Содержание

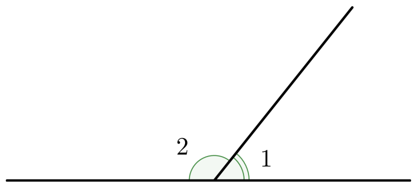
1 Очевидные факты

Мы знаем, что вы это знаете, но мы вам напоминаем.

1. Смежные углы:

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180°.

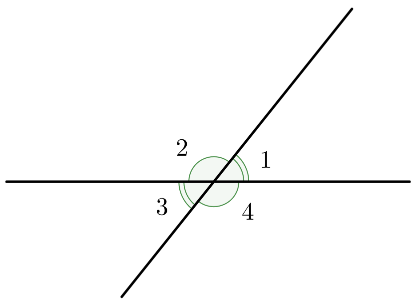
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



2. Вертикальные углы:

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

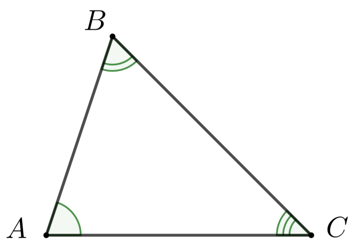
$$\angle 1 = \angle 3$$
$$\angle 2 = \angle 4$$



3. Сумма углов треугольника равна 180°.

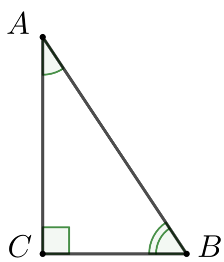
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

*Примечание: $\angle C$ треугольника ABC – это $\angle ACB$.



4. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

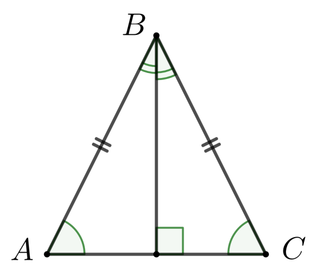
$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$



5. Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны.

Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием.

Свойства равнобедренного треугольника:



- Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

$$AB = BC$$

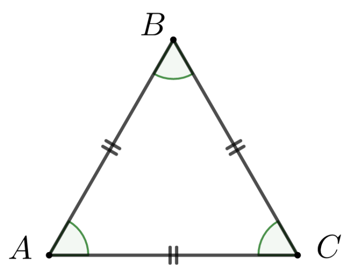
$$\angle A = \angle C$$

- Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является медианой и высотой.

Признаки равнобедренного треугольника:

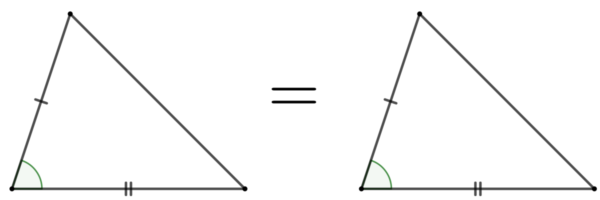
- Если у треугольника два угла равны, то этот треугольник – равнобедренный.
- Если высота треугольника совпадает с его медианой, проведенной из того же угла, то такой треугольник – равнобедренный.

6. Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны. Все углы равностороннего треугольника равны 60°.

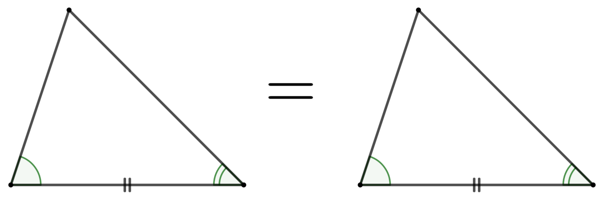


$$AB = BC = AC$$
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

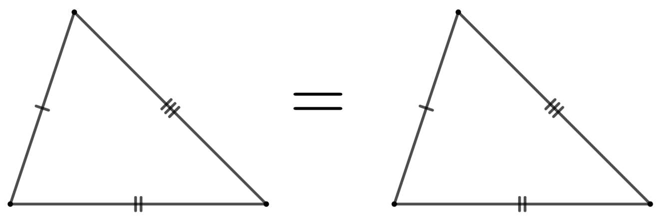
7. Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.



8. Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.

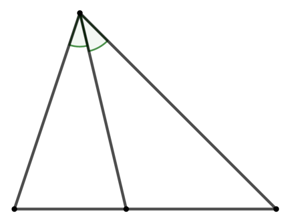


9. Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

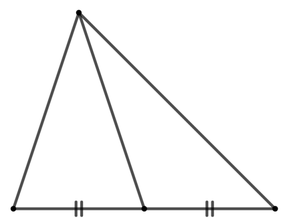


10. Биссектриса – луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



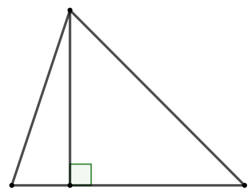
11. Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

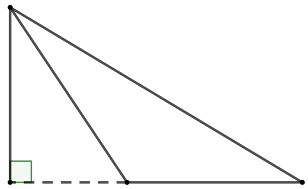


12. Высота – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

Если треугольник тупоугольный, то две его высоты лежат вне треугольника.

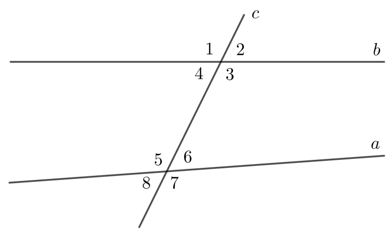
Если треугольник прямоугольный, то две его высоты совпадают с его катетами.





13. Признаки параллельности двух прямых.

Прямая c называется **секущей** по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках. При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке обозначены цифрами от 1 до 8. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:



внутренние накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

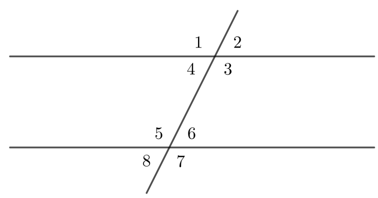
внешние накрест лежащие углы: 2 и 8, 7 и 1;

внутренние односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

внешние односторонние углы: 1 и 8, 2 и 7;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Если при пересечении двух прямых секущей выполняется одно из указанных условий:



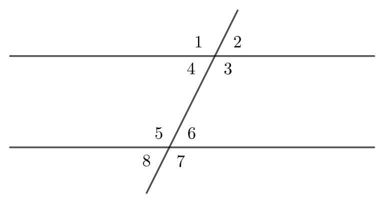
а) накрест лежащие углы равны (внутренние или внешние);

б) односторонние (внутренние или внешние) углы дают в сумме 180°;

в) соответственные углы равны,

то прямые параллельны.

14. Свойства параллельных прямых:

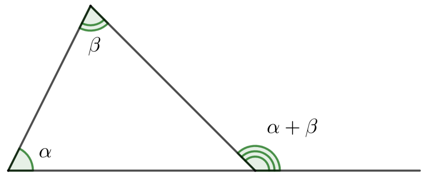


а) накрест лежащие углы равны (внутренние или внешние);

б) односторонние (внутренние или внешние) углы дают в сумме 180°;

в) соответственные углы равны.

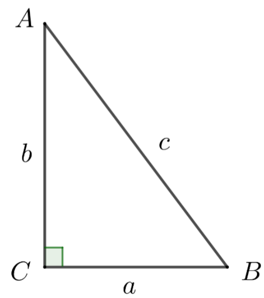
15. Теорема о внешнем угле треугольника:



2 Прямоугольный треугольник

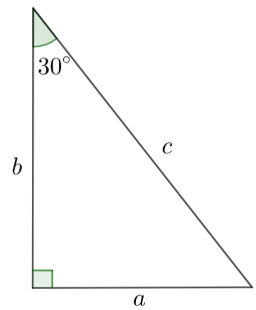
1. **Теорема Пифагора**: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



2. Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c верно, что $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, лежащий напротив стороны c, равен $90°$ (Обратная теореме Пифагора).

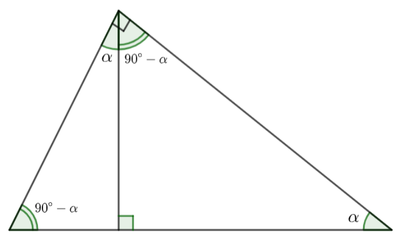
3. Напротив угла в $30°$ лежит катет, равный половине гипотенузы: если $\alpha = 30°$, тогда $a = \dfrac{c}{2}$.



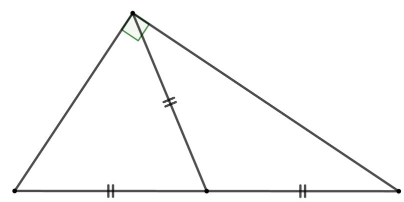
4. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит прямой угол на два угла, которые равны двум острым углам прямоугольного треугольника.

