

# Решение неравенств

Задание № 20

по материалам открытого банка  
задач ОГЭ по математике 2023 года

Кильдеева Ирина Владимировна, учитель математики  
МБОУ «СОШ № 37» Кемеровского ГО

# Алгоритм решения квадратных неравенств

## Алгоритм решения квадратных неравенств с помощью параболы

1. Приводим неравенство к виду  $ax^2 + bx + c \lessgtr 0$
2. Рассматриваем функцию  $y = ax^2 + bx + c$ , определяем направление ветвей параболы и находим нули функции.  
Для этого решаем уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , находим корни.
3. На оси  $Ox$ , отмечаем точками корни уравнения.  
Если исходное неравенство нестрогое, точки – закрашенные.  
Если строгое - точки пустые внутри.
4. Схематично рисуем параболу  $y = ax^2 + bx + c$ .  
Определяем области со знаками +/- на рисунке.
5. Выбираем нужные промежутки и записываем ответ.

## Алгоритм решения квадратных неравенств методом интервалов

1. Приводим неравенство к виду

$$ax^2 + bx + c \lessgtr 0 \text{ или } a(x - m)(x - n) \lessgtr 0$$

2. Приравнять левую часть неравенства к нулю и решить полученное уравнение.

3. Отметить полученные точки на оси  $Ox$ .

4. Определить знак на каждом интервале.

5. Выбрать нужные промежутки и записать ответ.

# Типичные ошибки при решении неравенств

## **Метод параболы**

- Не вводится функция;
- Не указывается направление ветвей параболы;
- Выражение не приравнивается к нулю.

## **Метод интервалов**

- Выражение не приравнивается к нулю;
- Не показаны вычисления знаков в интервалах.

1. Решите неравенство  $(\sqrt{19} - 4,5)(5 - 3x) > 0$ .

Определим знак разности  $\sqrt{19} - 4,5$

т. к.  $4,5 = \sqrt{20,25}$ , то  $\sqrt{19} < \sqrt{20,25} \Rightarrow$

$$\sqrt{19} - \sqrt{20,25} < 0 \Rightarrow \sqrt{19} - 4,5 < 0$$

При делении на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$$(\sqrt{19} - 4,5)(5 - 3x) > 0 \quad | : (\sqrt{19} - 4,5) < 0$$

$$5 - 3x < 0$$

$$-3x < -5 \quad | : (-3)$$

$$x > \frac{5}{3}$$

Ответ:  $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

2. Решите неравенство  $(5x + 2)^2 \geq (4 - 2x)^2$ .

Решение: **I способ**

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала преобразуем неравенство:

$$(5x + 2)^2 \geq (4 - 2x)^2$$

$$(5x + 2)^2 - (4 - 2x)^2 \geq 0$$

$$(5x + 2 - (4 - 2x))(5x + 2 + (4 - 2x)) \geq 0$$

$$(5x + 2 - 4 + 2x)(5x + 2 + 4 - 2x) \geq 0$$

$$(7x - 2)(3x + 6) \geq 0$$

Найдем корни уравнения:

$$(7x - 2)(3x + 6) = 0$$

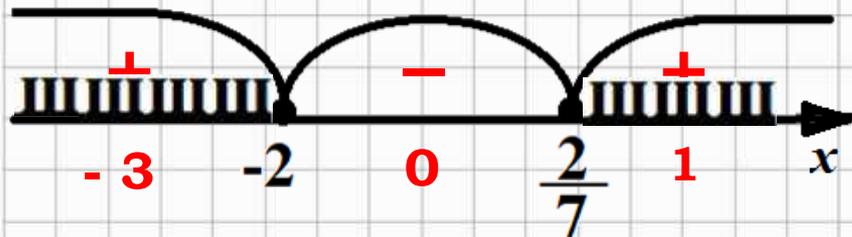
$$7x - 2 = 0 \text{ или } 3x + 6 = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x = -2$$

$$(7x - 2)(3x + 6) \geq 0$$

Расставим точки (корни уравнения) на прямой и определим знаки выражения на каждом получившемся промежутке:



$$(7 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 6) = 5 \cdot 9 = 45 > 0,$$

$$(7 \cdot 0 - 2)(3 \cdot 0 + 6) = -2 \cdot 6 = -12 < 0,$$

$$(7 \cdot (-3) - 2)(3 \cdot (-3) + 6) = -23 \cdot (-3) = 69 > 0.$$

Таким образом, ответ  $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right)$

Ответ:  $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right)$

2. Решите неравенство  $(5x + 2)^2 \geq (4 - 2x)^2$ .

Решение: **II способ**

Решим неравенство, используя метод параболы, для этого, сначала преобразуем неравенство:

$$(5x + 2)^2 \geq (4 - 2x)^2$$

$$25x^2 + 20x + 4 \geq 16 - 16x + 4x^2$$

$$21x^2 + 36x - 12 \geq 0 \quad |:3$$

$$7x^2 + 12x - 4 \geq 0$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 7x^2 + 12x - 4$  – квадратичная функция,

график – парабола,  $a = 7 > 0 \Rightarrow$  ветви направлены вверх.

