

**1**

**ЕГЭ  
2022**

Есть три коробки: в первой коробке 112 камней, во второй – 99 камня, а третья пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 103 камней, во второй – 99, а в третьей – 9?
- б) Может ли в третьей коробке оказаться 211 камней?
- в) Во второй коробке 4 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

**2**

**ЕГЭ  
2022**

Есть три коробки: в первой коробке 95 камней, во второй – 104 камня, а третья пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 199 камней.
- б) Могло ли в первой коробке оказаться 100 камней, во второй – 50, а в третьей – 49?
- в) Во второй коробке 2 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

**3**

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 9177.

- а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- б) Может ли последовательность состоять из пяти членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

4

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4040.

- а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5

Из  $k$  кг материала фабрика изготавливает  $n$  одинаковых деталей массой  $m$  кг каждая, причем  $k = nm + q$ , где  $q$  кг – остатки материала, и  $q < m$ . После внедрения новых технологий на фабрике начали выпускать детали нового типа, каждая из которых стала на 0,2 кг легче деталей старого типа, причем из 63 кг материала деталей нового типа стали делать на две больше, чем делали деталей старого типа из 64 кг материала.

- а) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 15 новых деталей будет достаточно 63 кг материала, а на 16 – уже нет?
- б) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 40 новых деталей будет достаточно 63 кг материала, а на 41 – уже нет?
- в) Найдите такое минимальное число  $n$ , что фабрика может выпускать  $n$  новых деталей из 80 кг материала, а  $n - 1$  деталь не сможет, не нарушая условия  $q < m$ .

6

Из  $k$  кг материала фабрика изготавливает  $n$  одинаковых деталей массой  $m$  кг каждая, причем  $k = nm + q$ , где  $q$  кг – остатки материала, и  $q < m$ . После внедрения новых технологий на фабрике начали выпускать детали нового типа, каждая из которых стала на 0,1 кг легче деталей старого типа, причем из 18 кг материала деталей нового типа стали делать на две больше, чем делали деталей старого типа из 21 кг материала.

- а) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 50 новых деталей будет достаточно 18 кг материала, а на 51 – уже нет?
- б) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 36 новых деталей будет достаточно 18 кг материала, а на 37 – уже нет?
- в) Найдите такое минимальное число  $n$ , что фабрика может выпускать  $n$  новых деталей из 25 кг материала, а  $n - 1$  деталь не сможет, не нарушая условия  $q < m$ .

**7** Трехзначное число, меньше 910, поделили на сумму его цифр и получили натуральное число  $n$ .

- а) Может ли  $n$  равняться 68?
- б) Может ли  $n$  равняться 86?
- в) Какое наибольшее значение может принимать  $n$ , если все цифры ненулевые?

**8** Трехзначное число, меньше 700, поделили на сумму его цифр и получили натуральное число  $n$ .

- а) Может ли  $n$  равняться 64?
- б) Может ли  $n$  равняться 78?
- в) Какое наибольшее значение может принимать  $n$ , если все цифры ненулевые?

**9** Есть три коробки: в первой – 97 камней; во второй – 80, а в третьей камней нет. Берут по одному камню из двух коробок и кладут их в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

**ЕГЭ  
2022**

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 58 камней, во второй – 59, а в третьей – 60?
- б) Может ли в первой и второй коробках камней оказаться поровну?
- в) Какое наибольшее количество камней может оказаться во второй коробке?

**10** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7735.

- а) Может ли последовательность состоять из трех членов?
- б) Может ли последовательность состоять из шести членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

**11** На доске написаны три различных натуральных числа такие. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

ЕГЭ  
2021

- а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?
- б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?
- в) В тройке чисел первое число трехзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

**12** На доске написаны три различных натуральных числа такие. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

ЕГЭ  
2021

- а) Может ли сумма этих чисел быть равна 3456?
- б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2345?
- в) В тройке чисел первое число трехзначное, а третье равно 5. Сколько существует таких троек?

**13** Известно, что  $a, b, c, d, e$  и  $f$  – это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 5, 6 и 16.

а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 6$ ?

б) Может ли выполняться равенство  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{961}{240}$ ?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ?

14

Известно, что  $a, b, c, d, e$  и  $f$  – это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 6, 7 и 16.

а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 11$ ?

б) Может ли выполняться равенство  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{1345}{336}$ ?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ?

15

Отношение трехзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

ЕГЭ  
2021

а) Может ли это отношение быть равным 34?

б) Может ли это отношение быть равным 84?

в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трехзначного числа равна 4?

16

Отношение трехзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

ЕГЭ  
2021

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

**17** Для действительного числа  $x$  обозначим через  $[x]$  наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Например,  $\left[\frac{11}{4}\right] = 2$ , так как  $2 \leq \frac{11}{4} < 3$ .

- а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] = n$ ?
- б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] = n + 2$ ?
- в) Сколько существует различных натуральных  $n$ , для которых  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] + \left[\frac{n}{17}\right] = n + 1945$ ?

**18** Для действительного числа  $x$  обозначим через  $[x]$  наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Например,  $\left[\frac{11}{4}\right] = 2$ , так как  $2 \leq \frac{11}{4} < 3$ .

