Задача 1. Возбуждённое ядро N_1^* сталкивается с первоначально покоящимся ядром N_2 и переходит в невозбуждённое состояние: $N_1^* + N_2 \to N_1 + N_2$. При этом внутренняя энергия ядра N_1 уменьшается на положительную величину ΔE. Максимально возможное значение угла между импульсами ядер N_1^* и N_1, совместимое с законами сохранения импульса и энергии, равно $\vartheta_m = 45°$. Отношение масс ядер N_1 и N_2 равно $n = m_1/m_2 = 4$. Найдите отношение x величины ΔE к начальной кинетической энергии K_0 ядра N_1^*: $x = \Delta E/K_0$.

Возможное решение

Пусть $\overrightarrow{p_0}$ — начальный импульс ядра N_1^*, $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ — конечные импульсы ядер. Обозначим через E_0 внутреннюю энергию ядра N_1 после столкновения. Тогда до столкновения внутренняя энергия ядра N_1^* равна $E_0 + \Delta E$. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{p_0^2}{2m_1} + E_0 + \Delta E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + E_0 \quad \longrightarrow \quad 1 + \frac{\Delta E}{K_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2,$$

$K_0 = p_0^2/2m_1$ — начальная кинетическая энергия ядра N_1^*. Обозначим:

$$n = \frac{m_1}{m_2}, \quad x = \frac{\Delta E}{K_0}.$$

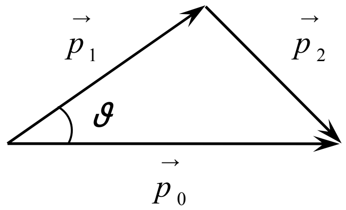
Тогда:

$$1 + x = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + n\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2.$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}.$$

Изобразим это равенство в виде треугольника; ϑ — угол между импульсами ядер N_1^* и N_1.



По теореме косинусов имеем:

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0\,p_1\cos\vartheta \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - 2\left(\frac{p_1}{p_0}\right)\cos\vartheta.$$

Получаем:

$$1 + x = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + n + n\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - 2n\left(\frac{p_1}{p_0}\right)\cos\vartheta,$$

$$(n+1)\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - 2n\left(\frac{p_1}{p_0}\right)\cos\vartheta + (n - 1 - x) = 0.$$

Введём новую переменную:

$$y = \frac{p_1}{p_0} > 0.$$

Для y имеем квадратное уравнение:

$$(n+1)\,y^2 - 2n\,y\cos\vartheta + (n - 1 - x) = 0.$$

Корни уравнения:

$$y = \frac{2n\cos\vartheta \pm \sqrt{D}}{2\,(n+1)}\,.$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = 4n^2\cos^2\vartheta - 4\,(n+1)\,(n-1-x) = 4\,(\,-n^2\sin^2\vartheta + 1 + (n+1)\,x\,)\,.$$

Условие существования действительных корней:

$$D \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \sin^2\vartheta \leq \frac{1+(n+1)\,x}{n^2}\,.$$

Если правая часть последнего равенства меньше единицы, то имеется максимальное значение угла ϑ_m:

$$\sin^2\vartheta_m = \frac{1+(n+1)\,x}{n^2}\,.$$

В этом случае:

$$D = 0\,, \quad y = \frac{n\cos\vartheta_m}{n+1}\,.$$

Так как $y > 0$, угол ϑ_m острый. Получаем:

$$\sin\vartheta_m = \frac{\sqrt{1+(n+1)\,x}}{n}\,.$$

В рассматриваемой задаче значение ϑ_m задано. Выразим через него отношение x:

$$x = \frac{n^2\sin^2\vartheta_m - 1}{n+1} = \frac{1}{5}\left(16\cdot\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{7}{5} = 1{,}4\,.$$

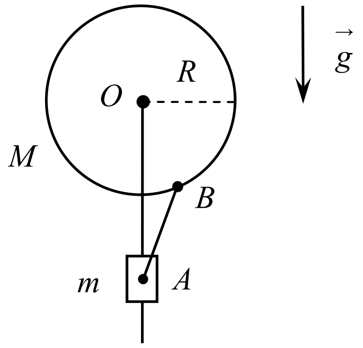
Ответ:

$$x = \frac{n^2\sin^2\vartheta_m - 1}{n+1} = 1{,}4\,.$$

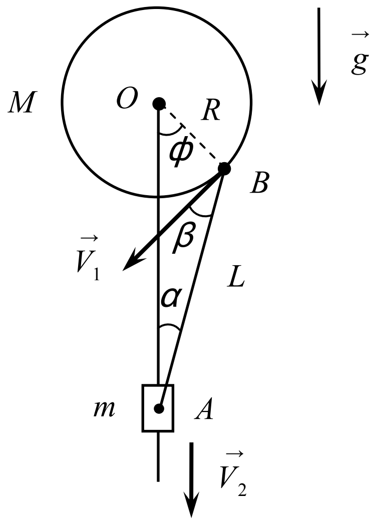
Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии (+2 балла).
2. Правильно записан закон сохранения импульса (+2 балла).
3. Получено правильное квадратное уравнение для конечного импульса налетающего ядра (+2 балла).
4. Правильно сформулировано условие для определения максимального угла рассеяния (+3 балла).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