Иначе говоря, высота, проведенная из вершины прямого угла, делит прямоугольный треугольник на 2 прямоугольных треугольника, подобных исходному.

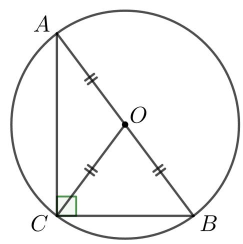
*Возможно, что вы ничего не поняли, но мы надеемся, что вы посмотрите на картинку и все поймете.



5. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.
Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник – прямоугольный.

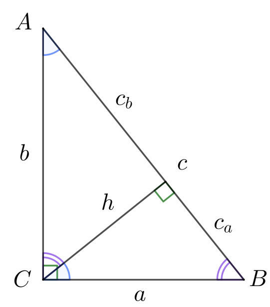


6. Если вокруг прямоугольного треугольника описать окружность, то гипотенуза этого прямоугольного треугольника будет являться диаметром описанной окружности, а середина гипотенузы – с центром окружности.



7. Высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, можно найти как произведение катетов этого треугольника, делённых на гипотенузу.

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$



Также высоту прямоугольного треугольника, опущенного на гипотенузу можно найти, как корень из произведения отрезков, на которые высота делит гипотенузу:

$$\boxed{h = \sqrt{c_a c_b}, \quad h^2 = c_a c_b.}$$

8. Также обратите внимание на следующие соотношения:

$$\boxed{c_a c = a^2}$$

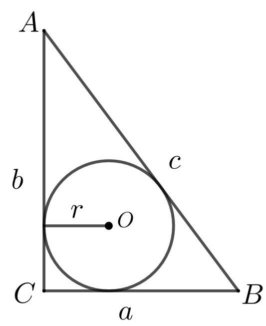
$$\boxed{c_b c = b^2}$$

9. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формулам:

$$\boxed{r = p - c = \frac{a+b-c}{2}}$$

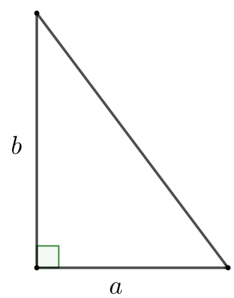
где p – полупериметр $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

$$\boxed{S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}}$$



10. Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab.$$



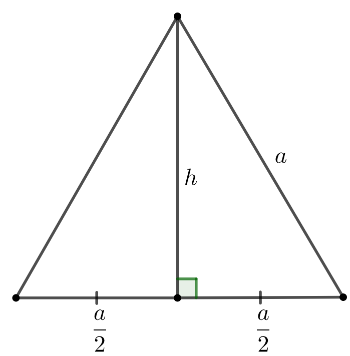
3 Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике каждая высота совпадает с медианой и биссектрисой, проведенными из той же вершины.

Точки пересечения высот, медиан и биссектрис совпадают. Также эта точка является центром вписанной и описанной окружности.

1. Высота равностороннего треугольника:

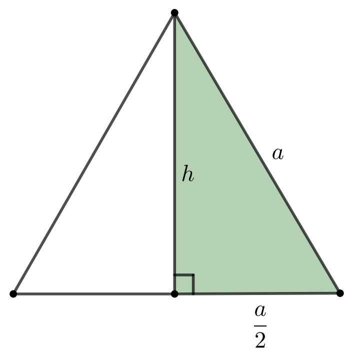
$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$



Действительно, по теореме Пифагора для выделенного треугольника:

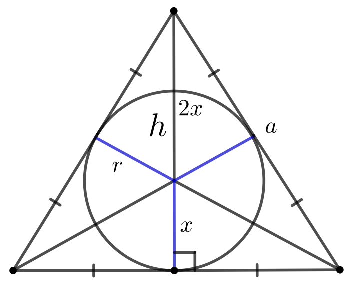
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



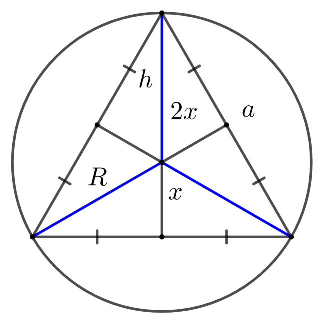
2. Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

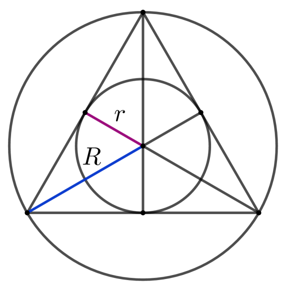


3. Радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



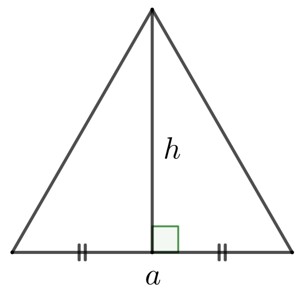
4. $R = 2r$.



5. Так же площадь равностороннего треугольника можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

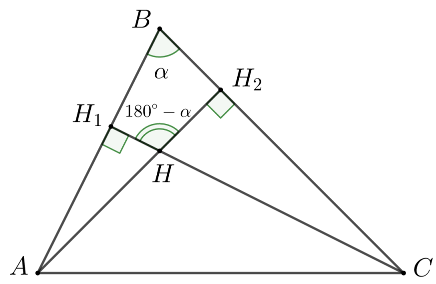


4 Угол между биссектрисами и высотами треугольника

1. Угол, образованный высотами.

Сумма углов четырехугольника H_1BH_2H:

$90^\circ + \alpha + 90^\circ + \angle H_1HH_2 = 360^\circ$, тогда $\angle AHC = \angle H_1HH_2 = 180^\circ - \alpha$.



2. Угол, образованный биссектрисами.

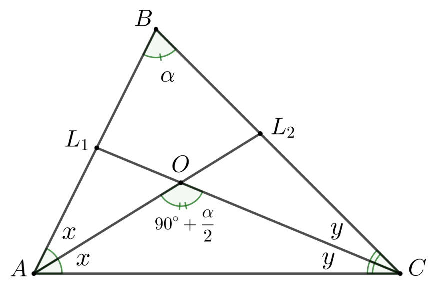
Сумма углов треугольника ABC:

$2x + 2y + \alpha = 180^\circ$, $2x + 2y = 180^\circ - \alpha$, тогда $x + y = \frac{1}{2}(2x+2y) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Сумма углов треугольника AOC:

$x + y + \angle AOC = 180^\circ$, тогда

$\angle AOC = 180^\circ - (x+y) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

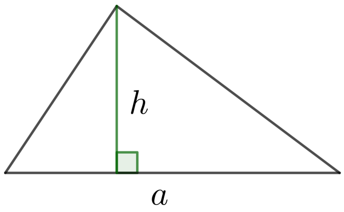


5 Площадь треугольника

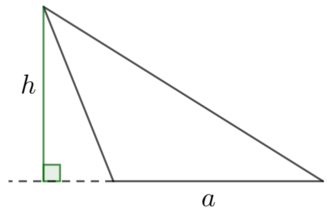
1. Если известны высота и сторона, к которой она проведена:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

для остроугольного

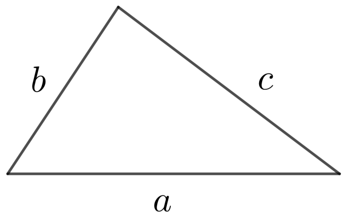


для тупоугольного



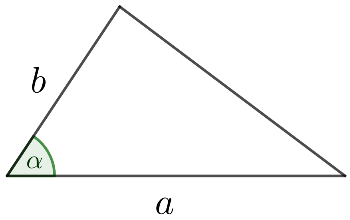
2. Если известны 3 стороны (формула Герона):

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
где p – это полупериметр.
$p = \frac{a+b+c}{2}$.



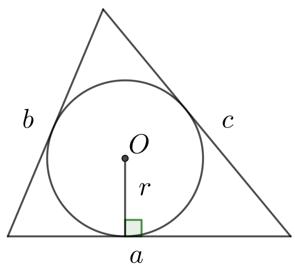
3. Если известны 2 стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



4. Если известны полупериметр и радиус вписанной окружности:

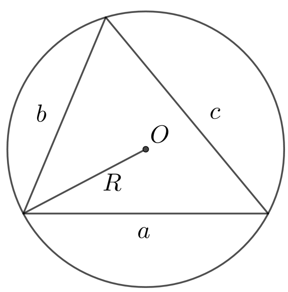
$S = pr$,
где p – это полупериметр.
$p = \frac{a+b+c}{2}$.



*На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.

