10 класс

Алгебра и начала математического анализа

Уравнение

$\cos x = a$

УРАВНЕНИЕ

Уравнение — это математическое равенство, в котором неизвестна одна или несколько величин.

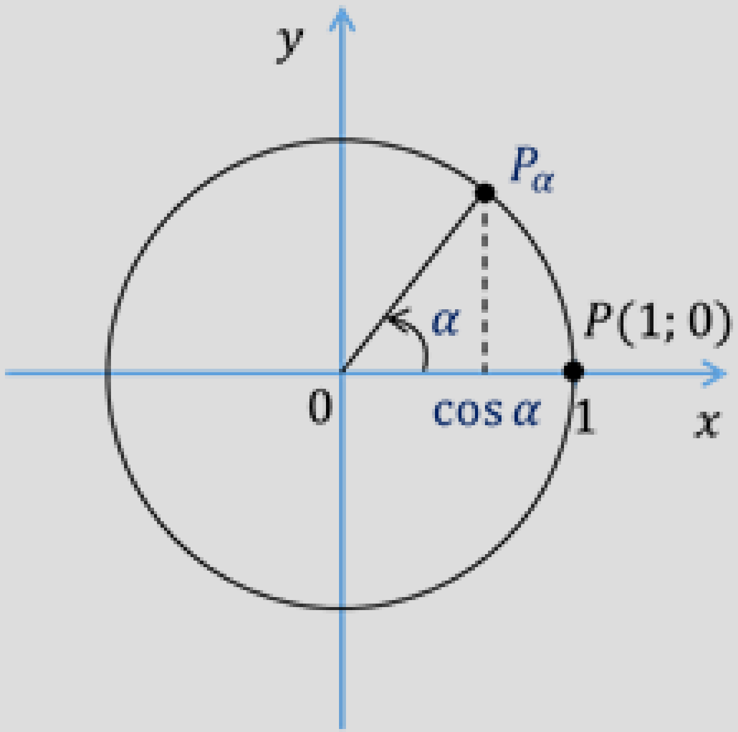
Значение неизвестных нужно найти так, чтобы при их подстановке в пример получилось верное числовое равенство.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Тригонометрическое уравнение – уравнение, которое содержит переменную под знаком тригонометрических функций.

Уравнения вида $\cos x = a, \sin x = a,$
$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$ *называют простейшими тригонометрическими уравнениями.*

На этом уроке мы с вами подробно рассмотрим решение уравнений вида $\cos x = a$.



Косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки P(1;0) вокруг начала координат на угол α. При этом не забудьте, что так как координаты x и y точек единичной окружности удовлетворяют неравенствам $-1 \leq y \leq 1$ и $-1 \leq x \leq 1$, то для $\alpha \in (0; 360°)$ справедливо неравенство $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Из этого следует, что уравнение $\cos x = a$ имеет корень только при $-1 \leq a \leq 1$.

КАК РЕШАЮТ ТАКИЕ УРАВНЕНИЯ?

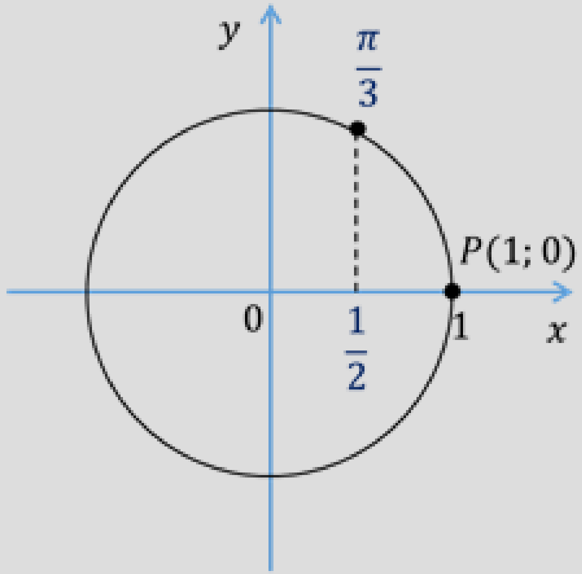
Рассмотрите уравнение $\cos\frac{\pi}{3} = x$.