Задача 2. Груз массой $m = 10$ г может скользить по неподвижному вертикальному стержню. На верхнем конце стержня, в точке O, закреплена горизонтальная ось, вокруг которой может вращаться тонкий обруч с невесомыми спицами. Масса обруча $M = 90$ г равномерно распределена по его длине, радиус обруча $R = 20$ см. Обруч и груз соединены невесомым жёстким стержнем AB, который может свободно поворачиваться вокруг точек крепления A и B. Длина стержня $L = AB = 16$ см. В положении равновесия обруч расположен так, что стержень AB вертикален. Найдите период T колебаний системы, возникающих при малых отклонениях обруча от этого положения. Груз считайте материальной точкой, трение не учитывайте. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Выведем систему из положения равновесия. Например, отклоним обруч вправо на малый угол и отпустим. Обруч начнёт вращаться по часовой стрелке, а груз будет опускаться вниз. В качестве координаты, определяющей конфигурацию системы, выберем угол φ, который радиус OB образует с вертикалью. Угол OAB обозначим через α. Пусть $\overrightarrow{V_1}$ — скорость точки B, $\overrightarrow{V_2}$ — скорость груза. Вектор $\overrightarrow{V_1}$ перпендикулярен радиусу OB и образует угол β с направлением стержня AB. Выразим углы α и β через φ. Запишем теорему синусов для треугольника AOB:

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin\varphi} \quad \longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{R}{L}\sin\varphi\,.$$

Угол φ предполагается малым. Поэтому угол α также мал. Заменяя синусы на углы, получаем:

$$\alpha = \frac{R}{L}\,\varphi\,.$$

Углы треугольника AOB равны α, φ и $90^\circ + \beta$. Имеем:

$$\alpha + \varphi + 90^\circ + \beta = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad \beta = 90^\circ - (\,\alpha + \varphi\,) = 90^\circ - \left(1 + \frac{R}{L}\right)\varphi\,.$$

Запишем механическую энергию системы:

$$E = K + U\,,$$

K и U — кинетическая и потенциальная энергии. Учитывая, что абсолютная величина скоростей всех точек обруча равна V_1, имеем:

$$K = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2}\left[1 + \frac{m}{M}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right].$$

Рассмотрим отношение скоростей V_2/V_1. Так как длина стержня AB не меняется при движении, проекции скоростей $\overrightarrow{V_1}$ и $\overrightarrow{V_2}$ на направление стержня совпадают:

$$V_1 \cos\beta = V_2 \cos\alpha \quad\longrightarrow\quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,.$$

Для малых φ имеем:

$$\cos\beta = \sin\left(1 + \frac{R}{L}\right)\varphi \approx \left(1 + \frac{R}{L}\right)\varphi \ll 1\,, \qquad \cos\alpha = \cos\left(\frac{R}{L}\varphi\right) \approx 1\,.$$

Таким образом, для малых отклонений отношение V_2/V_1 мало и им можно пренебречь. Получаем, что основной вклад в кинетическую энергию системы даёт вращение обруча:

$$K = \frac{MV_1^2}{2} = \frac{MR^2\omega^2}{2}\,,$$

ω — угловая скорость вращения: $V_1 = \omega R$.

Рассмотрим потенциальную энергию системы. Поскольку потенциальная энергия обруча не меняется при движении, её можно не учитывать. В положении равновесия груз находится на высоте $R + L$ под точкой O. В произвольном положении эта высота равна $R\cos\varphi + L\cos\alpha$. Принимая потенциальную энергию груза в положении равновесия за нуль, имеем:

$$U = mg\,(\,R + L - R\cos\varphi - L\cos\alpha\,) = mg\,[\,R\,(\,1 - \cos\varphi\,) + L\,(\,1 - \cos\alpha\,)\,]\,.$$

Для малых углов:

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi^2}{2}\,, \qquad 1 - \cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2} = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\varphi^2}{2}\,.$$

Получаем:

$$U = mg\left[R\,\frac{\varphi^2}{2} + L\left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\varphi^2}{2}\right] = \frac{mgR\,\varphi^2}{2}\left(1 + \frac{R}{L}\right),$$

$$E = \frac{MR^2\omega^2}{2} + \frac{mgR\,\varphi^2}{2}\left(1 + \frac{R}{L}\right).$$