5. Если известны 3 стороны и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

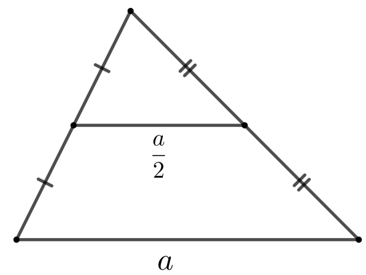


*Достаточно бесполезная формула, которую иногда удобно использовать для того, чтобы искать радиус описанной окружности.

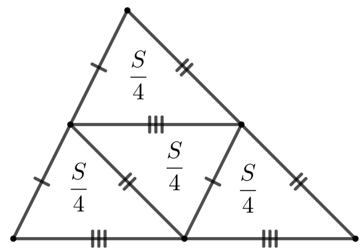
6 Средняя линяя

Определение. Средняя линяя треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Свойство средней линии: средняя линяя треугольника параллельна основанию и равна его половине.

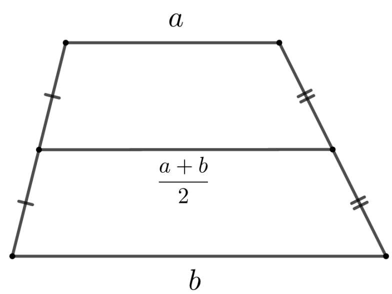


2. Каждая средняя линяя треугольника отсекает от него треугольник, периметр которого в два раза меньше данного, а площадь в четыре раза меньше.

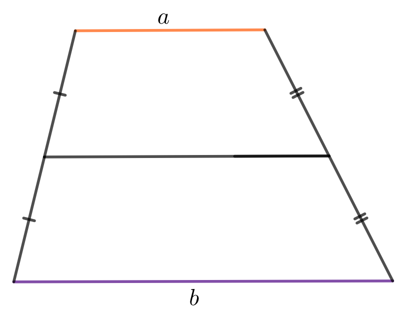


Определение. Средняя линяя трапеции — это отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

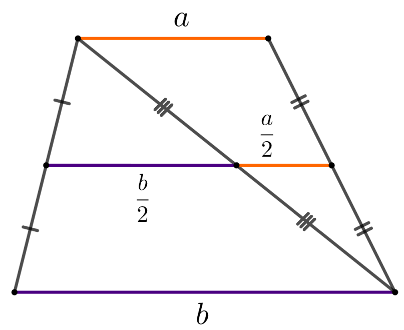
3. Средняя линяя трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



4. Средняя линия делит каждую диагональ трапеции пополам.



При этом отрезки, на которые средняя линия делится диагональю, равны половинам оснований.



5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен, полуразности оснований.

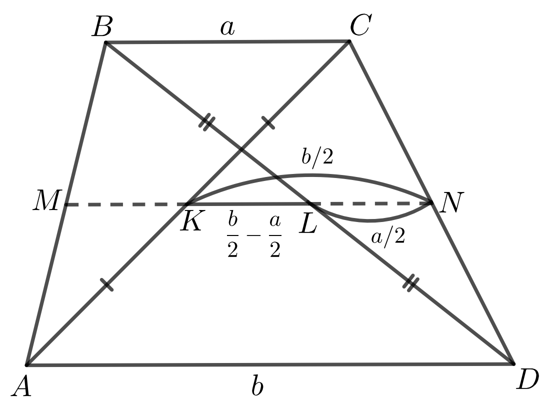
$$KL = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

Доказательство:

По утверждению 4, точки K и L лежат на средней линии трапеции. Значит весь отрезок KL лежит на средней линии.
Так же по свойству 5 мы знаем, что KN лежит на средней линии трапеции.
Заметим, что ML и KN - средние линии $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$ соответственно $\Rightarrow ML = KN = \dfrac{b}{2}$
MK и LN - средние линии $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ соответственно $\Rightarrow MK = LN = \dfrac{a}{2}$

Значит,

$$KL = KN - LN = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}.$$



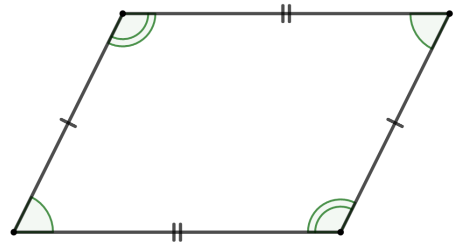
7 Параллелограмм

Определение. Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

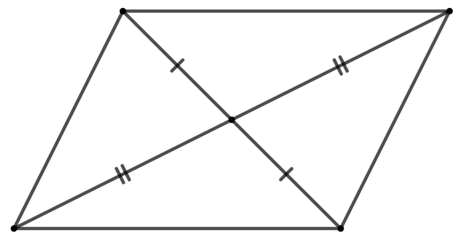
1. Свойства параллелограмма:

В параллелограмме противоположные стороны равны.

В параллелограмме противоположные углы равны.

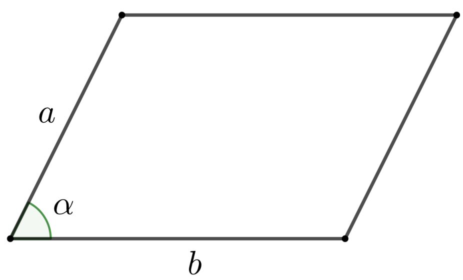


Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.



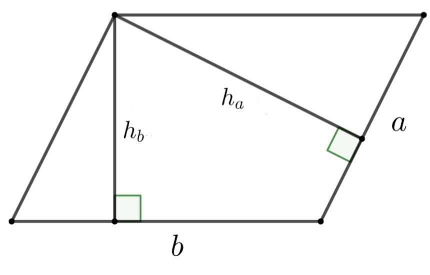
2. Площадь параллелограмма, если известны две стороны параллелограмма и угол между ними:

$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

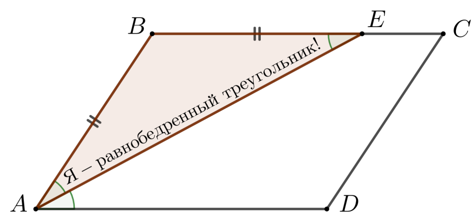


3. Площадь параллелограмма, если известна высота параллелограмма и основание, к которому эта высота проведена:

$$S = b \cdot h_b \text{ или } S = a \cdot h_a$$



4. Пусть AE – биссектриса, тогда $\triangle ABE$ - равнобедренный.



Доказательство:

1. $\angle BAE = \angle EAD$, так как AE биссектриса $\angle BAD$.

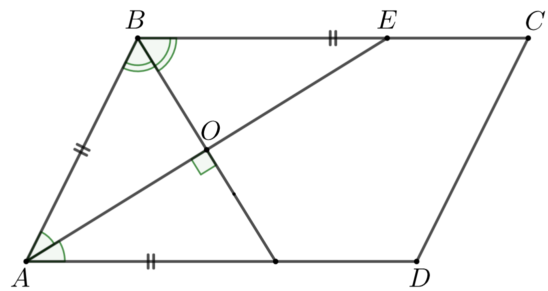
2. $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AE.

3. Тогда мы понимаем, что $\angle BAE = \angle BEA = \angle EAD$.

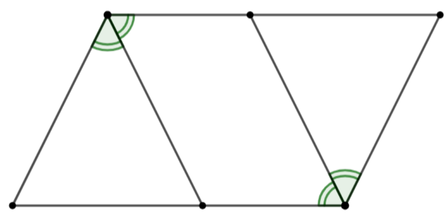
   А значит треугольник ABE – равнобедренный.

■

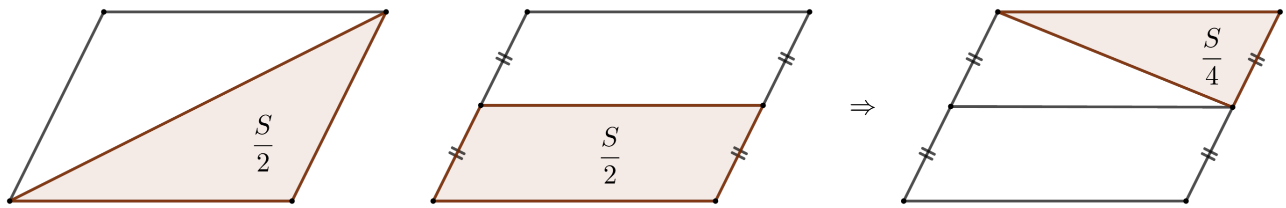
5. Угол между биссектрисами соседних углов параллелограмма прямой, или, по-другому говоря, биссектрисы соседних углов перпендикулярны.
Это следует из того, что если в $\triangle ABE$ провести биссектрису, то она станет высотой.



6. Биссектрисы противоположных углов параллельны.



