

1

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

- а) Докажите, что $AL : BC = AB : AC$.
- б) Найдите EL , если $AC = 21$, $\operatorname{tg} \angle BCA = 0,4$.

Ответ: _____.

2

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

- а) Докажите, что $AB : AL = BC : AC$.
- б) Найдите EL , если $AC = 24$, $\operatorname{tg} \angle BCA = 0,6$.

Ответ: _____.

3

Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $BC = 7$ и $AB = CD = 20$ вписан в окружность радиусом $R = 16$.

- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- б) Найдите AD .

Ответ: _____.

Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $BC = 14$ и $AB = CD = 40$ вписан в окружность радиусом $R = 25$.

- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- б) Найдите AD .

Ответ: _____.

5

В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F – середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырёхугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

- а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $AB = 7$, а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABEF$, равен $2,5$.

Ответ: _____.

6

В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F – середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырёхугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

- а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $BC = 16$, а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABEF$, равен 7 .

Ответ: _____.

7

Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D – основание высоты, опущенной из вершины C . I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники $B CD$ и $A CD$.

- а) Докажите, что E и F лежат на отрезке IJ .
- б) Найдите расстояние от точки C до прямой IJ , если $AC = 15$, $BC = 20$.

Ответ: _____.

8

Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D – основание высоты, опущенной из вершины C . I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники $B CD$ и $A CD$.

- а) Докажите, что E и F лежат на отрезке IJ .
- б) Найдите расстояние от точки C до прямой IJ , если $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$.

Ответ: _____.

9

На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырехугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника $ABCD$ равен 0,25.

- а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $AKND$, если радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, $AK : KB = 2 : 5$, а $BC < AD$ и $BC = 4$.

Ответ: _____.

10

На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырехугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника $ABCD$ равен $0,2$.

- а) Докажите, что прямые KN и AD параллельны.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $BCNK$, если радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, равен 7 , $AK : KB = 9 : 10$, а $BC < AD$ и $BC = 10$.

Ответ: _____.

11

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причем $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T .

- а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.
- б) Найдите площадь треугольника ABT , если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

Ответ: _____.

12

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причем $BC = CD = DE$, а $AC \perp BE$. Точка K – пересечение прямых BE и AD .

- а) Докажите, что прямая CE делит отрезок KD пополам.
- б) Найдите площадь треугольника ABK , если $AD = 4$, $DC = \sqrt{3}$.

Ответ: _____.

13

В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжениях сторон AD и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, причем $AN = AD$ и $CM = CD$.

- а) Докажите, что $BN = BM$.
- б) Найдите MN , если $AC = 5$, $\sin \angle BAD = \frac{5}{13}$.

Ответ: _____.

14

В параллелограмме $ABCD$ тангенс угла A равен 1,5. На продолжениях сторон AB и BC параллелограмма за точку B выбраны точки N и M соответственно, причем $BC = CN$ и $AB = AM$.

- а) Докажите, что $DN = DM$.
- б) Найдите MN , если $AC = \sqrt{13}$.

Ответ: _____.

15

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC .

- а) Докажите, что $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.
- б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{12}{49}$ площади трапеции $ABCD$.

Ответ: _____.

16

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC .

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

Ответ: _____.

17

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC .

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 , пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого – центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 .

Ответ: _____.

18

Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC .

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 , пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 17$ и $BC = 16$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого – центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 .

Ответ: _____.

19 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

- а) Докажите, что $BM = CM$.
- б) Найдите угол ABC , если угол BCD равен 64° , а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD .

Ответ: _____.

20 Точка K лежит на отрезке AB . Прямая, проходящая через точку B , касается окружности с диаметром AK в точке N и второй раз пересекает окружность с диаметром BK в точке M . Продолжение отрезка NK пересекает окружность с диаметром BK в точке P .

- а) Докажите, что прямые AN и BP параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKP , если $BM = 1$ и $MN = 4$.

Ответ: _____.

21 Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
- б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 3 и 4.

Ответ: _____.

22

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
- б) Найдите BC , если радиусы окружностей равны $\sqrt{15}$ и 15 .

Ответ: _____.

23

В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

Ответ: _____.

24

В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 12$, $BD = 13$.

Ответ: _____.

25

В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , а угол BDC равен 75° . Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен 150° .

- Докажите, что углы BAO и POB равны.
- Прямая PO пересекает сторону CD в точке F . Найдите CF , если $AP = 6\sqrt{3}$ и $BP = 4$.

Ответ: _____.

26

В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , а угол BDC равен $22,5^\circ$. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен 135° .

- Докажите, что углы BSP и POB равны.
- Прямая PO пересекает сторону AD в точке F . Найдите DF , если $CP = 5\sqrt{2}$ и $BP = 7$.

Ответ: _____.

27

На сторонах AC , AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольники AKC , ALB и BMC с прямыми углами K , L и M соответственно.

- Докажите, что LC – высота треугольника KLM .
- Найдите площадь треугольника KLM , если $LC = 4$.

Ответ: _____.

28

На сторонах AC , AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольники AKC , ALB и BMC с прямыми углами K , L и M соответственно.

- а) Докажите, что LC – высота треугольника KLM .
- б) Найдите площадь треугольника KLM , если $LC = 6$.

Ответ: _____.

29

Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

- а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

Ответ: _____.

30

На сторонах AC , AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольники AKC , ALB и BMC с прямыми углами K , L и M соответственно.

- а) Докажите, что LC – высота треугольника KLM .
- б) Найдите площадь треугольника KLM , если $LC = 10$.

Ответ: _____.

31 Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Ответ: _____.

32 Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке E .

а) Докажите, что $\angle EOC = \angle ECO$.

б) Найдите площадь треугольника ACE , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Ответ: _____.

33 Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M , а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos \angle BAD = 0,4$.

Ответ: _____.

34

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M , а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 2 : 3$, а $\cos \angle BAD = 0,7$.

Ответ: _____.

35

В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$ и $AB = BC = 14$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC , пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC .

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC .

Ответ: _____.

36

В треугольнике ABC известно, что $AC = 26$ и $AB = BC = 38$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC , пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC .

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC .

Ответ: _____.

Ответы:

1. б) 14,2

2. б) 29,7

3. б) 32

4. б) 42,16

5. б) 9,1

6. б) $\frac{25\sqrt{1073}}{7}$

7. б) $6\sqrt{2}$

8. б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

9. б) $\frac{2\sqrt{69}}{3}$

10. б) $\frac{5\sqrt{22}}{4}$

11. б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

12. б) $\frac{25\sqrt{39}}{64}$

13. б) $\frac{120}{13}$

14. б) 4

15. б) 6

16. б) 8

17. б) $\frac{5}{3}$

18. б) 2,4

19. б) 71°

20. б) $3\frac{1}{3}$

21. б) 4,8

22. б) 7,5

23. б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

24. б) $\frac{6\sqrt{13}}{5}$

25. б) $\frac{378 - 84\sqrt{3}}{23}$

26. б) $91(5\sqrt{2} - 7)$

27. б) 8

28. б) 18

29. б) 1

30. б) 50

31. б) $9\sqrt{2}$

32. б) $27\sqrt{3}$

33. б) 5:7

34. б) 10:11

35. б) 1:3:1

36. б) 4:5:4