ЗАДАНИЕ №17

Уровень – профильный

Максимальный балл – 3

Решение включает в себя обязательное построение математической модели, то есть это обычная текстовая задача, но с экономическим (финансовым) уклоном и чаще всего с большим количеством вычислений.

1 ТЕОРИЯ
НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Геометрическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа q:

$$b_{n+1} = b_n q \ (n = 1, 2, \dots).$$

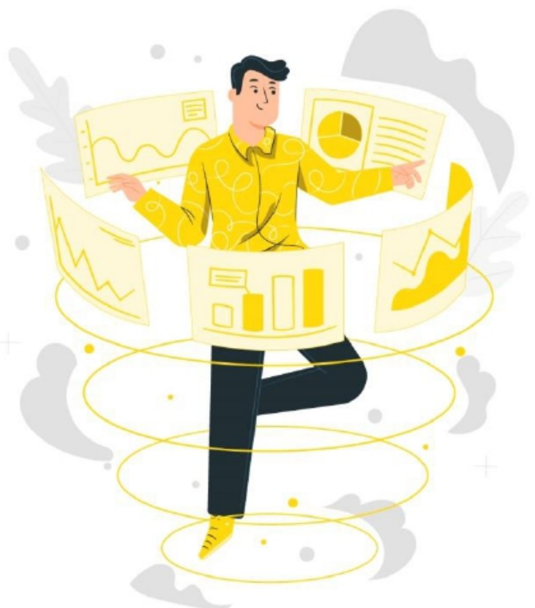
Фиксированное число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геогеометрической прогрессии :

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$



Если величину x увеличить на p%, получим:

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Если величину x уменьшить на p %, получим:

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Если величину x увеличить на p%, а затем уменьшить на q%, получим:

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right)$$

Если величину x дважды увеличить на p%, получим:

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Если величину x дважды уменьшить на p%, получим:

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

Задачи на кредиты:

1 тип

- Задачи, где выплаты кредита производятся равными платежами. Схема называется «аннуитет».
- Задачи, в которых есть информация о платежах.

2 тип

- Задачи, где выплаты кредита подбираются так, что сумма долга уменьшается равномерно. Это так называемая «схема с дифференцированными платежами».
- Задачи, в которых есть информация об изменеии суммы долга.

② СХЕМА 1
ИЗВЕСТНА ИНФОРМАЦИЯ О ПЛАТЕЖАХ

1

1 июня 2013 года Ярослав взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Ярослав переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Ярослав может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решим эту задачу в общем виде.

Пусть S – сумма кредита, p% – процентная ставка банка. Тогда после каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в $k = 1 + \frac{p}{100}$ раза.

Пусть x – величина платежа. После первого начисления процентов и первого платежа сумма кредита равна Sk - x, после второго (Sk - x)k - X.

Например, долг выплачен равными платежами за 5 платежных периодов. Тогда:

$$((((Sk - x) \cdot k - x) \cdot k - x) \cdot k - x) \cdot k - x = 0$$

$$Sk^5 - x \cdot (k^4 + k^3 + k^2 + k + 1) = 0$$

Заметим, что в скобках – сумма 5 членов геометрической прогрессии, где b = 1, q = k.

Поскольку $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, эта сумма $= \frac{k^5 - 1}{k - 1}$

Получим: $Sk^5 = x \cdot \frac{k^5 - 1}{k - 1}$

В общем случае для n платежных периодов

$$Sk^n = x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

S = 900000 руб., p = 1% $\Rightarrow$ $k = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}01$

$x \leq 300000$ руб., x - ежемесячная выплата, n_{min} - ?

Внесем все данные в таблицу

№	ДОЛГ	НАЧИСЛЕНИЯ	ВЫПЛАТЫ
1	S	Sk	x
2	Sk - x	(Sk - x)k	x
3	(Sk - x)k - x	((Sk - x)k - x)k	x

Предположим, что долг был выплачен 3-я равными платежами за 3 месяца $\Rightarrow$

$$((Sk - x)k - x)k - x = 0$$

$$Sk^3 - xk^2 - xk - x = 0$$

$$Sk^3 = x(k^2 + k + 1)$$

$k^2 + k + 1 \Rightarrow$ геометрическая прогрессия

$$\Rightarrow k^2 + k + 1 = k^2 + k^1 + k^0 = \frac{k^3 - 1}{k - 1}$$

Таким образом, запишем эту формулу для общегоо случая с n платежами

$$\mathbf{Sk^n = x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

S, k - известные велечины. Чем больше платит, тем меньше месяцев выплачивать кредит $\Rightarrow$ берем максимальную ежемесячную выплату 300000.

Подставив в формулу, находим n.