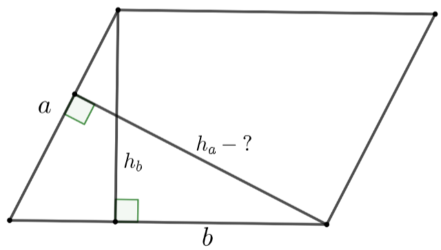
7. Немного о площадях частей параллелограмма



8. Как найти высоту параллелограмма, зная другую высоту и две стороны?

Заметим, что площадь параллелограмма, с одной стороны, равна $S = b \cdot h_b$, а с другой стороны $S = h_a \cdot a$,

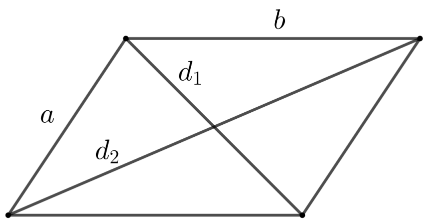
тогда $h_a = \dfrac{b \cdot h_b}{a}$.



9. Тождество параллелограмма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

где a и b - стороны параллелограмма, d_1 и d_2 - диагонали.

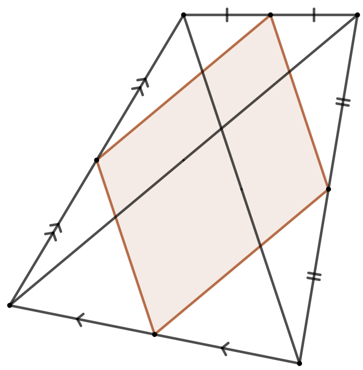


8 Четырехугольники

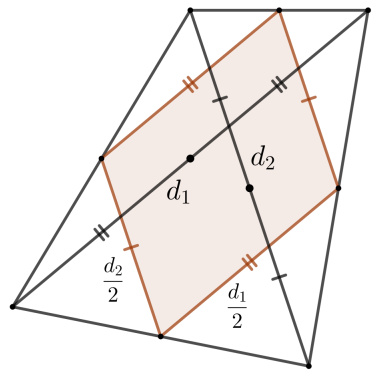
1. Теорема Вариньона

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

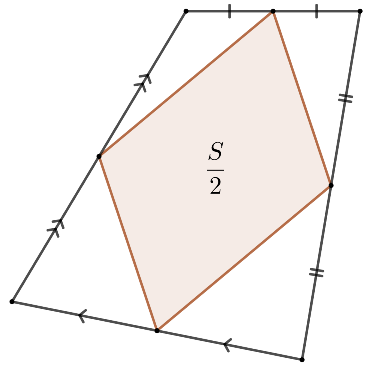
Действительно, стороны внутреннего четырехугольника параллельны диагоналям исходного четырехугольника, как средние линии соответствующих треугольников.



2. Стороны получившегося параллелограмма равны половинкам диагоналей исходного четырехугольника.



3. Площадь такого четырехугольника равна половине площади исходного четырехугольника.



Доказательство:

1. Пусть $BD = d_1, AC = d_2, \angle APB = \alpha$.

2. $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.

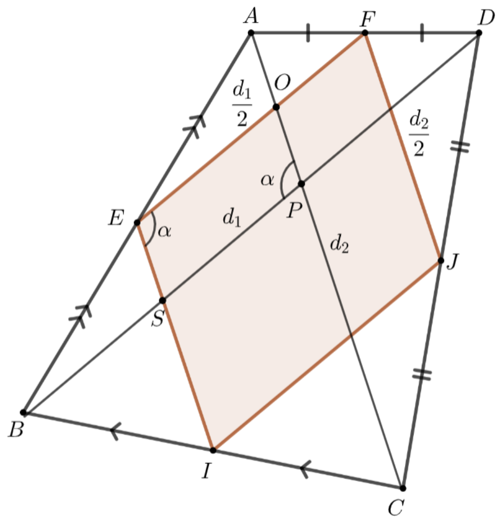
3. $EF = \dfrac{d_1}{2}$, так как EF – средняя линия $\triangle BAD$.

4. $EI = \dfrac{d_2}{2}$, так как EI – средняя линя $\triangle ABC$.

5. $EOPS$ - параллелограмм $\Rightarrow$ $\angle OES = \angle OPS = \alpha$.

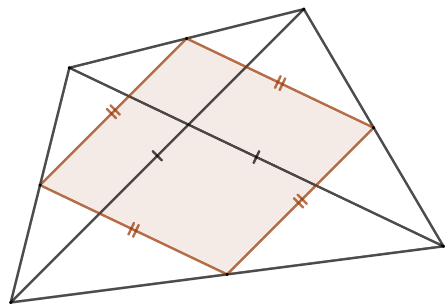
6. $FJ = \dfrac{d_2}{2}$, так как FJ – средняя линия $\triangle ADC$.

7. Тогда $S_{EFJI} = \dfrac{d_1}{2} \cdot \dfrac{d_2}{2} \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{4} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = \dfrac{S}{2}$.

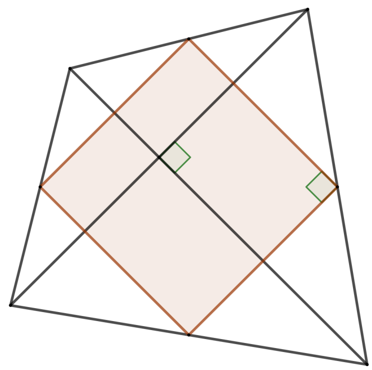


■

4. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.

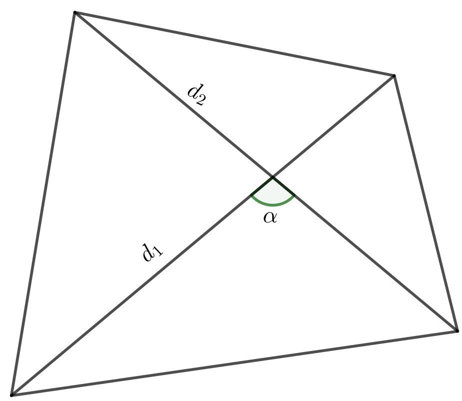


5. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.



6. Площадь любого выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$



Доказательство:

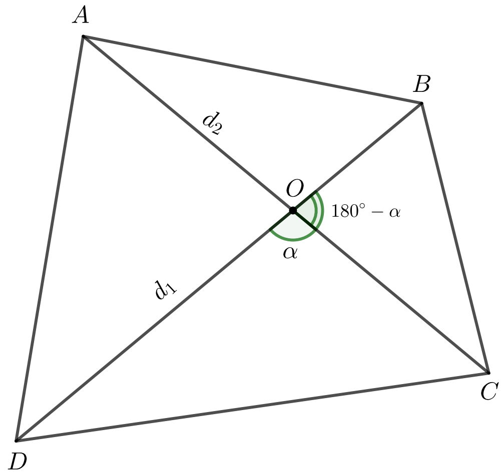
Распишем площадь каждого из треугольников:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \angle BOC$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \angle COD$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD$$



По формуле приведения $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$
Тогда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \alpha \qquad S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \alpha$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \alpha \qquad S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \alpha$$

Таким образом:

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BDO} + S_{DOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin \alpha =$

Вынесем общий множитель за скобку:

$= \frac{1}{2} \sin \alpha (AO \cdot OB + BO \cdot OD + CO \cdot OD + AO \cdot OC) =$

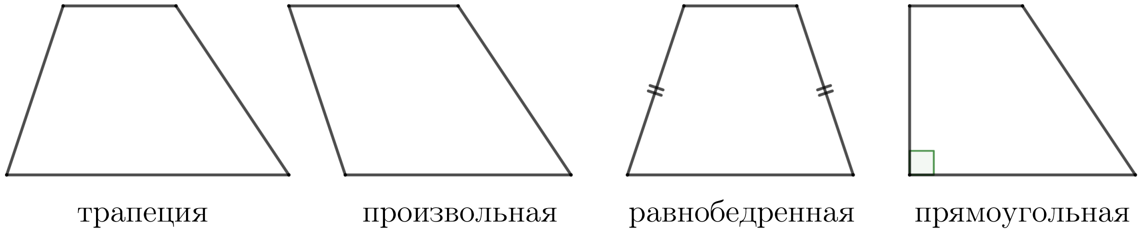
Сгруппируем:

$= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot ((AO \cdot OB + BO \cdot OD) + (CO \cdot OD + AO \cdot OC)) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (OB \cdot (AO + OD) + CO \cdot (OD + AO)) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (OB + CO)(OD + AO) = \frac{1}{a} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

■

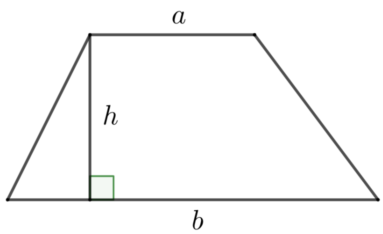
9 Трапеция

Определение. Трапеция – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет.