Найдем нули функции  $f(x)$ :

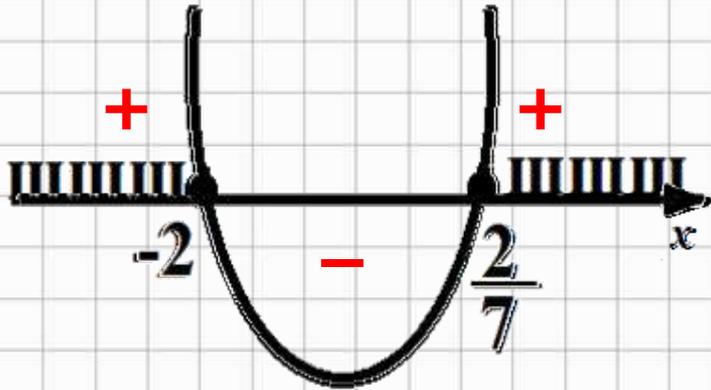
$$7x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$7x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 7 \cdot (-4) = 144 + 112 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня,}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 16}{2 \cdot 7} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{-12 - 16}{2 \cdot 7} = \frac{-28}{14} = -2$$



$$7x^2 + 12x - 4 \geq 0$$

Таким образом, ответ  $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right)$

Ответ:  $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right)$

3. Решите неравенство  $(x - 7)^2 < \sqrt{11}(x - 7)$ .

Решение:

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала преобразуем неравенство:

$$(x - 7)^2 - \sqrt{11}(x - 7) < 0$$

$$(x - 7)(x - 7 - \sqrt{11}) < 0$$

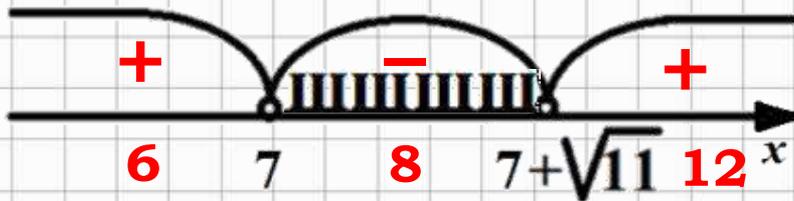
Найдем корни уравнения:

$$(x - 7)(x - 7 - \sqrt{11}) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{или} \quad x - 7 - \sqrt{11} = 0$$

$$x = 7 \quad x = 7 + \sqrt{11} \quad \sqrt{10,89} < \sqrt{11} < \sqrt{11,56}$$

$$3,3 < \sqrt{11} < 3,4$$



$$(12 \pm 7)(12 - 7 \pm \sqrt{11}) > 0$$

$$(8 \pm 7)(8 - 7 \pm \sqrt{11}) < 0$$

$$(6 \pm 7)(6 - 7 \pm \sqrt{11}) > 0$$

Ответ:  $(7; 7 + \sqrt{11})$

4. Решите неравенство  $\frac{-18}{(x+4)^2 - 10} \geq 0$ .

Решение: **1 способ**

Так как дробь больше нуля, а числитель  $-18 < 0$ , то знаменатель должен быть **строго меньше 0**, т.е. получим неравенство

$$(x+4)^2 - 10 < 0$$
$$x^2 + 8x + 16 - 10 < 0,$$
$$x^2 + 8x + 6 < 0,$$

Решим неравенство методом параболы:

$f(x) = x^2 + 8x + 16$  – квадратичная функция, график – парабола,  
 $a = 1 > 0 \Rightarrow$  ветви направлены вверх.

Найдем нули функции, т.е. корни уравнения:

**1 способ**

$$x^2 + 8x + 6 = 0,$$

$$D = 64 - 24 = 40 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{40}}{2} = -4 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{40}}{2} = -4 - \sqrt{10}$$

**2 способ**

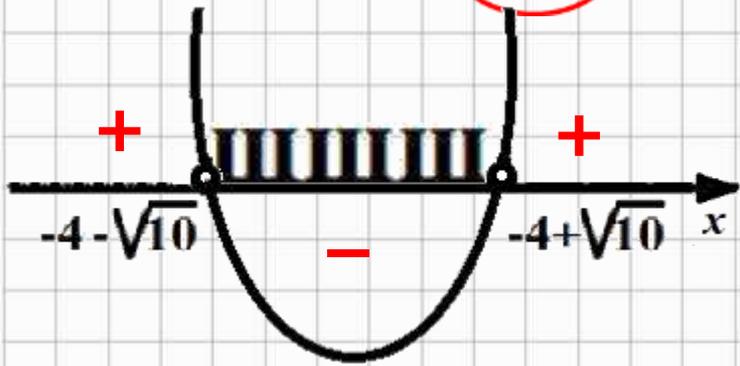
$$(x+4)^2 - 10 = 0$$

$$(x+4)^2 = 10$$

$$x+4 = \sqrt{10} \text{ или } x+4 = -\sqrt{10}$$

$$x_1 = -4 + \sqrt{10} \quad x_2 = -4 - \sqrt{10}$$

$$x^2 + 8x + 16 < 0,$$



Таким образом, ответ  $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$ .

