

Стереометрия 2023

Задание 1

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K , L , M и N лежат на ребрах AC , AD , DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ квадрат со стороной 2. $AK : KC = 2 : 3$.

а) Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если объем тетраэдра равен 25.

Задание 2

Все боковые стороны четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны AD стороне основания $ABCD$. Стороны AB , BC и CD вдвое меньше стороны AD .

а) Докажите, что высота пирамиды, опущенная из вершины S , проходит через середину AD .

б) В каком отношении, считая от точки S , плоскость BNM делит высоту пирамиды, если N – середина SC , в точка M делит ребро SD в отношении $1 : 3$, считая от точки S .

Задание 3

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

Задание 4

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. M — точка, которая делит сторону A_1D_1 в отношении $1 : 4$, K — середина DD_1 .

а) Доказать, что $MCK \parallel BD$.

б) Найти тангенс угла между плоскостью MCK и плоскостью основания, если $\angle BAC = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

Задание 5

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причем $BK : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N — середина BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

Задание 6

У тетраэдра $ABCD$ грани ABD и ACD перпендикулярны и являются правильными треугольниками со стороной 10. На рёбрах AB , AD и CD взяли точки K , L и M соответственно так, что $BK = 2$, $AL = 4$ и $DM = 3$.

а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .

б) Найдите длину отрезка, образованного пересечением плоскости KLM с гранью ABC .

Задание 7

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат. Плоскость α пересекает рёбра SA , SB , SC , SD в точках L , K , M и N соответственно, причём $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M — середины рёбер SA и SD .

а) Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как $2 : 3$.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 30° , а площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, а площадь основания пирамиды равна 32 .

Задание 8

Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. Сечение пирамиды — трапеция $KLMN$, причём точки K , L , M и N лежат на рёбрах SB , SA , SD и SC соответственно. Известно, что основания этой трапеции $KL = 4$, $MN = 3$, а $SK : KB = 2 : 1$.

а) Докажите, что точки M и N — середины рёбер SD и SC .

б) Пусть H — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, а SH — высота пирамиды $SABCD$. Найдите SH , если известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48 , а площадь трапеции $KLMN$ равна 24 .

Ответы

1. б) $\frac{27}{5}$ или 5,4

2. б) $\frac{1}{2}$ или 0,5

3. б) $\frac{16}{25}$ или 0,64

4. б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

5. б) $\frac{3\sqrt{37}}{2}$.

6. б) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

7. б) 4

8. б) $\frac{44\sqrt{23}}{7}$