Последнее выражение подобно выражению для энергии груза массой m_0, колеблющегося на пружине жёсткости k:

$$E = \frac{m_0V^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,.$$

Роль координаты x играет угол φ, а роль скорости V — угловая скорость ω (скорость изменения координаты φ). Сделав в формуле периода колебаний груза на пружине замены

$$m_0 \to MR^2, \qquad k \to mgR\left(1 + \frac{R}{L}\right),$$

находим период малых колебаний нашей системы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{MRL}{mg\,(R + L)}} = 1{,}8\ \text{с}\,.$$

Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{MRL}{mg\,(R + L)}} = 1{,}8\ \text{с}\,.$$

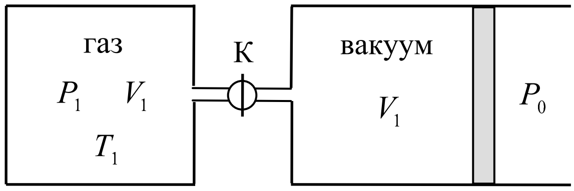
Критерии

1. Правильно найдены соотношения между углами (+1 балл).
2. Показано, что для малых отклонений скорость груза мала (+2 балла).
3. Правильно записана кинетическая энергия для малых отклонений (+2 балла).
4. Правильно записана потенциальная энергия для малых отклонений (+2 балла).
5. Правильно использована аналогия с колебаниями груза на пружине (+2 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

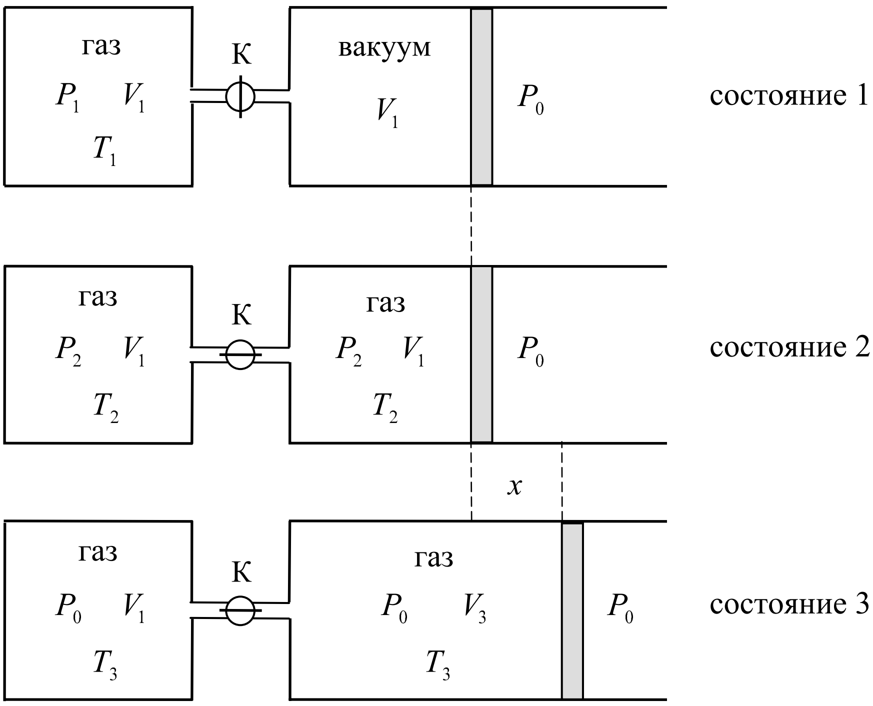
Задача 3. Сосуд постоянного объёма $V_1 = 2{,}5$ л соединён с длинным горизонтальным цилиндром короткой трубкой с краном К. Правый торец цилиндра открыт в окружающую среду, давление которой $P_0 = 10$ кПа постоянно. В цилиндре может свободно двигаться поршень площадью $S = 100$ см^2. В начальном состоянии 1 кран закрыт и в сосуде находится идеальный одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = 50$ кПа. При этом поршень закреплён и область цилиндра, лежащая слева от поршня, откачана до глубокого вакуума. Объём этой области также равен V_1. Кран открывают, и газ переходит в промежуточное равновесное состояние 2, заполняя объём $2\,V_1$ (поршень по-прежнему закреплён). После этого, оставив кран открытым, поршень отпускают и газ переходит в конечное равновесное состояние 3. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите следующие величины:

1. температуру газа T_2 в промежуточном состоянии 2,
2. температуру газа T_3 в конечном состоянии 3,
3. расстояние x, на которое переместился поршень при переходе газа из состояния 2 в состояние 3.

Объём трубки с краном не учитывайте.



