Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Финальный этап. 10 класс

Задача 1. Ядро N_1 сталкивается с первоначально покоящимся ядром N_2 и возбуждает его: $N_1 + N_2 \to N_1 + N_2^*$. При этом внутренняя энергия ядра N_2 увеличивается на положительную величину ΔE. Отношение масс ядер N_1 и N_2 равно $n = m_1/m_2 = 1/3$. Отношение энергии ΔE к начальной кинетической энергии K_0 ядра N_1 равно $x = \Delta E/K_0 = 2/5$. Найдите максимально возможное значение ϑ_m угла вылета возбуждённого ядра N_2^*, совместимое с законами сохранения импульса и энергии (угол вылета — угол между импульсом ядра N_2^* и начальным импульсом ядра N_1).

Возможное решение

Пусть $\vec{p_0}$ — начальный импульс ядра N_1, $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ — конечные импульсы ядер. Обозначим через E_0 внутреннюю энергию ядра N_2 до столкновения. Тогда после столкновения внутренняя энергия ядра N_2^* равна $E_0 + \Delta E$. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{p_0^2}{2m_1} + E_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + E_0 + \Delta E \quad \longrightarrow \quad 1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 + \frac{\Delta E}{K_0}\,,$$

$K_0 = p_0^2/2m_1$ — начальная кинетическая энергия ядра N_1. Обозначим:

$$n = \frac{m_1}{m_2}\,, \quad x = \frac{\Delta E}{K_0}\,.$$

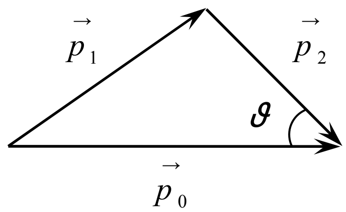
Тогда:

$$1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + n\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 + x\,.$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$\vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2}\,.$$

Изобразим это равенство в виде треугольника; ϑ — угол вылета возбуждённого ядра N_2^*.



По теореме косинусов имеем:

$$p_1^2 = p_0^2 + p_2^2 - 2p_0\,p_2\cos\vartheta \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 - 2\left(\frac{p_2}{p_0}\right)\cos\vartheta\,.$$

Получаем:

$$1 = 1 + \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 - 2\left(\frac{p_2}{p_0}\right)\cos\vartheta + n\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 + x \quad \longrightarrow \quad (n+1)\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 - 2\left(\frac{p_2}{p_0}\right)\cos\vartheta + x = 0\,.$$

Введём новую переменную:

$$y = \frac{p_2}{p_0} > 0\,.$$

Для y имеем квадратное уравнение:

$$(n+1)\,y^2 - 2y\cos\vartheta + x = 0\,.$$

Корни уравнения:

$$y = \frac{2\cos\vartheta \pm \sqrt{D}}{2\,(n+1)}\,.$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = 4\cos^2\vartheta - 4\,(n+1)\,x = 4\,(\cos^2\vartheta - (n+1)\,x\,)\,.$$

Условие существования действительных корней:

$$D \geq 0 \quad \longrightarrow \quad |\cos\vartheta\,| \geq \sqrt{(n+1)\,x}\,.$$

Очевидно, что $\sqrt{D} < 2\,|\cos\vartheta\,|$. Если $\cos\vartheta < 0$, то оба корня отрицательны, что противоречит неравенству $y > 0$. Поэтому $\cos\vartheta > 0$ и угол ϑ острый. Получаем:

$$\cos\vartheta \geq \sqrt{(n+1)\,x}\,.$$

Максимальное значение угла ϑ соотвествует знаку равенства:

$$\cos\vartheta_m = \sqrt{(n+1)\,x} \quad \longrightarrow \quad \vartheta_m = \arccos\sqrt{(n+1)\,x} = \arccos\sqrt{8/15} = 43^\circ\,.$$