Чтобы найти x, нам нужно ответить на вопрос, чему равен косинус точки $\frac{\pi}{3}$. Для этого нам достаточно вспомнить таблицу косинусов:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Тогда $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Давайте покажем это на единичной окружности.

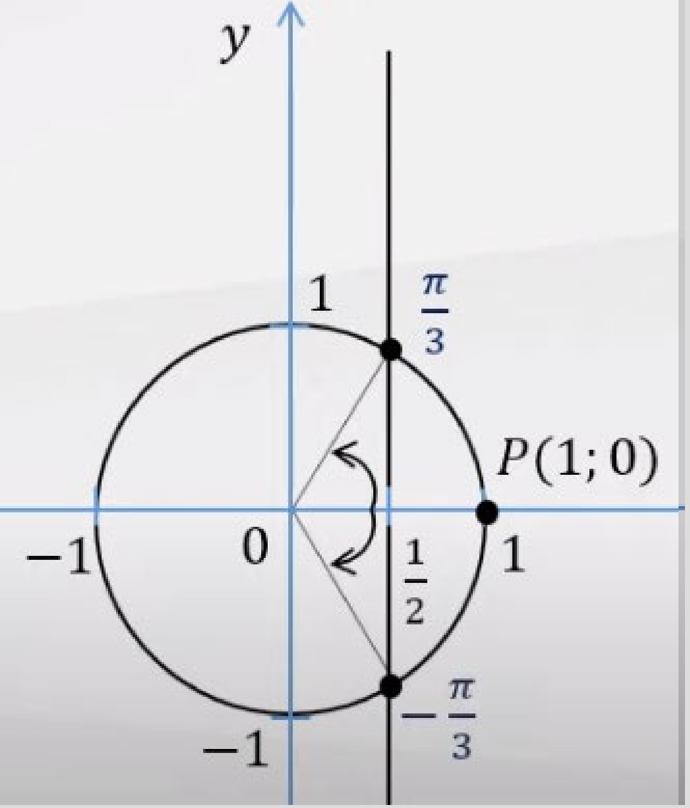


Отметим точку $\frac{\pi}{3}$. У этой точки, как и у любой другой, есть свои координаты. Если мы опустим перпендикуляр из точки $\frac{\pi}{3}$ на ось абсцисс, то попадём в $\frac{1}{2}$.

КАК РЕШАЮТ ТАКИЕ УРАВНЕНИЯ?

Рассмотрите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Чтобы здесь найти x, нам нужно ответить на вопрос, косинус каких точек равен $\frac{1}{2}$. Нас будут интересовать все точки, которые лежат на единичной окружности и пересекаются вертикальной прямой, проходящей через точки, имеющие абсциссу, равную $\frac{1}{2}$



Заметим, что наша прямая пересекает единичную окружность в двух точках – M_1 и M_2

Исходя из таблицы значений косинусов, точка M_1 получается из начальной точки P(1;0) поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а тогда точка M_2 поворотом на угол $-\frac{\pi}{3}$.

Тогда решением нашего уравнения будут два корня – $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а $x_2 = -\frac{\pi}{3}$.

Но ведь в эти точки мы можем попасть не по одному разу. Если мы сделаем полный оборот по единичной окружности, то снова попадём в эти точки. Сделав ещё полный оборот, снова попадём в эти точки и так далее. Отсюда уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет два решения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Как правило, эти серии решений совмещают и записывают как $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решение уравнения $\cos x = a$

