

**1**

Прямая, перпендикулярная стороне  $BC$  ромба  $ABCD$ , пересекает его диагональ  $AC$  в точке  $M$ , а диагональ  $BD$  в точке  $N$ , причём  $AM : MC = 1:2$ , причём  $BN : ND = 1:3$ .

а) Докажите, что прямая  $MN$  делит сторону ромба  $BC$  в отношении  $1 : 4$ .

б) Найдите сторону ромба, если  $MN = \sqrt{12}$ .

**2**

Прямая, перпендикулярная стороне  $AB$  ромба  $ABCD$ , пересекает его диагональ  $AC$  в точке  $K$ , а диагональ  $BD$  в точке  $L$ , причём  $AK : KC = 1:3$ , причём  $BL : LD = 2:1$ .

а) Докажите, что прямая  $KL$  делит сторону ромба  $AB$  в отношении  $1 : 4$ .

б) Найдите сторону ромба, если  $KL = 6$ .

**3**

В прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$  вписана окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ . К этой окружности параллельно прямой  $AB$  проведена касательная, которая пересекает стороны  $BC$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. В треугольник  $CDE$  вписана окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $r$ . Прямые  $OO_1$  и  $AB$  пересекаются в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $AP : PB = \cos \angle ACB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $R = 6$ ,  $r = 4$ .

**4**

В прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$  вписана окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ . К этой окружности параллельно прямой  $AB$  проведена касательная, которая пересекает стороны  $BC$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. В треугольник  $CDE$  вписана окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $r$ . Прямые  $OO_1$  и  $AB$  пересекаются в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $AP : PB = \cos \angle ACB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $R = 5$ ,  $r = 3$ .

**5** В трапеции  $KLMN$  с основаниями  $KN$  и  $ML$  провели биссектрисы углов  $LKN$  и  $LMN$ , которые пересеклись в точке  $P$ . Через точку  $P$  параллельно прямой  $KN$  провели прямую, которая пересекла стороны  $LK$  и  $MN$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . При этом  $AB = KL$ .

- а) Докажите, что трапеция  $KLMN$  равнобедренная.
- б) Найдите  $\cos \angle LKN$ , если  $KP : PM = 2 : 3$ ,  $AP : PB = 1 : 2$ .

**6** В трапеции  $KLMN$  с основаниями  $KN$  и  $ML$  провели биссектрисы углов  $LKN$  и  $LMN$ , которые пересеклись в точке  $P$ . Через точку  $P$  параллельно прямой  $KN$  провели прямую, которая пересекла стороны  $LK$  и  $MN$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . При этом  $AB = KL$ .

- а) Докажите, что трапеция  $KLMN$  равнобедренная.
- б) Найдите  $\cos \angle LKN$ , если  $KP : PM = 4 : 3$ ,  $AP : PB = 3 : 2$ .

**7** На стороне  $BC$  ромба  $ABCD$  отметили точку  $E$  так, что  $BE : EC = 1 : 4$ . Через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$  провели прямую, которая пересекает диагонали  $BD$  и  $AC$  в точках  $R$  и  $M$  соответственно, при этом  $BR : RD = 1 : 3$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $C$ .
- б) Найдите периметр ромба  $ABCD$ , если  $MR = 2\sqrt{3}$ .

**8** На стороне  $BC$  ромба  $ABCD$  отметили точку  $E$  так, что  $BE : EC = 1 : 3$ . Через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$  провели прямую, которая пересекает диагонали  $BD$  и  $AC$  в точках  $R$  и  $M$  соответственно, при этом  $BR : RD = 1 : 2$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $3 : 2$ , считая от вершины  $C$ .
- б) Найдите периметр ромба  $ABCD$ , если  $MR = \sqrt{15}$ .

**9**

В равнобедренной трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  равна  $a$ , а основание  $AD = c$  больше основания  $BC = b$ . Построена окружность, касающаяся сторон  $AB, CD$  и  $AD$ .

- а) Докажите, что если  $b + c > 2a$ , то окружность пересекает сторону  $BC$  в двух точках.
- б) Найдите длину той части отрезка  $BC$ , которая находится внутри окружности, если  $c = 12, b = 10, a = 8$ .

**10**

В равнобедренной трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  равна  $a$ , а основание  $AD = c$  больше основания  $BC = b$ . Построена окружность, касающаяся сторон  $AB, CD$  и  $AD$ .

- а) Докажите, что если окружность не пересекает сторону  $BC$ , то если  $b + c < 2a$ .
- б) Найдите длину той части средней линии трапеции  $ABCD$ , которая находится внутри окружности, если  $c = 12, b = 6, a = 10$ .

**11**

В параллелограмме  $ABCD$  угол  $BAC$  вдвое больше угла  $CAD$ . Биссектриса угла  $BAC$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $L$ . На продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  выбрана такая точка  $E$ , что  $AE = CE$ .

- а) Докажите, что  $AL : AC = AB : BC$ .
- б) Найдите  $EL$ , если  $AC = 21, \operatorname{tg} \angle BCA = 0,4$ .

