ТИП #1

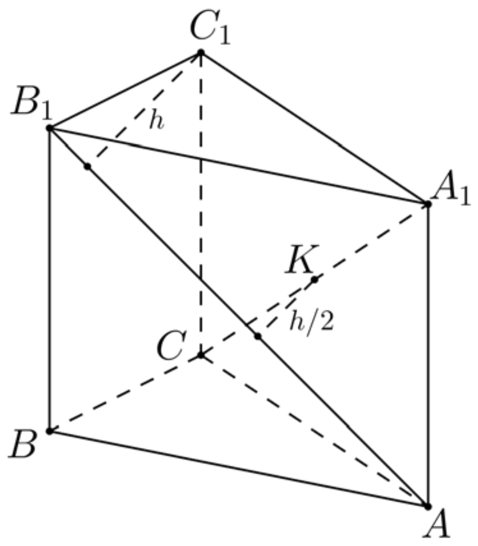
1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 7$, $BC = 8$.

Решение.

а) $CA_1 \perp AB_1 \Longrightarrow CA_1 \perp AC_1$, потому что AC_1 – ортогональная проекция AB_1 на AA_1C_1C. В этом прямоугольнике диагонали оказались перпендикулярными, значит AA_1C_1C – квадрат, откуда $AA_1 = AC$.



б) Отметим точку K – середину AC_1, тогда расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 найдётся как расстояние от точки K до прямой AB_1, т.к. прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1 (поскольку перпендикулярна двум прямым этой плоскости). Это расстояние, по теореме Фалеса, равно половине высоты прямоугольного треугольника AC_1B_1 с прямым углом C_1, проведенной к гипотенузе:

$$\frac{h}{2} = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{28}{9}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 28/9.

ТИП #2

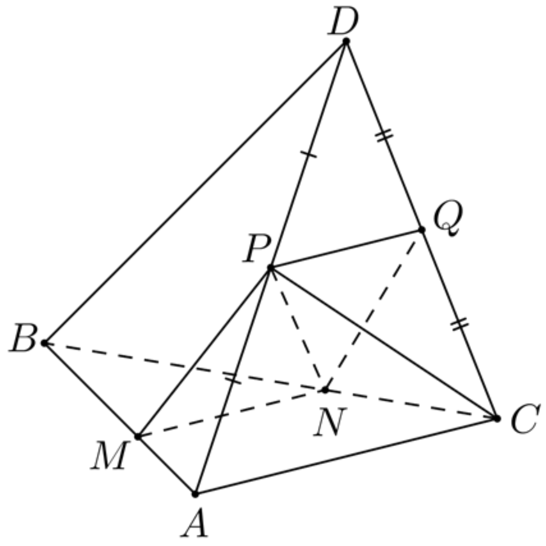
2. Дана треугольная пирамида *DABC*. Точки *M*, *N*, *P*, *Q* лежат на рёбрах *AB*, *BC*, *AD*, *CD*, причем $AM:MB = CN:NB = 1:2$. Точки *P* и *Q* – середины рёбер *DA* и *DC* соответственно.

а) Докажите, что точки *P*, *Q*, *M*, *N* лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость *PQM* разбивает пирамиду.

Решение.

а) $PQ \parallel AC$, потому что PQ – средняя линия треугольника *ADC*; $MN \parallel AC$ по теореме Фалеса. Значит $PQ \parallel MN$ и указанные точки лежат в одной плоскости.



б) Плоскость *PQM* разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник *AMNPQC* состоит из треугольной пирамиды *PCNQ* с основанием *CNQ* и четырёхугольной пирамиды *PACMN* с основанием *ACMN*. Выразим объёмы этих пирамид через *V* – объём исходной пирамиды *DABC*.

Расстояние от точки *P* до плоскости *BCD* вдвое меньше расстояния от точки *A* до той же плоскости, при этом

$$\frac{S_{QCN}}{S_{BCD}} = \frac{CN \cdot CQ}{CB \cdot CD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Значит $V_{PCNQ} = V/12$.

Треугольники *BMN* и *BAC* подобны, причем площадь первого составляет 4/9 от площади второго. Значит

$$\frac{S_{AMNC}}{S_{ABC}} = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1} = \frac{5}{9}.$$

Расстояние от точки *P* до плоскости *ABC* вдвое меньше расстояния от точки *D* то той же плоскости, поэтому $V_{PAMNC} = 5V/18$. Окончательно

$$V_{AMNPQC} = V_{PAMNC} + V_{PCNQ} = \frac{13V}{36}, \qquad \frac{V_{AMNPQC}}{V_{BMNDPQ}} = \frac{13/36}{1 - \frac{13}{36}} = \frac{13}{23}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 13/23.

