

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

### Вариант 9

- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

### Вариант 10

- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

### Вариант 15

- [3 балла] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$  имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
- [5 баллов] Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 30$ ,  $BC = 24$ ,  $AC = 18$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 23 точки:  $B_1, B_2, \dots, B_{23}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 17 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$ ?
- [4 балла]  $AH$  – высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$ , и  $AK = 5$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 240$ .
- [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 80 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  – его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 20 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $2q^2$  тыс.руб., на втором заводе  $2q^2 + 2q$  тыс.руб., и на третьем  $2q^2 - q$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

### Вариант 16

- [3 балла] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2 - (4a - 12)x + a^2 - 6a = 0$  имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?
- [5 баллов] Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 35$ ,  $BC = 28$ ,  $AC = 21$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 27 точек:  $B_1, B_2, \dots, B_{27}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 20 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{20}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{20}, B, B_1, B_2, \dots, B_{27}, C$ ?
- [4 балла]  $AH$  – высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$ , и  $AK = 7$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 288$ .
- [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 120 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  – его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 36 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $3q^2 + 2q$  тыс.руб., на втором заводе  $3q^2 - q$  тыс.руб., и на третьем  $3q^2$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?