Ответ:  $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

4. Решите неравенство  $\frac{-18}{(x+4)^2 - 10} \geq 0$ .

Решение: **II способ**

Так как дробь больше нуля, а числитель  $-18 < 0$ , то знаменатель должен быть **строго меньше 0**, т.е. получим неравенство

$$(x+4)^2 - 10 < 0$$

$$(x+4)^2 - (\sqrt{10})^2 < 0$$

$$(x+4 - \sqrt{10})(x+4 + \sqrt{10}) < 0$$

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала найдем корни уравнения:

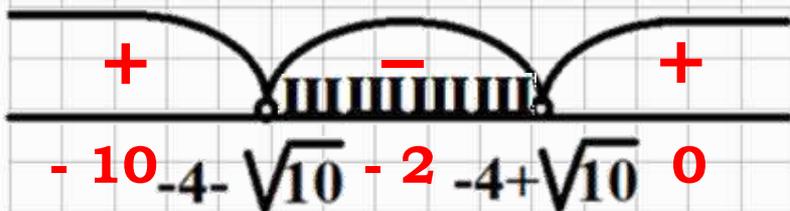
$$(x+4 - \sqrt{10})(x+4 + \sqrt{10}) = 0$$

$$x+4 - \sqrt{10} = 0 \quad \text{или} \quad x+4 + \sqrt{10} = 0$$

$$x_1 = -4 + \sqrt{10} \qquad x_2 = -4 - \sqrt{10}$$

$$(x + 4 - \sqrt{10})(x + 4 + \sqrt{10}) < 0$$

Расставим точки (корни уравнения) на прямой и определим знаки выражения на каждом получившемся промежутке:



$$\sqrt{9,61} < \sqrt{10} < \sqrt{10,24}$$

$$3,1 < \sqrt{10} < 3,2$$

$$(0 + 4 - \sqrt{10})(0 + 4 + \sqrt{10}) > 0,$$

$$(-2 + 4 - \sqrt{10})(-2 + 4 + \sqrt{10}) = (2 - \sqrt{10})(2 + \sqrt{10}) < 0,$$

$$(-10 + 4 - \sqrt{10})(-10 + 4 + \sqrt{10}) = (-6 - \sqrt{10})(-6 + \sqrt{10}) > 0.$$

Таким образом, ответ  $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$ .

Ответ:  $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$\frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0$$

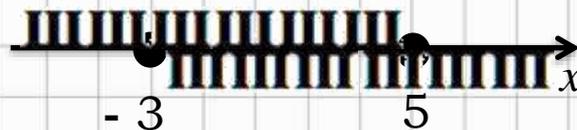
Можно сразу заметить, что в знаменателе дроби стоит квадрат числа плюс положительное число, значит,  $3+(5-2x)^2 > 0$ .

Поэтому, данное неравенство эквивалентно неравенству:

$$10-2x \geq 0 \quad | :(-2)$$

$$x-5 \leq 0$$

$$x \leq 5.$$



Найдем пересечение решений неравенств, получим, что решением системы является отрезок  $[-3; 5]$ .

Ответ:  $[-3; 5]$

Решим второе неравенство системы:

$$2-7x \leq 14-3x$$

$$-4x \leq 12 \quad | :(-4)$$

$$x \geq -3.$$

Для решения **первого** неравенства системы можно применить другой способ:

$$\frac{10 - 2x}{3 + (5 - 2x)^2} \geq 0$$
$$\frac{10 - 2x}{3 + 25 - 20x + 4x^2} \geq 0$$
$$\frac{10 - 2x}{4x^2 - 20x + 28} \geq 0$$
$$\frac{2(5 - x)}{2(2x^2 - 10x + 14)} \geq 0$$
$$\frac{5 - x}{2x^2 - 10x + 14} \geq 0$$

Поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству:

$$5 - x \geq 0,$$
$$x \leq 5.$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x^2 - 10x + 14$  – квадратичная функция, график – парабола,  $a = 2 > 0 \Rightarrow$  ветви направлены вверх.

Найдем нули функции  $f(x)$ :

$$2x^2 - 10x + 14 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 14 =$$
$$= 100 - 112 = -12 < 0$$

$\Rightarrow$  корней нет  $\Rightarrow$

выражение  $2x^2 - 10x + 14 > 0$  при любом  $x$ .

# Использованы ресурсы

- <http://www.mathgia.ru/or/gia12/Main.html> - открытый банк заданий ОГЭ по математике