Возможное решение



Запишем первое начало термодинамики для перехода газа из состояния 1 в состояние 2:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu R T_2 - \frac{3}{2}\,\nu R T_1 + A_{12}\,,$$

ν — число молей газа, R — универсальная газовая постоянная, A_{12} — работа силы давления газа на поршень. Так как поршень не перемещается, работа равна нулю:

$$A_{12} = 0\,.$$

Отсюда следует, что температура газа не меняется:

$$T_2 = T_1 = 300 \text{ К}\,.$$

Вычислим давление газа P_2 в состоянии 2:

$$\begin{cases} P_1 \cdot V_1 &= \nu R T_1 \\ P_2 \cdot 2V_1 &= \nu R T_1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad P_2 = \frac{P_1}{2} = 25 \text{ кПа}\,.$$

Так как $P_2 > P_0$, сразу после освобождения поршень начнёт двигаться вправо. Запишем первое начало термодинамики для перехода газа из состояния 2 в состояние 3:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu R T_3 - \frac{3}{2}\,\nu R T_1 + A_{\,23}\,,$$

$A_{\,23}$ — работа силы давления газа на поршень. Запишем также уравнение баланса энергии для поршня. Поскольку механическая энергия поршня не меняется, имеем:

$$0 = A_{\,23} + A_0\,,$$

A_0 — работа постоянной силы давления окружающей среды:

$$A_0 = -P_0 S x = -P_0\,(\,V_3 - V_1\,)\,,$$

S и x — площадь и перемещение поршня, V_3 — объём газа в цилиндре справа от крана. Получаем:

$$A_{\,23} = -A_0 = P_0 V_3 - P_0 V_1\,.$$

Используя уравнение состояние газа, имеем:

$$P_0\,(\,V_1 + V_3\,) = \nu R T_3 \quad \longrightarrow \quad P_0 V_3 = \nu R T_3 - P_0 V_1\,,$$

$$P_0 V_1 = \frac{P_0}{P_1}\,P_1 V_1 = \frac{P_0}{P_1}\,\nu R T_1\,,$$

$$A_{\,23} = \nu R T_3 - 2P_0 V_1 = \nu R T_3 - \frac{2P_0}{P_1}\,\nu R T_1\,.$$

Подставляя этот результат в первое начало термодинамики, находим температуру T_3:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu R T_3 - \frac{3}{2}\,\nu R T_1 + \nu R T_3 - \frac{2P_0}{P_1}\,\nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{5}{2}\,T_3 = T_1\left(\frac{3}{2} + \frac{2P_0}{P_1}\right),$$

$$T_3 = \frac{T_1}{5}\left(3 + \frac{4P_0}{P_1}\right) = 228 \text{ K}\,.$$

Найдём перемещение поршня x:

$$x = \frac{V_3 - V_1}{S}\,,$$

$$V_3 = \frac{\nu R T_3}{P_0} - V_1 = \frac{\nu R T_1}{5P_0}\left(3 + \frac{4P_0}{P_1}\right) - V_1 = \frac{P_1 V_1}{5P_0}\left(3 + \frac{4P_0}{P_1}\right) - V_1 = \frac{V_1}{5}\left(\frac{3\,P_1}{P_0} - 1\right),$$

$$V_3 - V_1 = \frac{V_1}{5}\left(\frac{3\,P_1}{P_0} - 1\right) - V_1 = \frac{3\,V_1}{5}\left(\frac{P_1}{P_0} - 2\right),$$

$$x = \frac{3\,V_1}{5\,S}\left(\frac{P_1}{P_0} - 2\right) = 45 \text{ см}\,.$$

Ответ:

$$T_2 = T_1 = 300 \text{ K}\,,$$

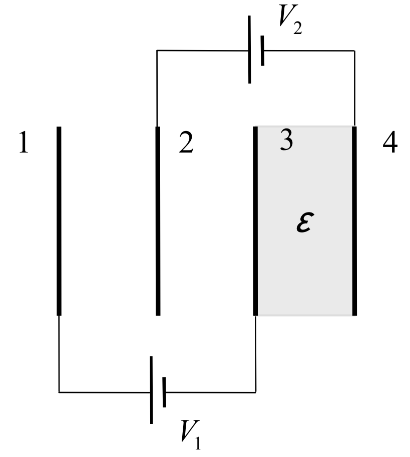
$$T_3 = \frac{T_1}{5}\left(3 + \frac{4P_0}{P_1}\right) = 228 \text{ K}\,,$$