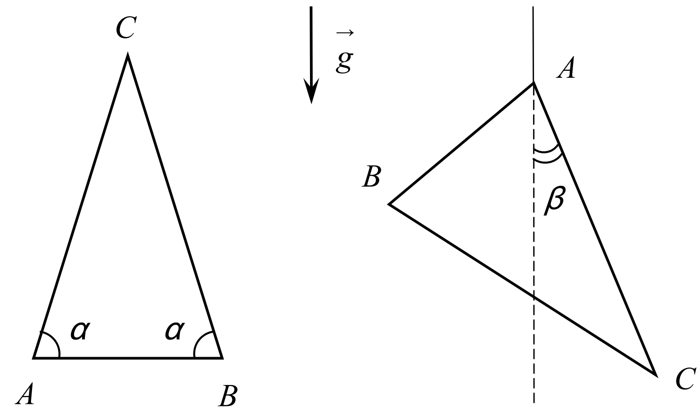
Ответ:

$$\vartheta_m = \arccos\sqrt{(n+1)\,x} = 43^\circ\,.$$

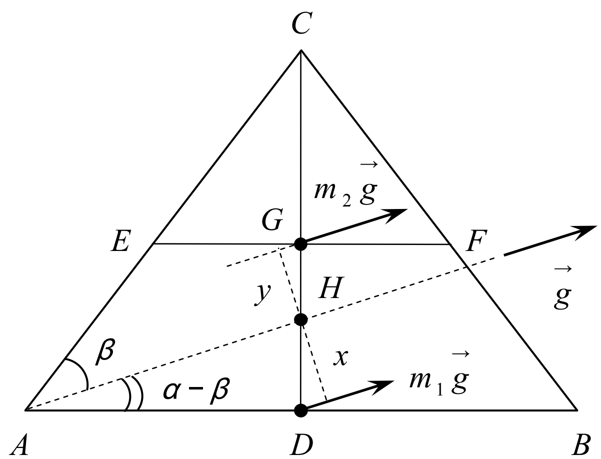
Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии (+1 балл).
2. Правильно записан закон сохранения импульса (+1 балл).
3. Получено правильное квадратное уравнение для конечного импульса возбуждённого ядра (+1 балл).
4. Правильно сформулировано условие для определения максимального угла вылета (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

Задача 2. Из тонкой однородной проволоки согнут равнобедренный треугольник ABC. Углы при основании AB равны $\alpha = 75^\circ$. Треугольник подвешен на тонкой нити за вершину A и находится в равновесии. Найдите угол β между направлением нити и боковой стороной AC.



Возможное решение



Обозначим длину боковой стороны треугольника через a, а её массу через m. Из вершины C опустим перпендикуляр CD на основание AB; точка D — середина основания. Длины отрезков CD и AB равны:

$$CD = a\,\sin\alpha\,, \quad AB = 2a\,\cos\alpha\,.$$

Так как массы сторон треугольника пропорциональны их длинам, масса основания AB равна:

$$m_1 = 2\,m\,\cos\alpha\,.$$

Стянем эту массу в точку D — центр масс (центр тяжести) основания. Массы m боковых сторон стянем в их середины — точки E и F. Эти две массы заменим одной массой $m_2 = 2\,m$, расположенной в точке G — середине средней линии EF. Таким образом, имеем две точечные массы m_1 и m_2, расположенные в точках D и G. Центр масс треугольника H совпадает с центром масс этой пары и лежит на отрезке DG. Найдём положение точки H. Если треугольник подвешен на нити за вершину A, то в положении равновесия отрезок AH параллелен вектору ускорения свободного падения $\vec{g}$. Условием равновесия является равенство моментов сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Проведём через точку H прямую, перпендикулярную отрезку AH. Отрезки этой прямой от точки H до линий действия сил тяжести представляют собой плечи этих сил. На рисунке они обозначены через x и y. Условие равенства моментов даёт:

$$x\,m_1 g = y\,m_2 g \quad \longrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{m_1}{m_2} = \cos\alpha\,.$$