1. $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

Заметим, что $\dfrac{a+b}{2}$ – это длина средней линии, поэтому площадь трапеции равна средней линии, умноженной на высоту.

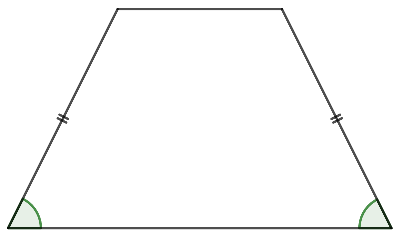


2. Факты про **равнобедренную** трапецию:

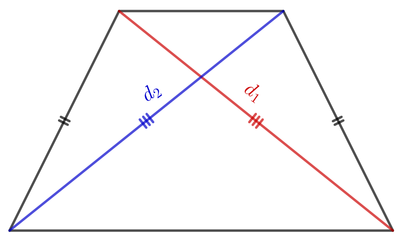
Определение. Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

<u>Свойства равнобедренной трапеции:</u>

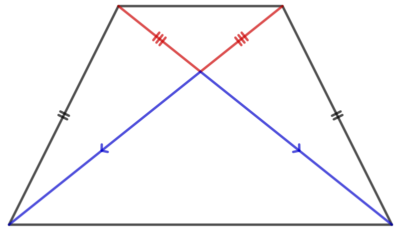
- Углы при основании равны;



- Диагонали равны;

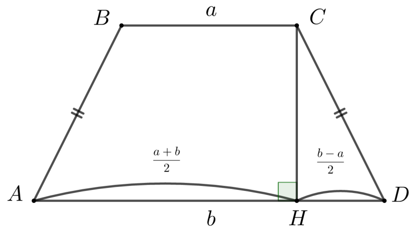


· Диагонали точкой пересечения делятся на равные отр

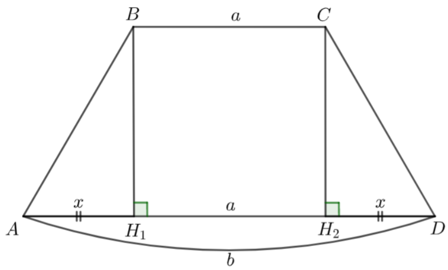


3. Очень ценное свойство **равнобедренной** трапеции:

Заметим, что отрезок AH по длине равен средней линии трапеции. Отрезок $AH = \dfrac{a+b}{2}$, а отрезок $HD = \dfrac{b-a}{2}$.



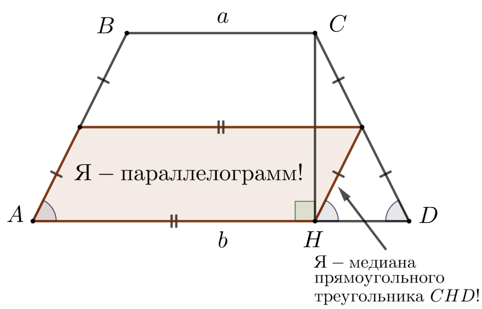
Приведём первое доказательство этого факта. Рассмотрим вторую картинку. Из неё следует следующее:



$$x + a + x = b$$
$$2x = b - a$$
$$x = \frac{b-a}{2}$$

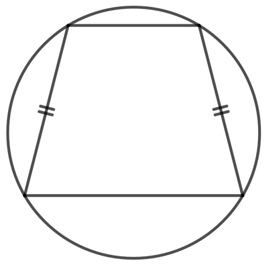
$$AH_2 = x + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b-a+2a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Второе доказательство этого факта можно увидеть на третьей картинке.

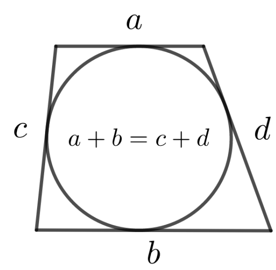


4. Вокруг равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.

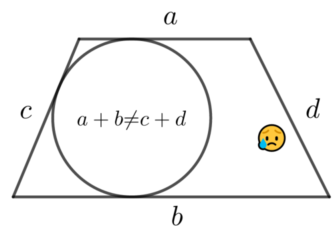
Верно и обратное: если вокруг трапеции можно описать окружность – она равнобедренная.



5. Вписать окружность можно в трапецию произвольной формы, главное, чтобы соблюдалось условие $a+b=c+d$,

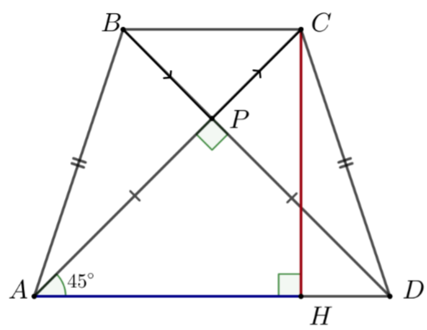


иначе нельзя вписать.



6. В равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями высота CH равна отрезку AH и равна средней линии трапеции MN.

$$\boxed{CH = AH = MN}$$



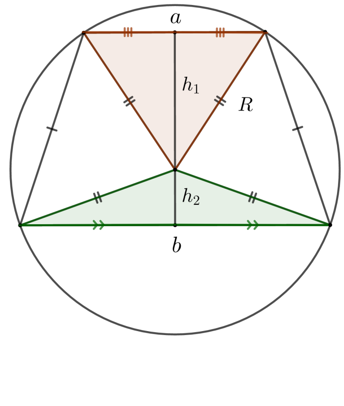
По свойству 3 равнобедренной трапеции из пункта 2 $\triangle APD$ – прямоугольный и равнобедренный. Это значит, что $\angle PAD = \angle PDA = 45°$

$\triangle ACH$– прямоугольный с $\angle CAH = 45°$,поэтому он равнобедренный. Тогда $CH = AH$.

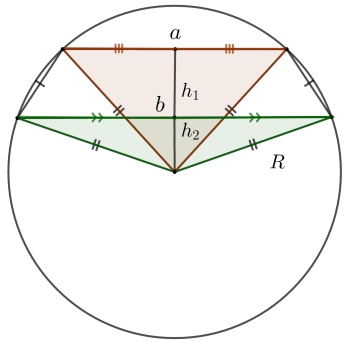
А из пункта 2 этого раздела мы знаем, что в равнобедренной трапеции отрезок AH равен по длине средней линии. Отсюда и получается наше утверждение.

7. Пусть известны длины оснований трапеции a и b, а также R – радиус описанной окружности. Как нам найти высоту?

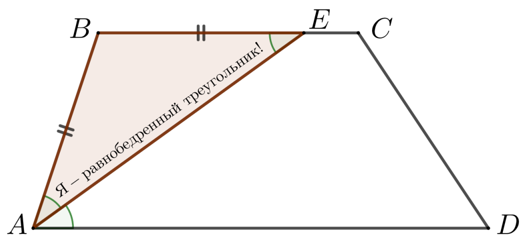
Ответ будет зависеть от положения центра окружности относительно трапеции. Если центр внутри, то высота трапеции равна $h = h_1 + h_2$, которые можно найти по теореме Пифагора из двух треугольников.



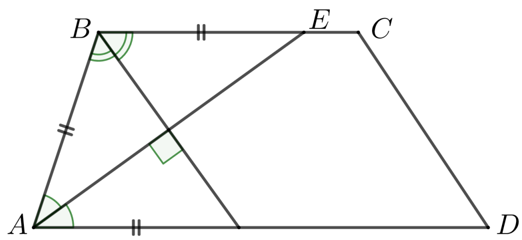
Если центр вне трапеции, то высота трапеции равна $h = h_1 - h_2$.



8. AE – биссектриса угла A трапеции. Пусть AE пересекает основание BC трапеции в точке E, тогда $\triangle ABE$ – равнобедренный.
Действительно, если AE – биссектриса, то $\angle BAE = \angle EAD$. Заметим, что $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD. Тогда в $\triangle ABE$ два угла равны, значит, он равнобедренный.

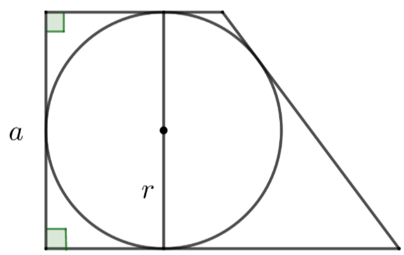


*Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции перпендикулярны.



9. Если в прямоугольную трапецию можно вписать окружность, то радиус этой окружности равен половине стороны трапеции, перпендикулярной основанию.