$$x = \frac{3\,V_1}{5\,S}\left(\frac{P_1}{P_0} - 2\right) = 45 \text{ см}\,.$$

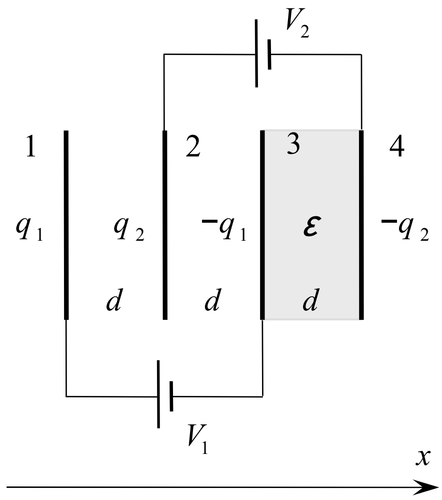
Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода газа из состояния 1 в состояние 2 (+2 балла).
2. Правильно найдена температура газа в состоянии 2 (+1 балл).
3. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода газа из состояния 2 в состояние 3 (+2 балла).
4. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
5. Правильно найдена работа газа при переходе из состояния 2 в состояние 3 (+2 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры газа (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для перемещения поршня (+1 балл).

Задача 4. Четыре одинаковые незаряженные металлические пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Всё пространство между пластинами 3 и 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Пластины 1 и 3 соединяют тонким проводом через батарею с ЭДС $V_1 = 12$ В, а пластины 2 и 4 — через батарею с ЭДС $V_2 = 4{,}5$ В. Найдите отношение $x = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 — установившиеся заряды пластин 1 и 2.



Возможное решение



Обозначим через q_1 и q_2 заряды пластин 1 и 2. Тогда заряды пластин 3 и 4 равны соответственно $-q_1$ и $-q_2$. Введём поверхностные плотности заряда на пластин 1 и 2:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S}, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{S},$$

S — площадь пластин. Плотности заряда на пластинах 3 и 4 равны $-\sigma_1$ и $-\sigma_2$. Направим ось x от пластины 1 к пластине 4 и рассмотрим проекцию вектора напряжённости электрического поля на эту ось. Между пластинами 1 и 2 имеем:

$$E_{1x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2\,) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0},$$

ε_0 — электрическая постоянная. Между пластинами 2 и 3:

$$E_{2x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2\,) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Между пластинами 3 и 4:

$$E_{3x} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_2\,) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\,\varepsilon}.$$

Мысленно перенесём положительный пробный заряд e с пластины 1 на пластину 3 вдоль оси x. Работу A силы электрического поля можно записать двумя способами:

$$A = e\,(\,\varphi_1 - \varphi_3\,) = e\,(\,E_{1x}\,d + E_{2x}\,d\,)\,,$$

φ_1 и φ_3 — потенциалы пластин, d — расстояние между пластинами. Учитывая, что $\varphi_1 - \varphi_3 = V_1$, и используя полученные выше выражения для напряжённостей, получаем:

$$V_1 = \frac{\sigma_1\,d}{\varepsilon_0} + \frac{(\,\sigma_1 + \sigma_2\,)\,d}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\,\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0\,V_1}{d}\,.$$

Перенесём теперь пробный заряд с пластины 2 на пластину 4. Для работы силы электрического поля имеем:

$$A = e\,(\,\varphi_2 - \varphi_4\,) = e\,(\,E_{2x}\,d + E_{3x}\,d\,)\,,$$

Учитывая,что $\varphi_2 - \varphi_4 = V_2$, получаем:

$$V_2 = \frac{(\,\sigma_1 + \sigma_2\,)\,d}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2\,d}{\varepsilon_0\,\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon\,\sigma_1 + (\,\varepsilon + 1\,)\,\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,V_2}{d}\,.$$

Из полученных уравнений находим плотности σ_1 и σ_2:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0\,[\,(\,\varepsilon + 1\,)\,V_1 - \varepsilon\,V_2\,]}{d\,(\,\varepsilon + 2\,)}\,, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,(\,2\,V_2 - V_1\,)}{d\,(\,\varepsilon + 2\,)}\,.$$

Отношение зарядов пластин 1 и 2 равно:

$$x = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{(\,\varepsilon + 1\,)\,V_1 - \varepsilon\,V_2}{\varepsilon\,(\,2\,V_2 - V_1\,)} = -3{,}5\,.$$

Реально заряд q_2 оказывается отрицательным.