Далее имеем два подобных прямоугольных треугольника, в которых отрезки x и y являются катетами, а отрезки DH и GH — гипотенузами:

$$\frac{GH}{DH} = \frac{y}{x} = \cos\alpha\,.$$

Кроме того, сумма $DH + GH$ равна половине высоты CD:

$$DH + GH = \frac{CD}{32} = \frac{a}{2}\,\sin\alpha\,.$$

Из полученных соотношений находим длину отрезка DH и угол β:

$$GH = DH\,\cos\alpha\,, \quad DH + DH\,\cos\alpha = \frac{a}{2}\,\sin\alpha \quad\longrightarrow\quad DH = \frac{a\,\sin\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\,,$$

$$\operatorname{tg}(\,\alpha-\beta\,) = \frac{DH}{AB/2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)} \quad\longrightarrow\quad \beta = \alpha - \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\right] = 19^\circ\,.$$

Следует отметить, что в этой задаче неправильным является решение, основанное на утверждении, что центр масс треугольника лежит в точке пересечения его медиан. Это утверждение справедливо только для случая, когда масса треугольника равномерно распределена по его площади. При неправильном решении имеем:

$$DH = \frac{CD}{3} = \frac{a}{3}\,\sin\alpha\,, \quad \operatorname{tg}(\,\alpha-\beta\,) = \frac{DH}{AB/2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} \quad\longrightarrow\quad \beta = \alpha - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}\right)\,.$$

Этот результат совпадает с точным только для равностороннего треугольника, когда $\alpha = 60^\circ$ и $2\,(\,1+\cos\alpha\,) = 3$. Заметные отличия от точного значения имеют место либо для малых α, либо для углов близких к 90°. При $\alpha = 75^\circ$ неправильное решение даёт $\beta = 24^\circ$.

Ответ:

$$\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\right] = 19^\circ\,.$$

Критерии

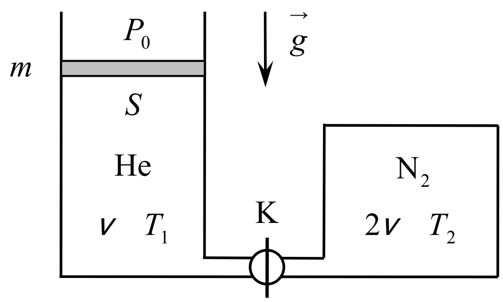
1. Стороны треугольника правильно заменены точечными массами (+1 балл).
2. Правильно записано условие равновесия треугольника через моменты сил тяжести (+1 балл).
3. Правильно найдено положение центра масс (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

Задача 3. В вакуумной камере большого объёма поддерживается постоянное давление $P_0 = 6$ кПа. В камере расположен открытый сверху вертикальный цилиндр, в котором может свободно двигаться поршень массой $m = 4$ кг и площадью $S = 100$ см^2. Цилиндр соединён с сосудом постоянного объёма короткой трубкой с краном К. В начальном состоянии кран закрыт, в цилиндре под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 570$ К, а в сосуде — молекулярный азот N_2 при температуре $T_2 = 380$ К. Давления гелия и азота одинаковы, число молей гелия $\nu = 0{,}025$, число молей азота $2\,\nu$. Кран открывают, газы начинают перемешиваться, и вся система переходит в новое равновесное состояние. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите следующие величины:

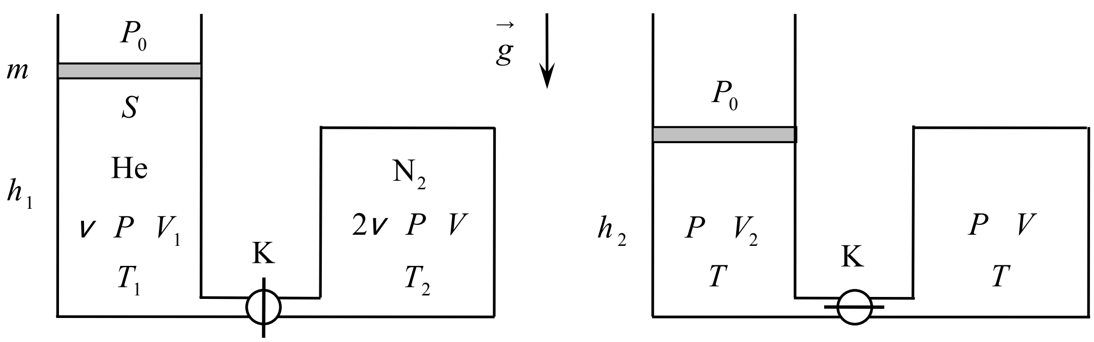
1. конечную температуру T газовой смеси,

2. расстояние x, на которое переместился поршень. Числовой ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Объём трубки с краном не учитывайте.