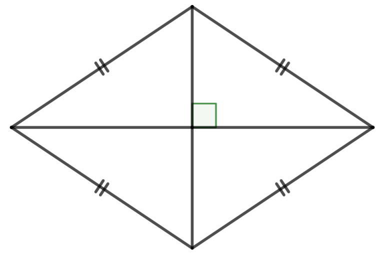
$$a = 2r$$
$$r = \frac{a}{2}$$



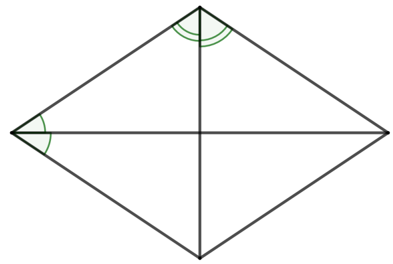
10 Ромб

Определение. Ромб – это четырехугольник, у которого все стороны равны.

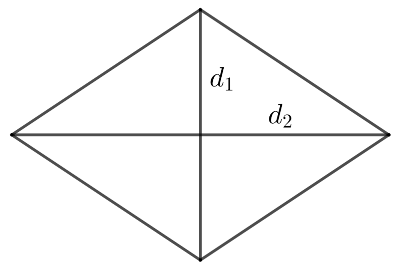
1. Диагонали ромба пересекаются под углом $90°$.



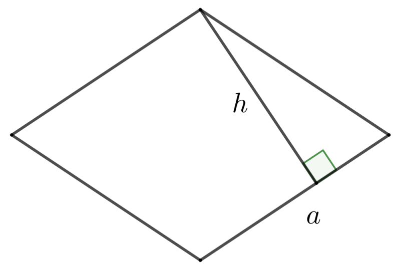
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.



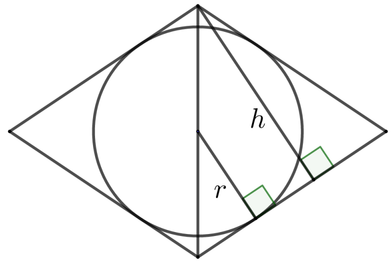
3. $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.



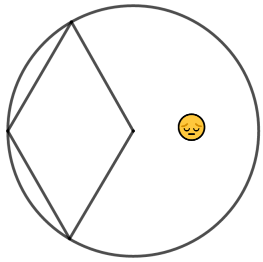
4. $S = a \cdot h$.



5. В ромб всегда можно вписать окружность, радиус которой будет равен $r = \dfrac{h}{2}$.

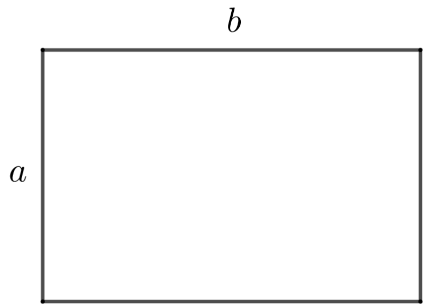


6. Если ромб не является квадратом, то описать вокруг него окружность нельзя.



11 Прямоугольник

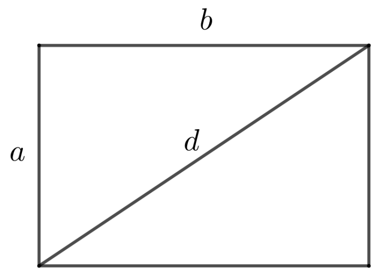
1. $S = a \cdot b$.



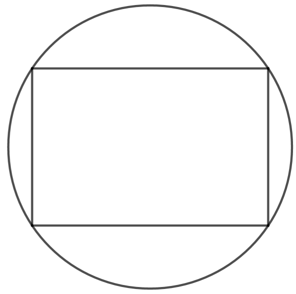
2. Диагонали прямоугольника равны. Их можно вычислить, зная стороны прямоугольника, по теореме Пифагора:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

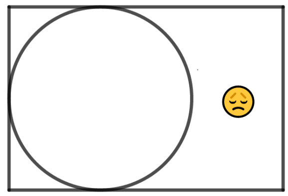
*На самом деле, любой параллелограмм, у которого диагонали равны, является прямоугольником.



3. Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.



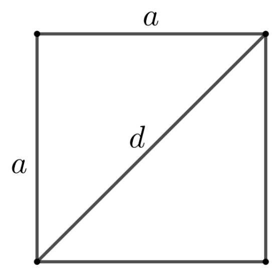
4. Если прямоугольник не является квадратом, то вписать в него окружность нельзя.



12 Квадрат

1. $S = a \cdot a = a^2$.

2. Диагональ квадрата можно найти по теореме Пифагора:



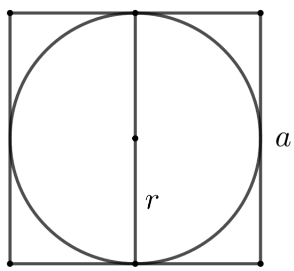
$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ d = a\sqrt{2}.$$

3. Площадь квадрата можно выразить через длину его диагонали:

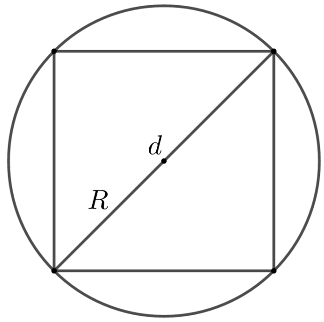
Так как $S = a^2$, а $d^2 = 2a^2$, значит $a^2 = \dfrac{d^2}{2}$, значит

$$S = \frac{d^2}{2}.$$

4. $r = \dfrac{a}{2}$.



5. $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



13 Синус, косинус, тангенс, котангенс

Вспомним таблицу значений основных тригонометрических углов:

угол / функция	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0

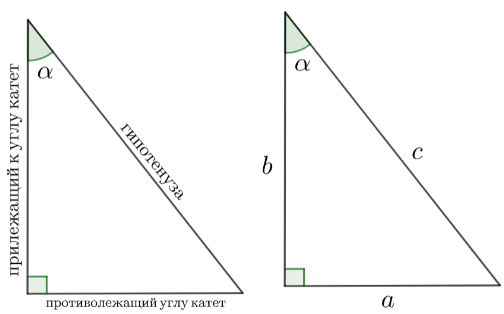
Для острых углов $\sin$, $\cos$, tg, ctg определяются следующим образом:

Синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$.

Косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$.

Тангенс — это отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.

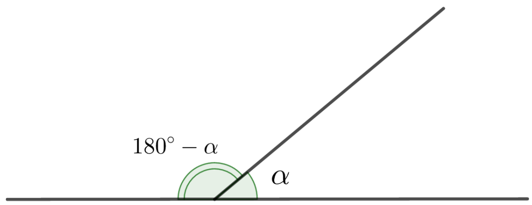
Котангенс — это отношение прилежащего катета к противолежащему катету: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.



Напоминаем, что для тупых углов $\sin$, $\cos$, tg, ctg определяются через тригонометрическую окружность.

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$
$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$



Из определений легко получить следующие формулы:

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

14 Окружность

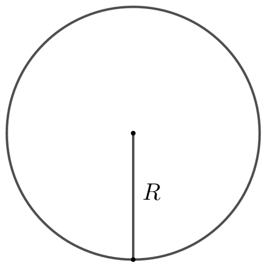
Определение. Окружность – это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

1. Длина окружности:

$$\mathrm{C} = 2\pi R$$

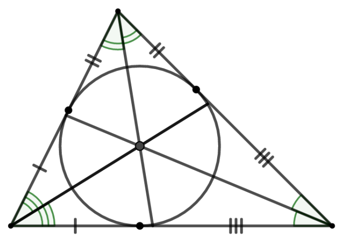
2. Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$



15 Вписанная окружность

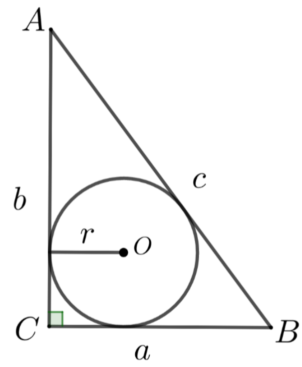
1. Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис.



*В треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, поэтому в треугольник всегда можно вписать окружность. А в многоугольнике биссектрисы не всегда пересекаются в одной точке, поэтому в многоугольник не всегда можно вписать окружность.

Если вы не верите, можете попробовать вписать окружность в прямоугольник.