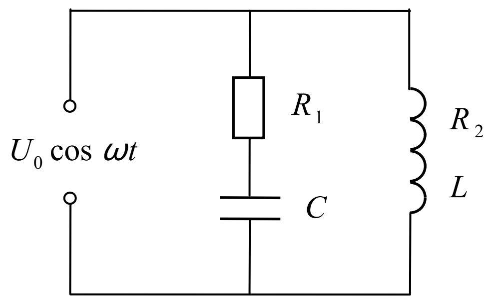
Ответ:

$$x = \frac{(\,\varepsilon + 1\,)\,V_1 - \varepsilon\,V_2}{\varepsilon\,(\,2\,V_2 - V_1\,)} = -3{,}5\,.$$

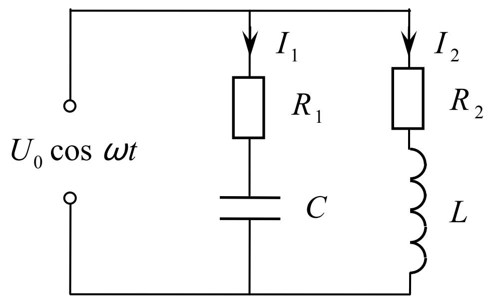
Критерии

1. Правильно записаны напряжённости электрического поля между пластинами (+4 балла).
2. Получены правильные уравнения, связывающие плотности заряда с напряжениями (+3 балла).
3. Правильно найдены плотности заряда на пластинах (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

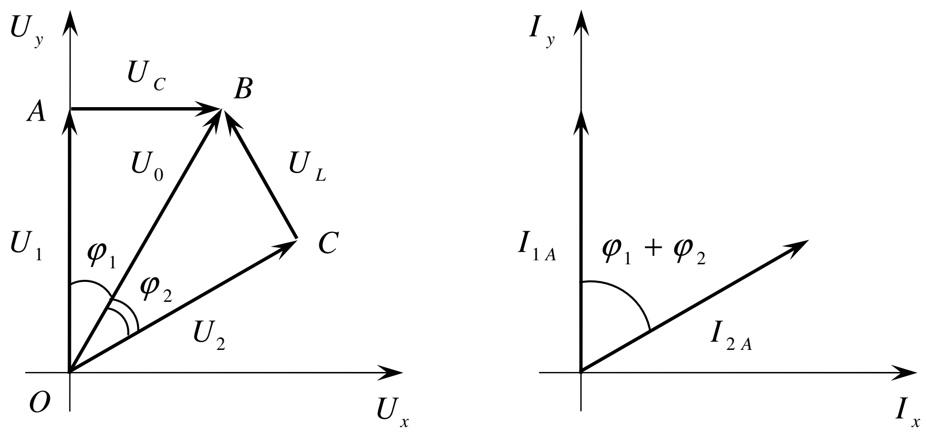
Задача 5. Цепь переменного тока состоит из двух параллельных ветвей. Первая ветвь — сопротивление $R_1 = 2{,}5$ кОм и конденсатор ёмкостью $C = 4$ мкФ, вторая — катушка сопротивлением $R_2 = 0{,}1$ кОм и индуктивностью $L = 0{,}15$ Г. На вход цепи подаётся напряжение $U_0 \cos\omega t$ с амплитудой $U_0 = 12$ В и круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = 50$ Гц. В установившемся режиме ток I_1, текущий через конденсатор, периодически обращается в нуль. Найдите, чему в этом случае равно абсолютное значение тока I_2, текущего через катушку.



Возможное решение



Перерисуем исходную схему, отдельно изобразив на ней сопротивление катушки R_2.



Рассмотрим векторные диаграммы напряжений и токов для нашей цепи. Диаграмма напряжений показана на левом рисунке. U_1 и U_2 — векторы напряжений на сопротивлениях R_1 и R_2, U_C — вектор напряжения на конденсаторе, U_L — вектор напряжения на катушке, U_0 — вектор напряжения, подаваемого на вход цепи. Длины этих векторов равны амплитудам напряжений на соответсвующих элементах. Вектор U_C повёрнут вправо на угол 90° по отношению к вектору U_1 (напряжение на конденсаторе отстаёт по фазе от напряжения на сопротивлении R_1 на 90°). Сумма векторов U_1 и U_C равна вектору U_0. Вектор U_L повёрнут влево на угол 90° по отношению к вектору U_2 (напряжение на катушке опережает по фазе напряжения на сопротивлении R_2 на 90°). Сумма векторов U_2 и U_L также равна вектору U_0. На правом рисунке показана диаграмма токов. Векторы I_{1A} и I_{2A} представляют собой амплитуды токов I_1 и I_2. Эти векторы сонаправлены векторам U_1 и U_2. Обе диаграммы как целое равномерно вращаются относительно неподвижных осей против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Угол между вектором U_0 и осью U_x равен ωt. Поскольку приложенное напряжение зависит от времени по закону $U_0\cos\omega t$, напряжения на отдельных элементах цепи и токи в ветвях получаются проецированием соответствующих векторов на горизонтальные оси U_x и I_x.