Возможное решение



Начальное давление газов P равно конечному давлению газовой смеси и определяется условием равновесия поршня:

$$PS = P_0 S + mg \quad \longrightarrow \quad P = P_0 + \frac{mg}{S}\,.$$

Пусть V_1 — начальный объём гелия, V — объём правого сосуда, V_2 — объём газовой смеси в цилиндре в конечном состоянии. Полный объём конечной газовой смеси равен $V_2 + V$. Запишем уравнение состояния для гелия, азота и конечной газовой смеси:

$$P\,V_1 = \nu R T_1\,, \quad P\,V = 2\,\nu R T_2\,, \quad P\,(\,V_2 + V\,) = 3\,\nu R T\,.$$

Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \nu \cdot \frac{3}{2}\,R\,(\,T - T_1\,) + 2\nu \cdot \frac{5}{2}\,R\,(\,T - T_2\,) + A\,,$$

A — работа силы давления газов на поршень. Рассмотрим уравнение баланса энергии для поршня:

$$mg\,h_2 - mg\,h_1 = A + A_0\,.$$

В левой части имеем приращение механической энергии поршня; h_1 и h_2 — начальное и конечное значения высоты поршня над дном цилиндра, A_0 — работа постоянной силы внешнего давления:

$$A_0 = P_0 S\,(\,h_1 - h_2\,)\,.$$

Учитывая, что $V_1 = S\,h_1$ и $V_2 = S\,h_2$, имеем:

$$A = mg\,h_2 - mg\,h_1 - P_0 S\,h_1 + P_0 S\,h_2 = (\,P_0 S + mg\,)\,h_2 - (\,P_0 S + mg\,)\,h_1 = P\,V_2 - P\,V_1\,.$$

Выразим первое слагаемое через температуры:

$$P\,(\,V_2+V\,)=3\,\nu RT \quad\longrightarrow\quad P\,V_2=3\,\nu RT-P\,V=3\,\nu RT-2\,\nu RT_2\,.$$

Используя также равенство $P\,V_1=\nu RT_1$, получаем:

$$A=3\,\nu RT-2\,\nu RT_2-\nu RT_1\,.$$

Подставляя это выражение в первое начало термодинамики, находим конечную температуру газовой смеси:

$$0=\nu\cdot\frac{3}{2}\,R\,(\,T-T_1\,)+2\nu\cdot\frac{5}{2}\,R\,(\,T-T_2\,)+3\,\nu RT-2\,\nu RT_2-\nu RT_1\,,$$

$$3\,(\,T-T_1\,)+10\,(\,T-T_2\,)+6\,T-4\,T_2-2\,T_1=0 \quad\longrightarrow\quad 19\,T-5\,T_1-14\,T_2=0\,,$$

$$T=\frac{5\,T_1+14\,T_2}{19}=430\text{ К}\,.$$

Рассмотрим теперь перемещение поршня x:

$$x=h_1-h_2=\frac{PS\,(\,h_1-h_2\,)}{PS}=\frac{P\,V_1-P\,V_2}{PS}\,.$$

Далее имеем:

$$PS=P_0S+mg\,,\quad P\,V_1=\nu RT_1\,,$$

$$P\,V_2=3\,\nu RT-2\,\nu RT_2=\nu R\left(3\cdot\frac{5\,T_1+14\,T_2}{19}-2\,T_2\right)=\frac{\nu R\,(\,15\,T_1+4\,T_2\,)}{19}\,,$$

$$P\,V_1-P\,V_2=\nu R\left(T_1-\frac{15\,T_1+4\,T_2}{19}\right)=\frac{4\,\nu R\,(\,T_1-T_2\,)}{19}\,,$$

$$x=\frac{4\,\nu R\,(\,T_1-T_2\,)}{19(P_0\,S+mg)}=8{,}3\text{ см}\,.$$

Ответ:

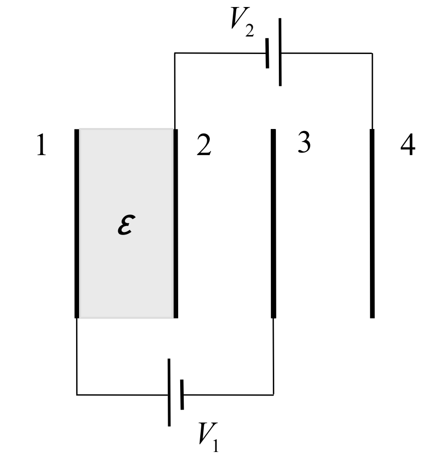
$$T=\frac{5\,T_1+14\,T_2}{19}=430\text{ К}\,,$$

$$x=\frac{4\,\nu R\,(\,T_1-T_2\,)}{19(P_0\,S+mg)}=8{,}3\text{ см}\,.$$

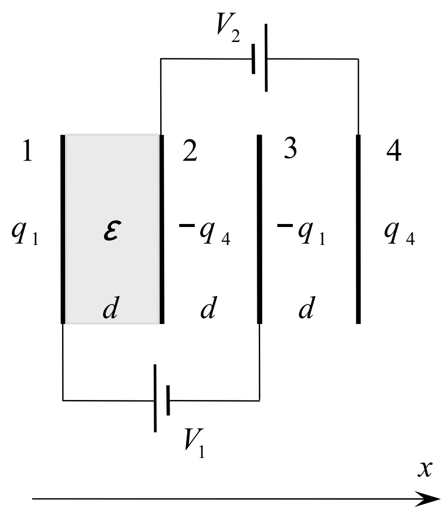
Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики (+1 балл).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
3. Правильно найдена работа газа (+1 балл).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для перемещения поршня (+1 балл).

Задача 4. Четыре одинаковые незаряженные металлические пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Всё пространство между пластинами 1 и 2 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 5$. Пластины 1 и 3 соединяют тонким проводом через батарею с ЭДС $V_1 = 9$ В, а пластины 2 и 4 — через батарею с ЭДС $V_2 = 4{,}5$ В. Найдите отношение $x = q_4/q_1$, где q_4 и q_1 — установившиеся заряды пластин 4 и 1.



Возможное решение



Обозначим через q_1 и q_4 заряды пластин 1 и 4. Тогда заряды пластин 2 и 3 равны соответственно $-q_4$ и $-q_1$. Введём поверхностные плотности заряда на пластинах 1 и 4:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S}\,, \quad \sigma_4 = \frac{q_4}{S}\,,$$

где S — площадь пластин. Плотности заряда на пластинах 2 и 3 равны $-\sigma_4$ и $-\sigma_1$. Направим ось x от пластины 1 к пластине 4 и рассмотрим проекцию вектора напряжённости электрического поля на эту ось. Между пластинами 1 и 2 имеем:

$$E_{1x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_1 - \sigma_4\,) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\,\varepsilon}\,,$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Между пластинами 2 и 3:

$$E_{2x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 - \sigma_4 + \sigma_1 - \sigma_4\,) = \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\varepsilon_0}\,.$$

Между пластинами 3 и 4:

$$E_{3x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 - \sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_4\,) = -\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\,.$$

Мысленно перенесём положительный пробный заряд e с пластины 1 на пластину 3 вдоль оси x. Работу A силы электрического поля можно записать двумя способами:

$$A = e\,(\,\varphi_1 - \varphi_3\,) = e\,(\,E_{1x}\,d + E_{2x}\,d\,)\,,$$

φ_1 и φ_3 — потенциалы пластин, d — расстояние между пластинами. Учитывая, что $\varphi_1 - \varphi_3 = V_1$, и используя полученные выше выражения для напряжённостей, получаем:

$$V_1 = \frac{\sigma_1\, d}{\varepsilon_0\, \varepsilon} + \frac{(\,\sigma_1 - \sigma_4\,)\, d}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad (\,\varepsilon + 1\,)\,\sigma_1 - \varepsilon\,\sigma_4 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\, V_1}{d}\,.$$