2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формулам:

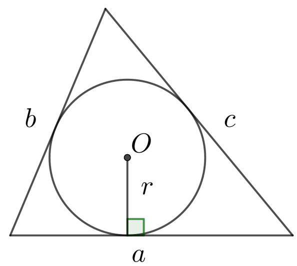


$$\boxed{r = p - c = \frac{a+b-c}{2}}$$

где p – полупериметр $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

$$\boxed{S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}}$$

3. Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти по формуле:



$$S = pr,$$

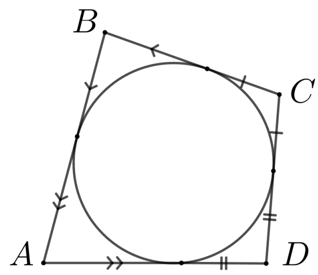
где p – это полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

*На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.

4. Когда в четырехугольник можно вписать окружность:

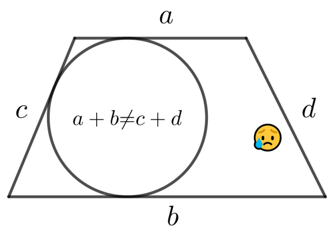
Если $AB + CD = BC + AD$, то в четырехугольник можно вписать окружность.
Верно и обратное: если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны.



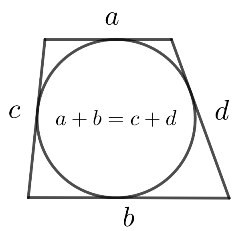
5. Четырехугольники, в которые можно вписать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя вписать окружность.



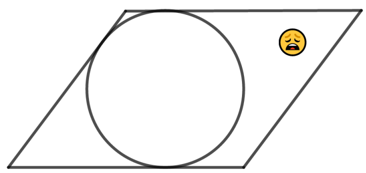
Можно только тогда, когда $a + b = c + d$



б) Параллелограмм:

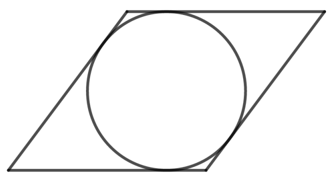
обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – ромб.



в) Ромб:

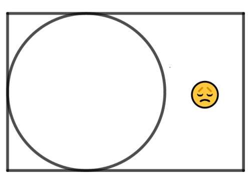
всегда можно вписать окружность.



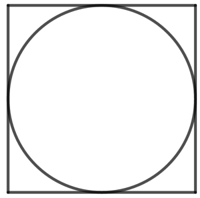
г) Прямоугольник:

обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда прямоугольник – квадрат.



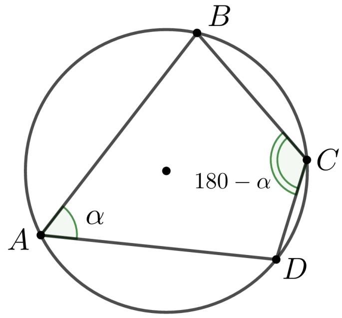
д) Квадрат:
всегда можно вписать окружность.



16 Описанная окружность

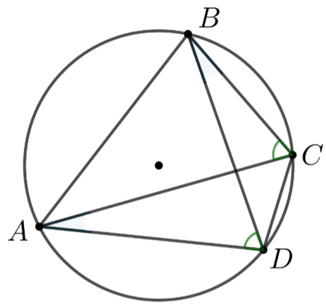
1. I признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Четыре точки лежат на одной окружности, если два противоположных угла в сумме дают 180°.

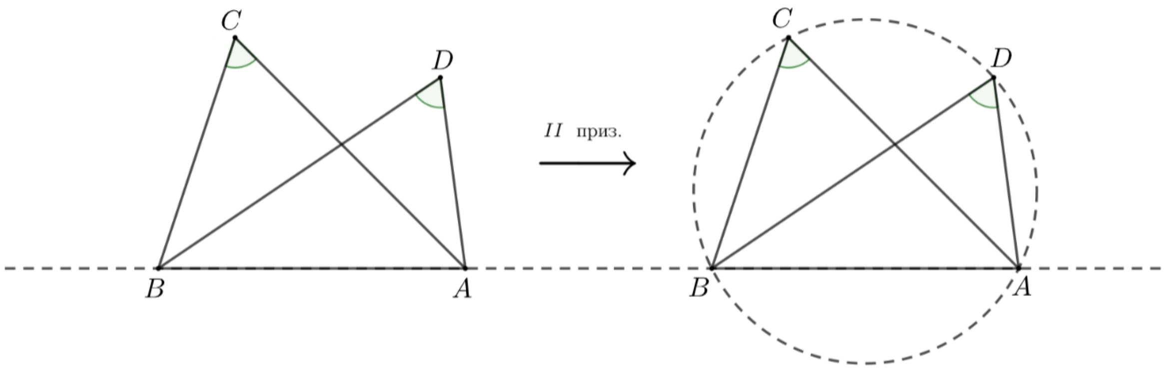


2. II признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Точки C и D лежат по одну сторону от прямой, содержащей отрезок AB. Углы ACB и BDA равны тогда и только тогда, когда точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



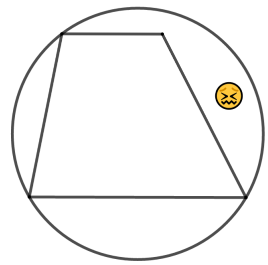
*Чаще всего мы используем это для того, чтобы доказать, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.



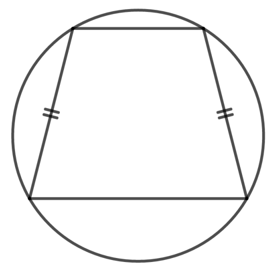
3. Четырехугольники, вокруг которых можно описать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя описать.



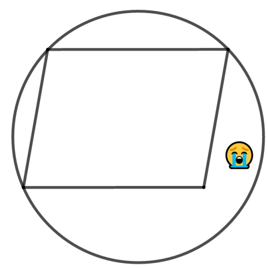
Можно только тогда, когда трапеция равнобедренная.



б) Параллелограмм:

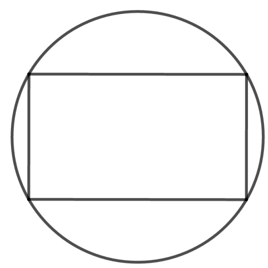
обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – прямоугольник.



в) Прямоугольник:

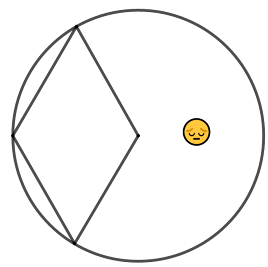
всегда можно описать окружность.



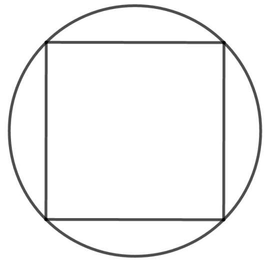
г) Ромб:

обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда ромб – квадрат.



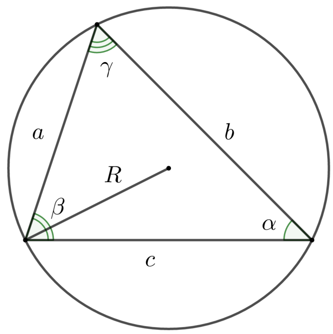
д) Квадрат:
всегда можно описать окружность.



17 Теорема синусов

1. Теорема синусов:

$$\boxed{2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.}$$



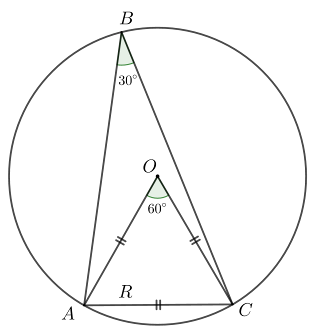
*Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

**А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольники два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторон.

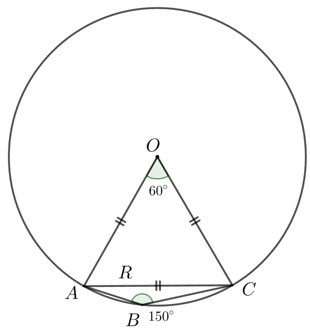
2. Иногда без теоремы синусов:

Вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу, равен либо $30°$ либо $150°$:

а) Если точка B лежит на большей дуге AC, то треугольник AOC – равносторонний, а $\angle AOC = 60°$, следовательно, угол $ABC = 30°$.

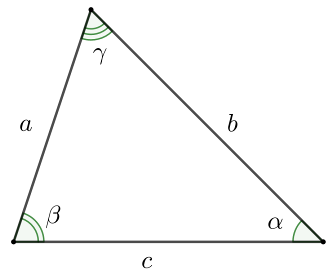


б) Если точка B лежит на меньшей дуге AC, то треугольник AOC – равносторонний, а $\angle AOC = 60°$, следовательно, угол $ABC = 150°$.



18 Теорема косинусов

Теорема косинусов поможет в случае, если нам известны три стороны треугольника и требуется найти какой-нибудь из углов, или если известны две стороны и угол и необходимо найти третью сторону.