Представленные выше диаграммы соответствуют моменту времени, когда ток I_1 равен нулю. В этом случае векторы I_{1A} и U_1 направлены вдоль вертикальных осей I_y и U_y. Их проекции на горизонтальные оси равны нулю. Обозначим через φ_1 угол между векторами U_1 и U_0, а через φ_2 угол между U_2 и U_0. Тогда угол между U_1 и U_2 равен сумме $(\varphi_1+\varphi_2)$. Эта же сумма определяет угол между векторами I_{1A} и I_{2A}. Ток I_2, текущий через катушку, равен:

$$I_2 = I_{2A}\cos(\,90^\circ-\varphi_1-\varphi_2\,) = I_{2A}\sin(\,\varphi_1+\varphi_2\,)\,.$$

Найдём входящие сюда величины. Амплитуды напряжений U_2 и U_L связаны с амплитудой тока I_{2A} следующими соотношениями:

$$U_2 = I_{2A}\cdot R_2\,,\quad U_L = I_{2A}\cdot\omega L\,,$$

ωL — индуктивное сопротивление. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике OBC имеем:

$$U_0^2 = U_2^2+U_L^2 = I_{2A}^2\,\left(\,R_2^2+(\omega L)^2\,\right)\quad\longrightarrow\quad I_{2A} = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2+(\omega L)^2}}\,.$$

Из того же треугольника находим угол φ_2:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{U_L}{U_2} = \frac{\omega L}{R_2}\quad\longrightarrow\quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_2}\right) = 25{,}2^\circ\,.$$

Угол φ_1 выразим из прямоугольного треугольника OAB:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{U_C}{U_1}\,.$$

Амплитуды напряжений U_1 и U_C связаны с амплитудой тока I_{1A}:

$$U_1 = I_{1A}\cdot R_1\,,\quad U_C = \frac{I_{1A}}{\omega\,C}\,,$$

$1/(\omega\,C)$ — ёмкостное сопротивление. Получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{R_1\,\omega\,C}\quad\longrightarrow\quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{R_1\,\omega\,C}\right) = 17{,}7^\circ\,.$$

Окончательно ток I_2 равен:

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2+(\omega\,L)^2}}\,\sin(\,\varphi_1+\varphi_2\,) = 74\ \text{мА}\,.$$

Ответ:

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2+(\omega\,L)^2}}\,\sin(\,\varphi_1+\varphi_2\,) = 74\ \text{мА}\,;$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{R_1\omega C} = 17{,}7^\circ\,,\quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R_2} = 25{,}2^\circ\,.$$

Критерии

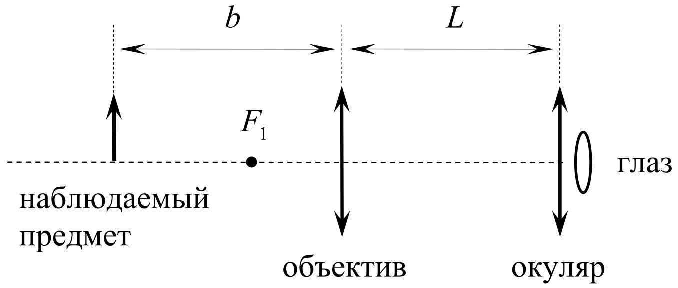
1. Правильно нарисована векторная диаграмма (+4 балла).
2. Правильно записаны амплитуды напряжений на катушке и сопротивлении R_2 (+1 балл).
3. Правильно найдена амплитуда тока, текущего через катушку (+1 балл).
4. Правильно записаны амплитуды напряжений на конденсаторе и сопротивлении R_1 (+1 балл).
5. Правильно найдены углы между векторами напряжений (+2 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).

Задача 6. Микроскоп состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 0,5$ см, и окуляра — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 5$ см. Наблюдаемый предмет находится на расстоянии $b = 0,52$ см от объектива. Считая, что глаз наблюдателя расположен вплотную к окуляру и аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 20$ см, найдите следующие величины:

1. расстояние L между объективом и окуляром;
2. угловое увеличение микроскопа k, которое определяется следующим отношением: $k = \beta/\alpha$, где β — угол, под которым наблюдатель видит предмет в микроскоп, α — угол, под которым наблюдатель видит тот же предмет невооружённым глазом. В обоих случаях глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения.

Все углы считайте малыми.

Подсказка: объектив микроскопа строит изображение предмета, которое наблюдатель рассматривает в окуляр как в лупу.