ТИП #3

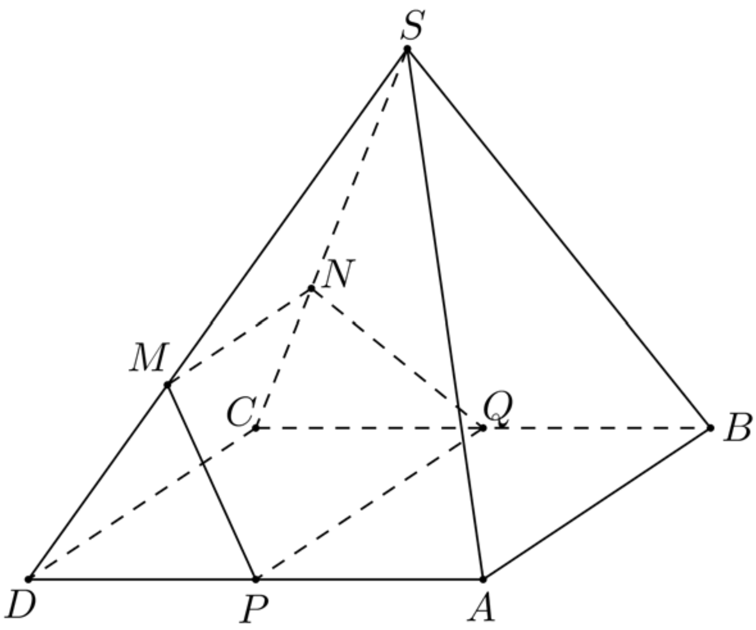
3. $SABCD$ – правильная пирамида. Точка M находится на ребре SD, $MS:SD = 2:3$. Точка P – середина ребра AD, а Q – середина ребра BC.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ – равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Решение.

а) По свойству правильной пирамиды, а также из подобия треугольников MSN и DSC следует, что $PQ \parallel DC \parallel MN$, где N – точка пересечения плоскости MPQ с ребром SC. Поскольку грани правильной пирамиды – попарно равные равнобедренные треугольники, то $MD = CN$, $PD = QC$ и $\angle ADS = \angle BCS$. Значит треугольники MDP и NCQ равны, откуда $MP = NQ$ и $PMNQ$ – равнобедренная трапеция.



б) Из условия следует, что $S_{CDPQ} = S_{ABCD}/2$, расстояние от точки M до плоскости ABC в три раза меньше расстояния от точки S до той же плоскости. Поэтому

$$\frac{V_{MPDCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{6}.$$

Площади треугольников с равными углами относятся как произведения сторон, образующих равные углы. Имеем

$$\frac{S_{CNQ}}{S_{CBS}} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{CQ}{QB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

расстояние от точки D до плоскости SBC в 3/2 раза больше, чем от точки M. Значит

$$\frac{V_{MNCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MNCQ}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}, \qquad V_{CQPDMN} = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\right) V_{SABCD} = \frac{2}{9} V_{SABCD},$$

$$\frac{V_{CQPDMN}}{V_{PQNMSAB}} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 2/7.

ТИП #4

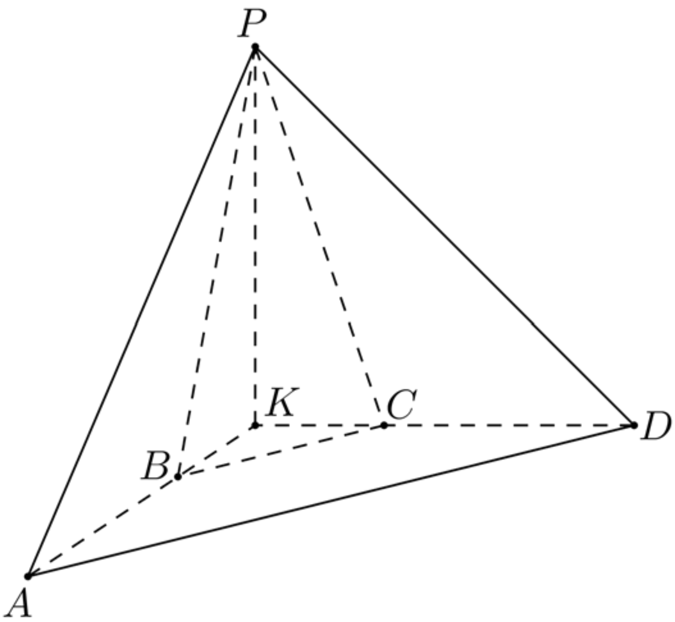
4. Дана пирамида *PABCD*, в основании – трапеция *ABCD* с большим основанием *AD*. Известно, что сумма углов *BAD* и *ADC* равна 90 градусов, а плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны основанию, прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *K*.