- а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] = n$ ?
- б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] = n + 2$ ?
- в) Сколько существует различных натуральных  $n$ , для которых  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \left[\frac{n}{23}\right] = n + 2021$ ?

**19** На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

**ЕГЭ  
2018**

- а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?
- б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?
- в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

**20****ЕГЭ  
2011**

На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из их равно  $-7$ .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**21****ЕГЭ  
2020**

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы приписали справа цифру 7, а числа третьей группы оставили без изменений.

- а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
- б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
- в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

**22****ЕГЭ  
2020**

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы приписали справа цифру 8, а числа третьей группы оставили без изменений.

- а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раз?
- б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?
- в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

**23**

Петя участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный – списываются 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов.

- а) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?
- б) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 35 вопросов?
- в) На сколько вопросов Петя ответил правильно, если в викторине было 33 вопроса?

**24**

Оля участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный – списываются 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов.

- а) На сколько вопросов Оля ответила правильно, если в викторине было 24 вопросов?
- б) На сколько вопросов Оля не дала ответа, если в викторине было 25 вопросов?
- в) На сколько вопросов Оля ответила неверно, если в викторине было 37 вопроса?

**25**

У Миши в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

- а) Может ли у Миши быть 30 монет?
- б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?
- в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?



26

У Коли в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 25 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 30 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

- а) Может ли у Коли быть 50 монет?
- б) Какое наибольшее количество монет может быть у Коли?
- в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Коли?

27

Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $n!$  произведение первых  $n$  натуральных чисел ( $1! = 1$ ).

- а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что десятичная запись числа  $n!$  оканчивается ровно 9 нулями?
- б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что десятичная запись числа  $n!$  оканчивается ровно 23 нулями?
- в) Сколько существует натуральных чисел  $n$ , меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа  $n! \cdot (100 - n)!$  оканчивается ровно 23 нулями?

28

Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $n!$  произведение первых  $n$  натуральных чисел ( $1! = 1$ ).

- а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что десятичная запись числа  $n!$  оканчивается ровно 10 нулями?
- б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что десятичная запись числа  $n!$  оканчивается ровно 17 нулями?
- в) Сколько существует натуральных чисел  $n$ , меньших 75, для каждого из которых десятичная запись числа  $n! \cdot (75 - n)!$  оканчивается ровно 17 нулями?

**29** Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

- а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?
- б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

**30** Для набора 40 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых двух чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

- а) Может ли одним из этих чисел быть число 777?
- б) Может ли одним из этих чисел быть число 33?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

**31** В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

**ЕГЭ  
2019**

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
- в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

**32****ЕГЭ  
2018**

В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
- в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

**33****ЕГЭ  
2018**

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в два раза?
- б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе №2 равняться 1?
- в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

**34****ЕГЭ  
2018**

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?
- б) Средний балл в школе №1 уменьшиться на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе №2 равняться 7?
- в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

**35** Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б – больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуются на один автобус меньше.

- а) Может ли потребоваться 5 автобусов модели А?
- б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.
- в) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

**36** Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 40, но меньше 50, а в автобусах модели Б – больше 50, но меньше 60. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуются на один автобус меньше.

- а) Может ли потребоваться 4 автобусов модели Б?
- б) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе, если известно, что их меньше 300.
- в) Найдите наибольшее возможное количество автобусов модели А.

**Ответы:**

- |                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| 1. а) да;             | 10. а) нет;        |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 205                | в) 1933            |
| 2. а) да;             | 11. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 195                | в) 97              |
| 3. а) да;             | 12. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 2295               | в) 85              |
| 4. а) да;             | 13. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 897                | в) $\frac{23}{20}$ |
| 5. а) нет;            | 14. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 36                 | в) $11\frac{5}{6}$ |
| 6. а) нет;            | 15. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 57, 58, 59, 60, 61 | в) 26              |
| 7. а) да;             | 16. а) да;         |
| б) нет;               | б) нет;            |
| в) 79                 | в) 80              |
| 8. а) да;             | 17. а) нет;        |
| б) нет;               | б) да;             |
| в) 73                 | в) 306             |
| 9. а) да;             | 18. а) нет;        |
| б) нет;               | б) да;             |
| в) 176                | в) 552             |

## Варианты Яценко 2023

19. а) нет;  
б) нет;  
в)  $11\frac{2}{11}$
20. а) 42;  
б) положительных;  
в) 24
21. а) да;  
б) нет;  
в)  $\frac{232}{21}$
22. а) да;  
б) нет;  
в) 10
23. а) 7;  
б) 15;  
в) 14
24. а) 12;  
б) 15;  
в) 6
25. а) нет;  
б) 21;  
в) 82
26. а) нет;  
б) 36;  
в) 182
27. а) да;  
б) нет;  
в) 16
28. а) да;  
б) нет;  
в) 12
29. а) да;  
б) нет;  
в) 2805
30. а) да;  
б) да;  
в) 2220
31. а) нет;  
б) нет;  
в) 676 г
32. а) нет;  
б) нет;  
в) 240 г
33. а) нет;  
б) нет;  
в) 3
34. а) да;  
б) нет;  
в) 5
35. а) да;  
б) 180;  
в) 546
36. а) да;  
б) 270;  
в) 17