$$\cos x = a$$

$$x_1 = \alpha_1 + 2\pi k, k \in Z$$

$$x_1 = \alpha_2 + 2\pi k, k \in Z$$

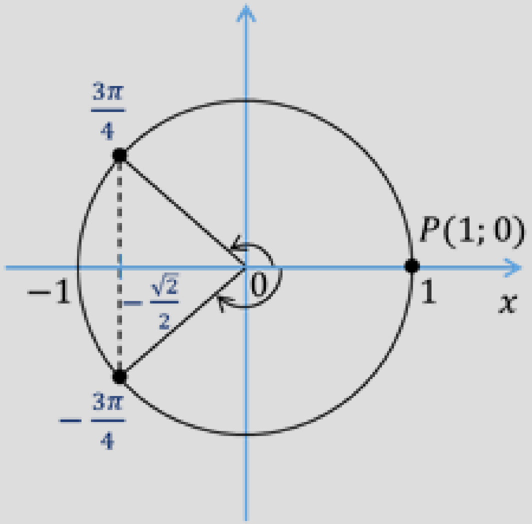
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in Z$$

Решение уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Абсциссу, равную $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, имеют две точки единичной окружности.

Так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то угол $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, а угол $x_2 = -\frac{3\pi}{4}$.



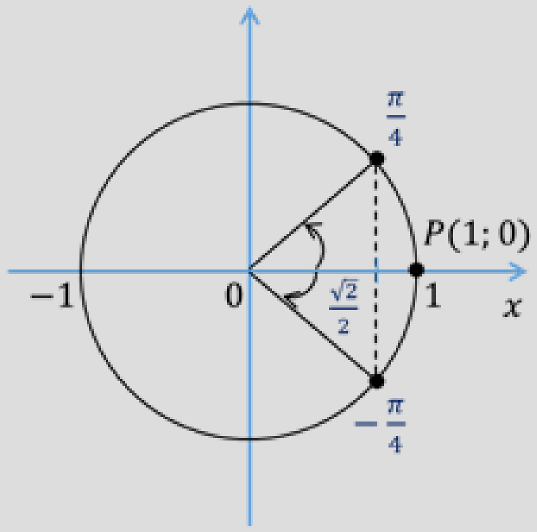
Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ можно найти по формуле

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Решение уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Абсциссу, равную $\frac{\sqrt{2}}{2}$, имеют две точки единичной окружности.

Так как $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то угол $x_1 = \frac{\pi}{4}$, а угол $x_2 = -\frac{\pi}{4}$.



Следовательно, все корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ можно найти по формуле

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Заметим, что каждое из уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеют бесконечное множество решений. Однако, на отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень. Так, $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, - это корень уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $x_1 = \frac{\pi}{4}$, - это корень уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Число $\frac{3\pi}{4}$ называют ***арккосинусом числа*** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Записывают так: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

Число $\frac{\pi}{4}$ называют ***арккосинусом числа*** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Записывают так: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Кстати, «арккосинус» в переводе с латинского означает «дуга» и «косинус». Это обратная функция.

АРККОСИНУС

Арккосинусом числа *a*, $|a| \leq 1$, называется такое число $x \in [0; \pi]$, косинус которого равен ***a***.

$\arccos a = x$, если $cos\, x = a$ и $0 \leq x \leq \pi$.

АРККОСИНУС

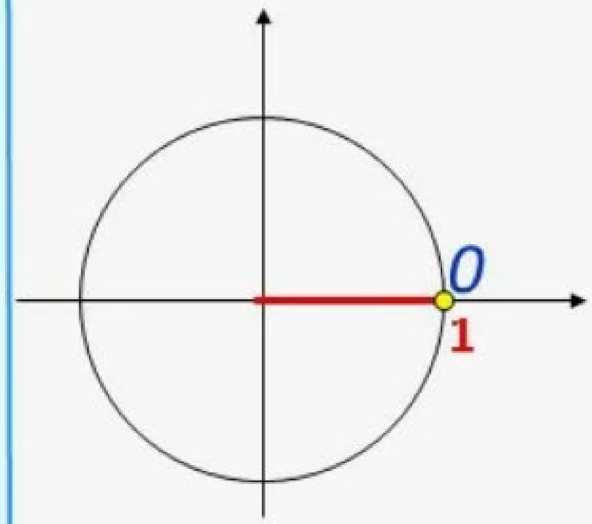
Для любого $\boldsymbol{a} \in [-1; 1]$ справедлива формула:

$$\mathbf{arccos}\ \boldsymbol{a} + \mathbf{arccos}\ (-\boldsymbol{a}) = \pi$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных значений.