а) Доказать, что плоскость *PAB* перпендикулярна плоскости *PAD*.

б) Найдите объем *PKBC*, если $AB = BC = CD = 3$, а высота равна 8.

Решение.

а) Из условия следует, что угол *AKD* – прямой, $AK \perp KD$. *PK* – линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных основанию, значит $PK \perp (ABC)$, $PK \perp AK$, откуда следует, что $(PAB) \perp (PCD)$.



б) Из условия следует, что трапеция *ABCD* равнобокая. Тогда углы при основании равны, $\angle BAD = \angle ADC = 45°$, значит треугольники *ADK* и *BCK* прямоугольные и равнобедренные.

Из треугольника *BKC*:

$$KC = KB = x,$$

$$BC^2 = BK^2 + KC^2,$$

$$9 = 2x^2, \qquad x = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Окончательно

$$V_{PKBC} = \frac{1}{3}S_{BKC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 8 = 6.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 6.

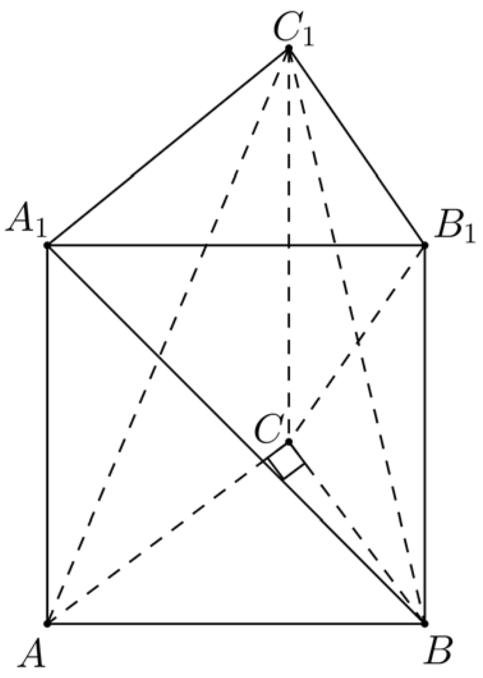
ТИП #5

5. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 – прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

Решение.



а) Прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1, поскольку она перпендикулярна прямым C_1B_1 и CC_1. Значит, прямые A_1C_1 и BC_1 перпендикулярны.

б) Пусть V – объём призмы $ABCA_1B_1C_1$. Тогда объём треугольной пирамиды C_1ABC равен $V/3$, поскольку её высота CC_1 и основание ABC совпадают с высотой и основанием призмы соответственно. Аналогично, объём треугольной пирамиды $BA_1B_1C_1$ равен $V/3$. Призма $ABCA_1B_1C_1$ составлена из трёх пирамид: $BA_1B_1C_1$, C_1ABC, AA_1C_1B. Значит, объём пирамиды AA_1C_1B равен $V/3$.

В призме $ABCA_1B_1C_1$:

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = 12;\;\; B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = 5;$$

$$CC_1 = \sqrt{CB_1^2 - B_1C_1^2} = 2\sqrt{14};\;\; V = CC_1 \cdot \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{2} = 60\sqrt{14}.$$

Таким образом, объём пирамиды AA_1C_1B равен $20\sqrt{14}$.

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) $20\sqrt{14}$.

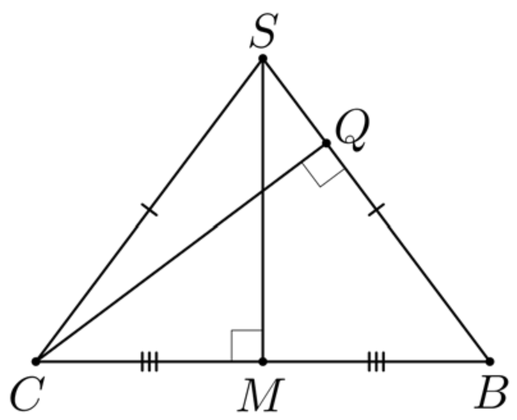
ТИП #6

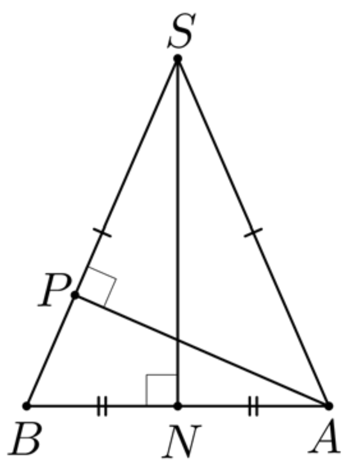
6. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Высота пирамиды проектируется в центр пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равно 8.

Решение.