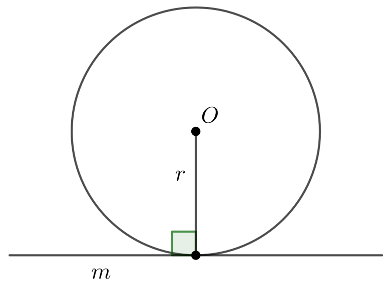
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

*Теорема косинусов – она как теорема Пифагора, только в теореме Пифагора нет $-2bc\cos\alpha$, ведь $\cos 90^\circ = 0$.

19 Окружность и касательная

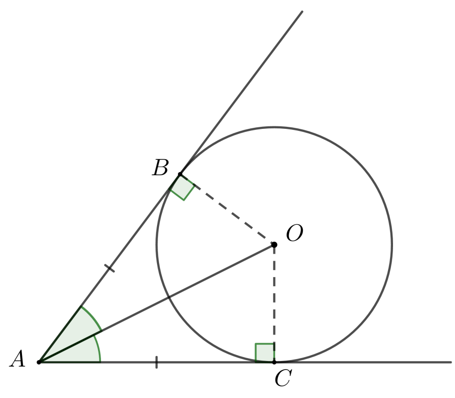
1. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной:

$$r \perp m$$



2. Если из точки A провести касательные (две) к окружности, где B и C - точки касания, то $AB = AC$.

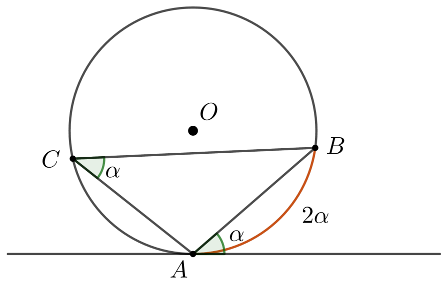
3. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.



4. Пусть к окружности в точке A проведена касательная, AB – хорда этой окружности, проходящая через точку A, тогда угол α между хордой AB и касательной равен половине угловой величины дуги AB, а значит, любому вписанному углу, опирающемуся на дугу AB.

Угол между касательной и хордой:

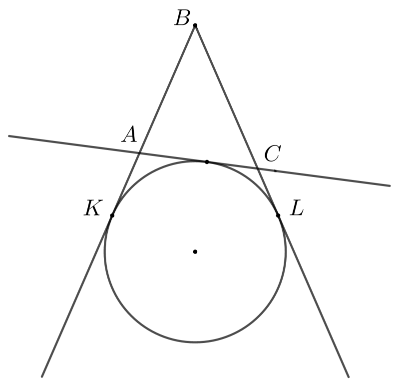
$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{AB}$$



5. Важное свойство вневписанной окружности:

Пусть периметр треугольника $ABC = P$, тогда $BL = BK = \dfrac{P}{2}$.

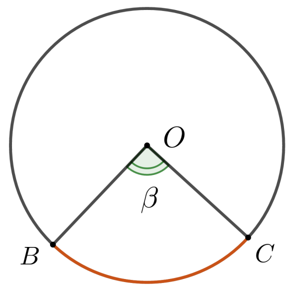
Например, если стороны треугольника $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$, то $BL = BK = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = 9$.



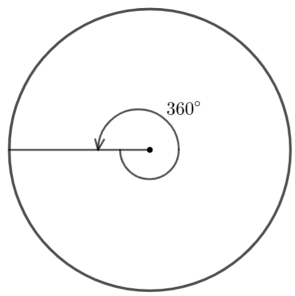
20 Вписанный и центральный углы

1. Центральный угол - угол с вершиной в центре окружности.

$$\angle\beta = \overset{\smile}{BC}$$

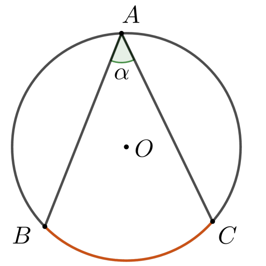


2. Градусная мера всей дуги окружности равна 360°.



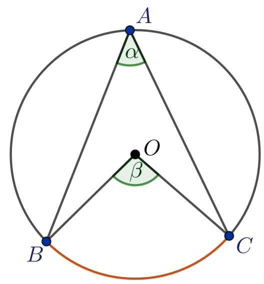
3. Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\,\smile{BC}$$



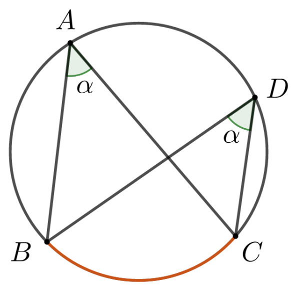
4. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\angle\beta$$



5. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

$$\angle BAC = \angle BDC$$



21 Углы многоугольника

1. Сумма углов n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$, например сумма углов четырехугольника равна $180° \cdot (4-2) = 360°$.

2. Угол правильного n-угольника равен $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$, например, у правильного четырехугольника (квадрата) угол равен $\dfrac{180° \cdot (4-2)}{4} = 90°$.

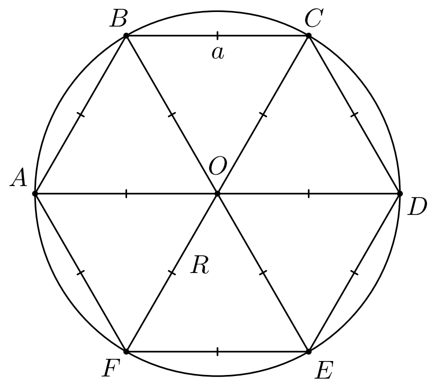
22 Правильный шестиугольник

Определение. Правильный шестиугольник — это шестиугольник, у которого все стороны и все углы равны.

1. Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников. Супер важное свойство!

2. Угол правильного шестиугольника равен $120°$.

3. Радиус описанной окружности: $R = a$.

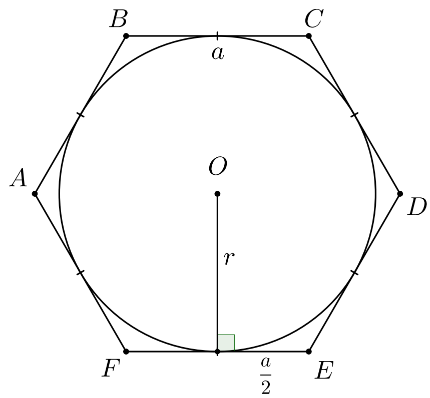


4. Радиус вписанной окружности:

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

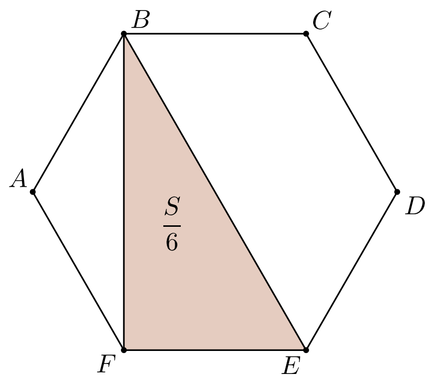
5. Площадь правильного шестиугольника:

$$S = 6S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$



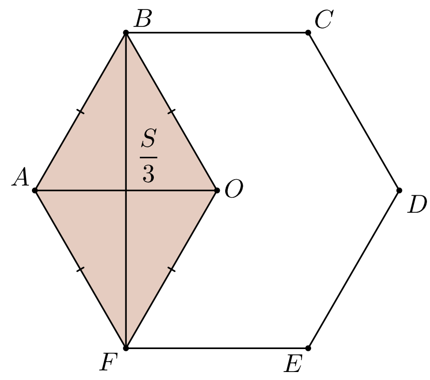
6. В правильном шестиугольнике верно, что

$$S_{BFE} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}.$$

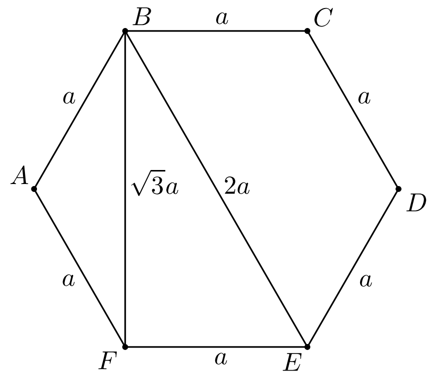


7. Иногда в задачах полезно знать, что четырёхугольник $ABOF$ является ромбом и верно, что

$$S_{ABOF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF}, \quad S_{ABF} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}.$$



8. В правильном шестиугольнике верно, что $BF = \sqrt{3}a$, $BE = 2a$.



9. В правильном шестиугольнике верно, что

$$S_{BFD} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}.$$