окружностью.

45. Первый способ. Вспомним формулу косинуса двойного угла (9.6) и заметим, что наше выражение представляет собой правую часть этой формулы, поэтому

$$\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}=\sqrt{3}\cos\frac{10\pi}{12}=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}$$

Далее воспользуемся тригонометрической окружностью:

$$\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-1{,}5$$

Второй способ. Воспользуемся формулами понижения степени (9.9) и (9.10)

$$\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}=\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos(2\cdot\frac{5\pi}{12})}{2}-\frac{1-\cos(2\cdot\frac{5\pi}{12})}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=-1{,}5$$

46. Воспользуемся формулой понижения степени (9.9)

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=\sqrt{3}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}-1\right)=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=-1{,}5$$

47. Заметим, что из каждого слагаемого можно вынести за скобку $\sqrt{3}$. Тогда получаем:

$$\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}=\sqrt{3}\left(1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)$$

Теперь к выражению в скобках можно применить формулу двойного угла:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

Применяя эту формулу, получаем:

$$\sqrt{3}\left(1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=-1{,}5$$

9 Ответы

Рациональные выражения

1. 80
2. 8
3. 5
4. 10
5. 10
6. 333
7. -2
8. 11
9. 2
10. 2
11. -12
12. -25
13. 4
14. -136
15. 6
16. -367
17. 346
18. 1
19. 10
20. 2
21. -2
22. -12
23. 0
24. 14
25. -17
26. 1
27. 0
28. 6
29. -10

Иррациональные выражения

1. 6
2. 7
3. -15
4. 2
5. 33
6. 2
7. 5
8. 12
9. 2
10. 2
11. 4
12. 1
13. 0

Действия со степенями

1. 7
2. 64
3. 144
4. 3,5
5. 121
6. 6
7. 8
8. 243
9. 16
10. 0,0001
11. 0,2
12. 49
13. 2,5
14. 7
15. 5
16. 36
17. 25
18. 5
19. 2
20. 13,5
21. 0,25
22. 5
23. 2
24. 0,5
25. 150
26. 7
27. 88
28. 2
29. 32
30. 27
31. -0,5
32. 49
33. 15
34. 5
35. 9
36. 7
37. 1,5
38. 1,4
39. 5
40. 20
41. 49
42. 121
43. 4
44. 2
45. 42
46. 15
47. 1
48. 2
49. 2
50. 12
51. 9
52. 3
53. 0,25
54. 4
55. 4
56. 0,8
57. 64

Преобразование логарифмических выражений

1. 8
2. 28
3. 1
4. -3
5. -1
6. 0,5
7. 12
8. 4
9. 25
10. -0,5
11. 1,5
12. 2
13. 2
14. 4
15. 81
16. 2
17. 6
18. 1
19. 0
20. -1
21. 7
22. 16
23. 250
24. 9
25. 3
26. -0,5
27. 0,5
28. 3
29. 1
30. 22
31. -14
32. -4

Преобразование тригонометрических выражений

1. 36
2. 2
3. -16
4. -6
5. 6
6. 18
7. -12
8. -3
9. 22,08
10. 2
11. 1
12. -7
13. 31,96
14. -3
15. -5
16. 1
17. -1
18. -28
19. 0,6
20. -10
21. -2,5
22. 3
23. 4
24. 5
25. -14
26. -4
27. 5
28. 14
29. -5
30. 7
31. 6
32. -24
33. 12
34. 6
35. 12
36. 4
37. 7
38. -9
39. 5
40. 8
41. 2,25
42. 10
43. 10
44. 2
45. -1,5
46. -1,5
47. -1,5