Возможное решение

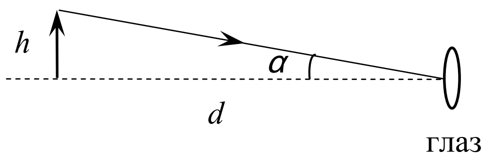


Рисунок 1

На рисунке 1 показан предмет в виде стрелки высотой h, расположенной на расстоянии наилучшего зрения d от невооружённого глаза. Глаз видит предмет под малым углом

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}.$$

Выразим отсюда h:

$$h = \alpha\, d.$$

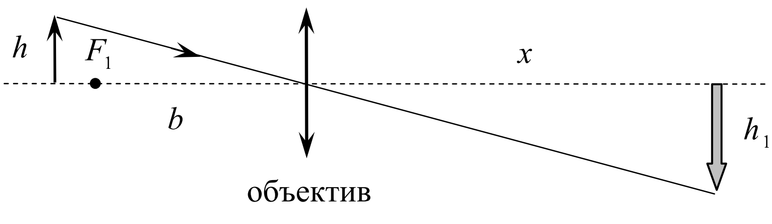


Рисунок 2

При наблюдении в микроскоп предмет располагается немного дальше фокуса объектива на расстоянии $b > F_1$ (рисунок 2). Объектив строит первичное действительное изображение предмета, которое является перевёрнутым. Обозначим через x расстояние от этого изображения до объектива, и через h_1 его высоту. Найдём x из формулы линзы:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_1} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{b\,F_1}{b - F_1}\,.$$

Высоту h_1 находим из подобия треугольников:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x}{b} \quad \longrightarrow \quad h_1 = \frac{h\,x}{b} = \frac{\alpha\,d\,F_1}{b - F_1}\,.$$

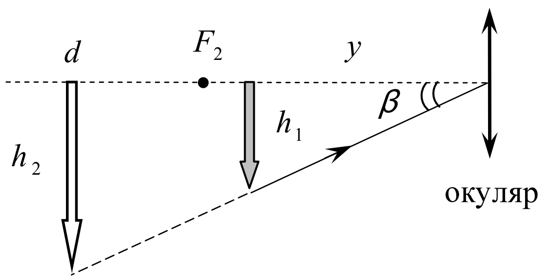


Рисунок 3

Первичное изображение играет роль действительного источника света для наблюдателя, который рассматривает его в окуляр как в лупу. При этом окуляр располагается на расстоянии $y < F_2$ от первичного изображения и строит мнимое изображение предмета высотой h_2 (рисунок 3). Свет, выходящий из окуляра и попадающий в глаз наблюдателя, устроен так, как будто он испускается предметом, совпадающим с мнимым изображением. Поэтому это изображение расположено на расстоянии наилучшего зрения от окуляра. Таким образом, при наблюдении в микроскоп наблюдатель видит перевёрнутое изображение предмета под углом зрения β.

Найдём расстояние y и угол β. По формуле линзы, записанной для окуляра, получаем:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{d\,F_2}{d + F_2}\,.$$

Для угла β имеем два выражения:

$$\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{h_1}{y} = \frac{h_2}{d}\,.$$

Воспользуемся первым из них, поскольку величины h_1 и y уже найдены:

$$\beta = \frac{h_1}{y} = \frac{\alpha\,d\,F_1}{b - F_1} \cdot \frac{d + F_2}{d\,F_2} = \frac{\alpha\,F_1\,(d + F_2)}{(b - F_1)\,F_2}\,.$$

Расстояние L между объективом и окуляром равно:

$$L = x + y = \frac{b\,F_1}{b - F_1} + \frac{d\,F_2}{d + F_2}\,.$$

Угловое увеличение микроскопа:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1\,(d + F_2)}{(b - F_1)\,F_2} = \frac{F_1}{b - F_1}\left(\frac{d}{F_2} + 1\right)\,.$$

Подставим числовые значения в сантиметрах:

$$L = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}5}{0{,}02} + \frac{20 \cdot 5}{25} = 13 + 4 = 17\ \text{см}\,,$$

$$k = \frac{0{,}5}{0{,}02}\left(\frac{20}{5} + 1\right) = 125\,.$$

Ответ:

$$L = \frac{b\,F_1}{b - F_1} + \frac{d\,F_2}{d + F_2} = 17\ \text{см}\,,$$

$$k = \frac{F_1}{b - F_1}\,\left(\frac{d}{F_2} + 1\right) = 125\,.$$

Критерии

1. Правильно записано выражение для угла зрения при наблюдении предмета невооружённым глазом (+1 балл).
2. Правильно записана формула линзы для объектива (+1 балл).
3. Правильно найдено расстояние от объектива до первичного изображения (+1 балл).
4. Правильно найден размер первичного изображения (+1 балл).
5. Правильно записана формула линзы для окуляра (+1 балл).
6. Правильно найдено расстояние от первичного изображения до окуляра (+1 балл).
7. Правильно найден угол зрения при наблюдении предмета в микроскоп (+2 балла).
8. Получены правильные буквенный и числовой ответы для расстояния между объективом и окуляром (+1 балл).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для углового увеличения микроскопа (+1 балл).