Перенесём теперь пробный заряд с пластины 2 на пластину 4. Для работы силы электрического поля имеем:

$$A = e\,(\,\varphi_2 - \varphi_4\,) = e\,(\,E_{2x}\, d + E_{3x}\, d\,)\,,$$

Учитывая,что $\varphi_2 - \varphi_4 = -V_2$, получаем:

$$-V_2 = \frac{(\,\sigma_1 - \sigma_4\,)\, d}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4\, d}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\,\sigma_4 - \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0\, V_2}{d}\,.$$

Из полученных уравнений находим плотности σ_1 и σ_4:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,(\,2\,V_1 + V_2\,)}{d\,(\,\varepsilon + 2\,)}\,, \quad \sigma_4 = \frac{\varepsilon_0\,[\,\varepsilon\, V_1 + (\,\varepsilon + 1\,)\, V_2\,]}{d\,(\,\varepsilon + 2\,)}\,.$$

Отношение зарядов пластин 4 и 1 равно:

$$x = \frac{q_4}{q_1} = \frac{\sigma_4}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon\, V_1 + (\,\varepsilon + 1\,)\, V_2}{\varepsilon\,(\,2\,V_1 + V_2\,)} = 0{,}64\,.$$

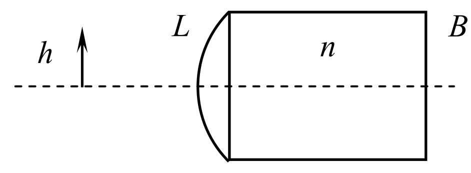
Ответ:

$$x = \frac{\varepsilon\, V_1 + (\,\varepsilon + 1\,)\, V_2}{\varepsilon\,(\,2\,V_1 + V_2\,)} = 0{,}64\,.$$

Критерии

1. Правильно записаны напряжённости электрического поля между пластинами (+2 балла).
2. Получены правильные уравнения, связывающие плотности заряда с напряжениями (+2 балла).
3. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

Задача 5. Круговой цилиндр длиной $s = 70$ см закрыт с левого торца тонкой плосковыпуклой линзой L, обращённой плоской стороной внутрь цилиндра. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью цилиндра, фокусное расстояние линзы в воздухе $F = 20$ см. Правый торец цилиндра закрыт экраном B, изготовленным из тонкого матового стекла. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. Слева от линзы, перпендикулярно её оптической оси, расположена тонкая светящаяся стрелка высотой $h = 15$ мм. Изображение стрелки получено на матовом экране. Найдите высоту изображения стрелки H. Ответ выразите в миллиметрах и округлите до десятых.



Возможное решение

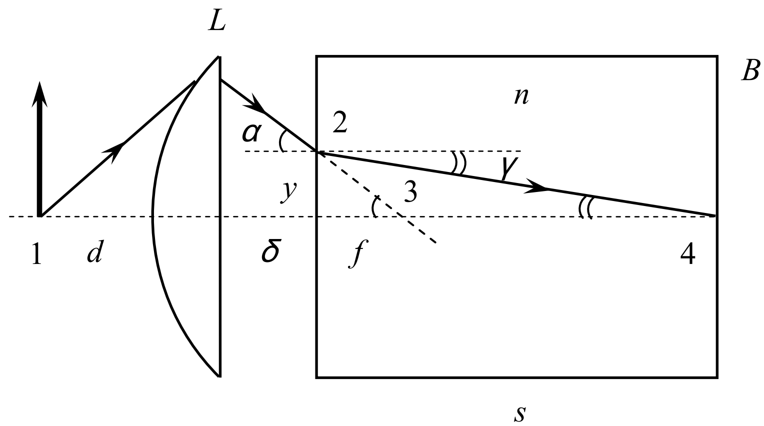


Рисунок 1

Будем считать, что плоская сторона линзы и левый торец цилиндра с водой разделены узким воздушным промежутком шириной δ (рисунок 1). В конечных результатах эту ширину следует положить равной нулю. Найдём сначала расстояние d от стрелки до линзы. Для этого рассмотрим произвольный луч, испущенный из основания стрелки (точка 1) под малым углом к оптической оси. Если бы не было цилиндра с водой, то, пройдя через линзу, луч пересёк бы оптическую ось в точке 3. Обозначим через f расстояние от этой точки до линзы. Имеем:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f}.$$