**12**

В параллелограмме  $ABCD$  угол  $BAC$  вдвое больше угла  $CAD$ . Биссектриса угла  $BAC$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $L$ . На продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  выбрана такая точка  $E$ , что  $AE = CE$ .

- а) Докажите, что  $AB : AL = BC : AC$ .
- б) Найдите  $EL$ , если  $AC = 24, \operatorname{tg} \angle BCA = 0,6$ .

**13** Четырёхугольник  $ABCD$  со сторонами  $BC = 7$  и  $AB = CD = 20$  вписан в окружность радиусом  $R = 16$ .

а) Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.

б) Найдите  $AD$ .

**14** Четырёхугольник  $ABCD$  со сторонами  $BC = 14$  и  $AB = CD = 40$  вписан в окружность радиусом  $R = 25$ .

а) Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.

б) Найдите  $AD$ .

**15** В трапеции  $ABCD$  с меньшим основанием  $BC$  точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  соответственно. В каждый из четырёхугольников  $ABEF$  и  $ECDF$  можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.

б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции  $ABCD$ , если  $AB = 7$ , а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник  $ABEF$ , равен  $2,5$ .

**16** В трапеции  $ABCD$  с меньшим основанием  $BC$  точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  соответственно. В каждый из четырёхугольников  $ABEF$  и  $ECDF$  можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.

б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции  $ABCD$ , если  $BC = 16$ , а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник  $ABEF$ , равен  $7$ .

**17** Окружность с центром в точке  $C$  касается гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  и пересекает его катеты  $AC$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Точка  $D$  – основание высоты, опущенной из вершины  $C$ .  $I$  и  $J$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $BDC$  и  $ACD$ .

а) Докажите, что  $I$  и  $J$  лежат на отрезке  $EF$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $IJ$ , если  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ .

**18** Окружность с центром в точке  $C$  касается гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  и пересекает его катеты  $AC$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Точка  $D$  – основание высоты, опущенной на  $AB$ .  $I$  и  $J$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $BDC$  и  $ACD$ .

а) Докажите, что  $E$  и  $F$  лежат на прямой  $IJ$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $IJ$ , если  $AC = 2\sqrt{3}$ ,  $BC = 2$ .

**19** На сторонах  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , около которого можно описать окружность, отмечены точки  $K$  и  $N$  соответственно. Около четырехугольников  $AKND$  и  $BCNK$  также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника  $ABCD$  равен  $0,25$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является равнобедренной трапецией.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника  $AKND$ , если радиус окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ , равен  $8$ ,  $AK : KB = 2 : 5$ , а  $BC < AD$  и  $BC = 4$ .

**20** На сторонах  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , около которого можно описать окружность, отмечены точки  $K$  и  $N$  соответственно. Около четырехугольников  $AKND$  и  $BCNK$  также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника  $ABCD$  равен  $0,2$ .

а) Докажите, что прямые  $KN$  и  $AD$  параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника  $BCNK$ , если радиус окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ , равен  $7$ ,  $AK : KB = 9 : 10$ , а  $BC < AD$  и  $BC = 10$ .

**21** Точки  $A, B, C, D$  и  $E$  лежат на окружности в указанном порядке, причем  $AE = ED = CD$ , а прямые  $AC$  и  $BE$  перпендикулярны. Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $T$ .

а) Докажите, что прямая  $EC$  пересекает отрезок  $TD$  в его середине.

б) Найдите площадь треугольника  $ABT$ , если  $BD = 6$ ,  $AE = \sqrt{6}$ .

**22** Точки  $A, B, C, D$  и  $E$  лежат на окружности в указанном порядке, причем  $BC = CD = DE$ , а  $AC \perp BE$ . Точка  $K$  – пересечение прямых  $BE$  и  $AD$ .

а) Докажите, что прямая  $CE$  делит отрезок  $KD$  пополам.

б) Найдите площадь треугольника  $ABK$ , если  $AD = 4$ ,  $DC = \sqrt{3}$ .

**23** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $A$  острый. На продолжениях сторон  $AD$  и  $CD$  за точку  $D$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно, причем  $AN = AD$  и  $CM = CD$ .

а) Докажите, что  $BN = BM$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AC = 5$ ,  $\sin \angle BAD = \frac{5}{13}$ .

**24** В параллелограмме  $ABCD$  тангенс угла  $A$  равен 1,5. На продолжениях сторон  $AB$  и  $BC$  параллелограмма за точку  $B$  выбраны точки  $N$  и  $M$  соответственно, причем  $BC = CN$  и  $AB = AM$ .

а) Докажите, что  $DN = DM$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AC = \sqrt{13}$ .

**25** Около окружности с центром  $O$  описана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ .

а) Докажите, что  $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ .

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что  $AB = CD$ , а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет  $\frac{12}{49}$  площади трапеции  $ABCD$ .

**26** Около окружности с центром  $O$  описана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ .

а) Докажите, что треугольник  $AOB$  прямоугольный.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что  $AB = CD$ , а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет  $\frac{16}{81}$  площади трапеции  $ABCD$ .