Частные случаи

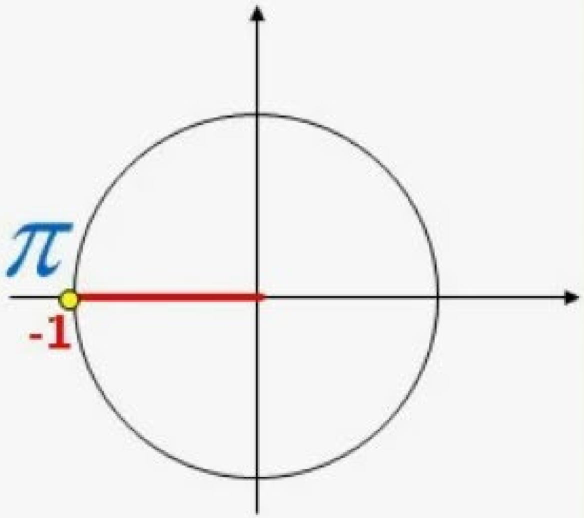
$\cos x = 1$



$$x = 0 + 2\pi n$$

$$\boxed{x = 2\pi n,\ n \in Z}$$

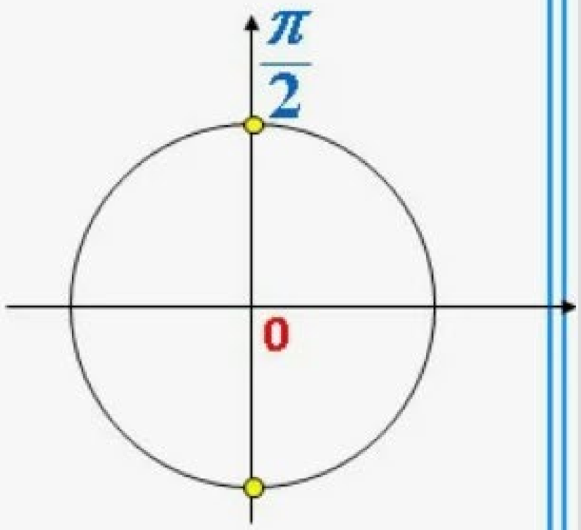
$\cos x = -1$



$$x = \pi + 2\pi n$$

$$\boxed{x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z}$$

$\cos x = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z}$$

Решим уравнение $\cos x = 0,3$.

$$\cos x = 0,3$$

$$x = \pm\, arccos\, 0,3 + 2\pi k,\ k \in Z$$

$$x \approx \pm 1,266 + 2\pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $x \approx \pm 1,266 + 2\pi k,\ k \in Z$

Решим уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\, arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k, k\in Z$$

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

$$2x=\pm\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$$

Ответ: $x=\pm\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in Z$

№1

Вычислите:

а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\arccos 1 + 3\arccos 0$;

в) $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

№2

Вычислите:

а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

б) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$;

в) $5\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) - 2\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$;

г) $\cos(\pi - \arccos 0{,}2)$;

д) $\sin\left(\arccos 0{,}6\right)$.

№3

Найдите все значения *a*, при которых выражение имеет смысл:

а) $\arccos 2a$;

б) $\arccos(a - 1)$;

в) $\arccos(a^2 + 1)$.

№4

Упростите выражение:

а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$;

в) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$.

№5

Решите уравнения:

а) $\cos x = 0{,}1$;

б) $2\cos 3x = -1$;

в) $3\cos\frac{x}{3} = \sqrt{2}$;

г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;

д) $\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x = -1$.

е) $1 - 2\sin^2 x = 0$;

ж) $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$.

№6

Найди все решения уравнения $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[-4\pi; 4\pi]$.