Реально, справа от линзы луч выходит в воздушный промежуток, падает на границу раздела воздуха и воды в точке 2, преломляется и попадает в точку 4 на экране. Эта точка является изображением основания стрелки. Рассмотрим преломление луча в точке 2. Обозначим через α и γ углы падения и преломления и запишем закон преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n\,.$$

Угол α следует считать малым, поскольку только в этом случае справедлива стандартная формула линзы. Из закона преломления следует, что угол γ также мал. Заменяя синусы на углы, получаем:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = n\,.$$

Обозначим через y расстояние от оптической оси до точки 2. Тогда

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{f-\delta}\,, \quad \gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{y}{s} \quad \longrightarrow \quad \frac{s}{f-\delta} = n\,.$$

Полагая $\delta = 0$, получаем:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{s}\,, \qquad \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{n}{s}\,.$$

Рассмотрим теперь луч, испущенный из верхнего конца стрелки и проходящий через оптический центр линзы (рисунок 2). Обозначим через α_1 малый угол, который этот луч образует с оптической осью. Поскольку луч, идущий через

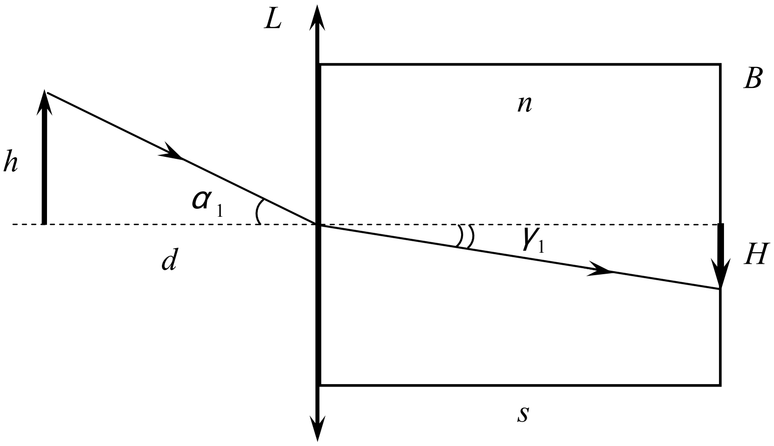


Рисунок 2

оптический центр тонкой линзы, не преломляется, угол падения этого луча на плоскую границу раздела воздуха и воды также равен α_1. После преломления луч попадает на экран в точку, которая является изображением верхнего конца стрелки. Обозначим через γ_1 угол преломления и снова запишем закон преломления для малых углов:

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = n\,, \qquad \alpha_1 = n\,\gamma_1\,.$$

Далее имеем:

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{d}\,, \quad \gamma_1 \approx \operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{H}{s} \quad \longrightarrow \quad \frac{h}{d} = \frac{nH}{s}\,.$$

Подставляя сюда найденное выше значение $1/d$, находим высоту изображения H:

$$H = \frac{hs}{nd} = \frac{hs}{n}\left(\frac{1}{F} - \frac{n}{s}\right) = h\left(\frac{s}{nF} - 1\right) = 24{,}5 \text{ мм.}$$

Ответ:

$$H = h\left(\frac{s}{nF} - 1\right) = 24{,}5 \text{ мм.}$$

Критерии

1. Правильно записана формула тонкой линзы (+1 балл).
2. Правильно записан закон преломления для малых углов (+1 балл).
3. Получены правильные выражения для углов через линейные размеры (+1 балл).
4. Правильно найдено расстояние от светящейся стрелки до линзы (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).