**27** Точки  $A_1, B_1, C_1$  – середины сторон соответственно  $BC, AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $A_1CB_1, A_1BC_1$  и  $B_1AC_1$ , пересекаются в одной точке.

б) Известно, что  $AB = AC = 13$  и  $BC = 10$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого – центры окружностей, описанных около треугольников  $A_1CB_1, A_1BC_1$  и  $B_1AC_1$ .

**28** Точки  $A_1, B_1, C_1$  – середины сторон соответственно  $BC, AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $A_1CB_1, A_1BC_1$  и  $B_1AC_1$ , пересекаются в одной точке.

б) Известно, что  $AB = AC = 17$  и  $BC = 16$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого – центры окружностей, описанных около треугольников  $A_1CB_1, A_1BC_1$  и  $B_1AC_1$ .

**29** В трапеции  $ABCD$  основание  $AD$  в два раза меньше основания  $BC$ . Внутри трапеции взяли точку  $M$  так, что углы  $BAM$  и  $CDM$  прямые.

а) Докажите, что  $BM = CM$ .

б) Найдите угол  $ABC$ , если угол  $BCD$  равен  $64^\circ$ , а расстояние от точки  $M$  до прямой  $BC$  равно стороне  $AD$ .



**30** Точка  $K$  лежит на отрезке  $AB$ . Прямая, проходящая через точку  $B$ , касается окружности с диаметром  $AK$  в точке  $N$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $BK$  в точке  $M$ . Продолжение отрезка  $NK$  пересекает окружность с диаметром  $BK$  в точке  $P$ .

- а) Докажите, что прямые  $AN$  и  $BP$  параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника  $AKP$ , если  $BM = 1$  и  $MN = 4$ .

**31** Две окружности касаются внутренним образом в точке  $C$ . Вершины  $A$  и  $B$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая  $AC$  вторично пересекает большую окружность в точке  $E$ , а прямая  $BC$  вторично пересекает меньшую окружность в точке  $D$ .

- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BE$  параллельны.
- б) Найдите  $AC$ , если радиусы окружностей равны 3 и 4.

**32** Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке  $C$ . Вершины  $A$  и  $B$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая  $AC$  вторично пересекает большую окружность в точке  $E$ , а прямая  $BC$  вторично пересекает меньшую окружность в точке  $D$ .

- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BE$  параллельны.
- б) Найдите  $BC$ , если радиусы окружностей равны  $\sqrt{15}$  и 15.

**33** В четырёхугольнике  $ABCD$  противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка  $O$ .

а) Докажите, что в четырёхугольник  $ABCD$  можно вписать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если  $AC = 10$ ,  $BD = 26$ .

**34** В четырёхугольнике  $ABCD$  противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка  $O$ .

а) Докажите, что в четырёхугольник  $ABCD$  можно вписать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если  $AC = 12$ ,  $BD = 13$ .

**35** В прямоугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ , а угол  $BDC$  равен  $75^\circ$ . Точка  $P$  лежит вне прямоугольника, а угол  $APB$  равен  $150^\circ$ .

а) Докажите, что углы  $BAO$  и  $POB$  равны.

б) Прямая  $PO$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $F$ . Найдите  $CF$ , если  $AP = 6\sqrt{3}$  и  $BP = 4$ .

**36** В прямоугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ , а угол  $BDC$  равен  $22,5^\circ$ . Точка  $P$  лежит вне прямоугольника, а угол  $BPC$  равен  $135^\circ$ .

а) Докажите, что углы  $BSP$  и  $POB$  равны.

б) Прямая  $PO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $F$ . Найдите  $DF$ , если  $CP = 5\sqrt{2}$  и  $BP = 7$ .

## ОТВЕТЫ

1. б)  $6\sqrt{2}$

2. б)  $6\sqrt{6}$

3. б) 270

4. б)  $166\frac{2}{3}$

5. б) 0,28

6. б)  $-0,296$

7. б)  $24\sqrt{2}$

8. б) 30

9. б)  $2\sqrt{21}$

10. б)  $\sqrt{77}$

11. б) 14,2

12. б) 29,7

13. б) 32

14. б) 42,16

15. б) 9,1

16. б)  $\frac{25\sqrt{1073}}{7}$

17. б)  $6\sqrt{2}$

18. б)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

19. б)  $\frac{2\sqrt{69}}{3}$

20. б)  $\frac{5\sqrt{22}}{4}$

21. б)  $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

22. б)  $\frac{25\sqrt{39}}{64}$

23. б)  $\frac{120}{13}$

24. б) 4

25. б) 6

26. б) 8

27. б)  $\frac{5}{3}$

28. б) 2,4

29. б)  $71^\circ$

30. б)  $3\frac{1}{3}$

31. б) 4,8

32. б) 7,5

33. б)  $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

34. б)  $\frac{6\sqrt{13}}{5}$

35. б)  $\frac{378 - 84\sqrt{3}}{23}$

36. б)  $91(5\sqrt{2} - 7)$