а) Пусть M и N – середины CB и AB соответственно, $SA = SB = SC = SD = x$ (боковые рёбра равны по условию задачи).

Тогда

$$SM = \sqrt{x^2 - 8}, \qquad SN = \sqrt{x^2 - 4},$$

$$CQ = \frac{SM \cdot CB}{SB} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - 8}}{x}, \qquad AP = \frac{SN \cdot AB}{SA} = \frac{4 \cdot \sqrt{x^2 - 4}}{x}.$$

$$BQ^2 = 32 - \frac{32(x^2 - 8)}{x^2}, \qquad BQ = \frac{16}{x};$$

$$BP^2 = 16 - \frac{16(x^2 - 4)}{x^2}, \qquad BP = \frac{8}{x}.$$

Таким образом, $BQ = 2BP$, что и требовалось доказать.

б) В плоскости SBC опустим перпендикуляр к SB в точку P. По теореме Фалеса, точка пересечения этого перпендикуляра с CB есть точка M. Тогда угол MPA и есть искомый.

$$MP = \frac{1}{2} CQ = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - 8}}{x} = \sqrt{7},$$

$$AP = \frac{4 \cdot \sqrt{x^2 - 4}}{x} = \sqrt{15},$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{6}.$$

По теореме косинусов из треугольника MPA:

$$\cos \angle MPA = \frac{MP^2 + AP^2 - MA^2}{2 \cdot MP \cdot AP} = -\frac{\sqrt{105}}{105}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) $\arccos\left(-\sqrt{105}/105\right)$.

ТИП #7

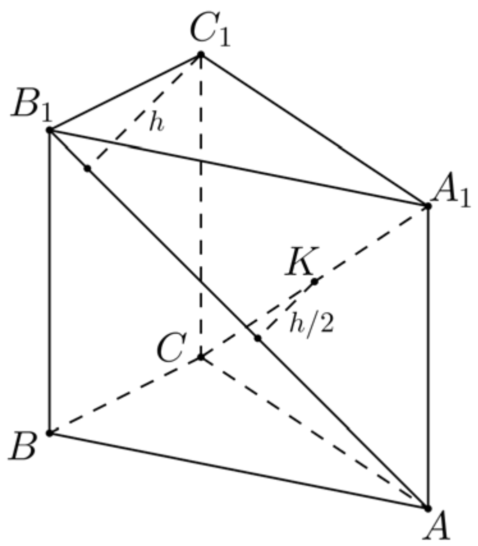
7. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение.

а) AC_1 – ортогональная проекция AB_1 на AA_1C_1C. Поскольку AA_1C_1C – квадрат, то $CA_1 \perp AC_1$, значит и $CA_1 \perp AB_1$.



б) Отметим точку K – середину AC_1, тогда расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 найдётся как расстояние от точки K до прямой AB_1, т.к. прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1 (поскольку перпендикулярна двум прямым этой плоскости). Это расстояние, по теореме Фалеса, равно половине высоты прямоугольного треугольника AC_1B_1 с прямым углом C_1, проведенной к гипотенузе:

$$\frac{h}{2} = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) $14\sqrt{2}/9$.

ТИП #8

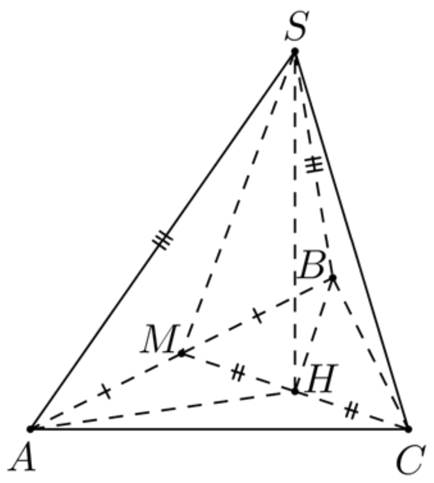
8. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые ребра $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объем пирамиды $SABC$.

Решение.

а) Пусть точка H – середина CM и основание высоты пирамиды. Треугольники ASH и BSH равны по гипотенузе и катету, значит $AH = BH$. Получается, что HM – медиана равнобедренного треугольника AHB, значит и высота, $AB \perp CM$. Получается, что CM – медиана и высота для треугольника ABC, откуда $AC = BC$.



б) Для нахождения площади треугольника ABC последовательно найдем AB и высоту CM.

$$CM = 2CH = 2\sqrt{SC^2 - SH^2} = 6.$$

$$AH = BH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = 5.$$

$$AB = 2BM = 2AM = \sqrt{AH^2 - MH^2} = 8.$$

Окончательно

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH \cdot \frac{AB \cdot CM}{2} = 96.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 96.