Задача решена

2

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата:

1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей. Сколько млн рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Запишем краткую запись:
S = ? млн рублей
r = 20%
k = 1,2
x = 2,16 млн рублей
n = 3 года

Внесем все данные в таблицу

№	ДОЛГ (Sk)	ВЫПЛАТА	НАЧИСЛЕНИЯ
1	Sk	x	Sk - x
2	k(Sk - x)	x	k(Sk - x) - x
3	k(k(Sk - x) - x)	x	k(k(Sk - x) - x) - x

Раскроем скобки

№	ДОЛГ (Sk)	ВЫПЛАТА	НАЧИСЛЕНИЯ
1	Sk	x	Sk - x
2	Sk2 - kx	x	Sk2 - kx - x
3	Sk3 - k2x - kx	x	Sk3 - k2x - kx - x

Sk3 - k2x - kx - x = 0
Sk3 = k2x + kx + x
Sk3 = x(k2 + k + 1) сделаем замену числа k
S · 1,23 = x(1,22 + 1,2 + 1) сделаем замену числа x

$$S = \frac{2{,}16\,(1{,}44 + 1{,}2 + 1)}{1{,}728}$$

$$S = \frac{3{,}64}{0{,}8}$$

S = 4, 55 (млн рублей)

Ответ: 4,55 млн рублей

Заметим, что обе задачи решаем по одной схеме. Различия в том, что в первой задаче ищем срок выплат, а во второй задаче – сумму, взятую в кредит. В обеих задачах приходим к одной формуле.

Основные принципы решения задач на кредиты 1 ТИПА

Пусть S – сумма кредита,
n – количество платежных периодов,
p – процент по кредиту, начисляемый банком,

Коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Схема погачшения кредита:

$(((S \cdot k - x) \cdot k - x) \cdot k - x) \dots \cdot k - x = 0$
X – очередная выплата,
n – число платежных периодов.

Раскроем скобки:

$S \cdot k^n - x(k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^2 + k + 1) = 0$

Для выражения в скобках можем применить формулу суммы геометрической прогрессии. Получим:

$$S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0$$

③ СХЕМА 3
ИЗВЕСТНА ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗМЕНЕНИИ СУММЫ ДОЛГА

Если в условии задачи сказано, что сумма долга уменьшается равномерно, или что 15-го числа каждого месяца сумма долга на одну и ту же величину меньше суммы долга на 15-е число предыдущего месяца, или есть информация о том, как именно уменьшается сумма долга — это задача на кредиты второго типа.

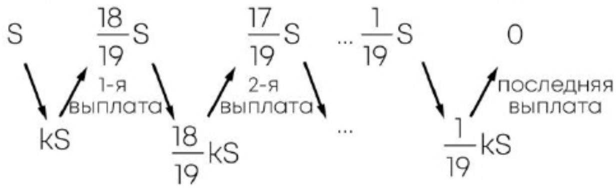
15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата:
1) 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего;
2) со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
3) 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ключевая фраза в условии: «15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца». Другими словами, сумма долга уменьшается равномерно. Что это значит?

Если вначале сумма долга равна S, то через месяц (после начисления процентов и первой выплаты) она уменьшилась до $\frac{18}{19}S$.
Еще через месяц будет $\frac{17}{19}S$,
затем $\frac{16}{19}S$ — и так до нуля.

Пусть $\mathbf{k = 1 + \frac{r}{100}}$

Нарисуем схему погашения кредита.



Первая строка в схеме — сумма долга после очередной выплаты.
Вторая строка — сумма долга после начисления процентов. Стрелками показано, как меняется сумма долга.
Число платежных периодов n = 19.

Вот клиент берет в кредит сумму S. После начисления процентов сумма долга увеличилась в k раз и стала равна kS. После первой выплаты сумма долга уменьшилась на $\frac{1}{19}S$ и стала равной $\frac{18}{19}S$.
Банк снова начисляет проценты, и теперь сумма долга равна $\frac{18}{19}kS$.
Таким образом, первая выплата $S_1 = S \cdot k - \frac{18}{19}S$
Вторая выплата: $S_2 = \frac{18}{19}kS - \frac{17}{19}S$
...
19-я вплата: $S_{19} = \frac{1}{19}kS$
Сумма всех выплат: $S_0 = S_1 + S_2 + ... + S_{19} = ... =$

$$= \left(kS - \frac{18}{19}S\right) + \left(\frac{18}{19}kS - \frac{17}{19}S\right) + ... + \frac{1}{19}kS =$$

$$= kS\left(1 + \frac{18}{19} + \frac{17}{19} + ... + \frac{1}{19}\right) - S\left(\frac{18}{19} + \frac{17}{19} + ... + \frac{1}{19}\right)$$

Мы сгруппировали слагаемые и вынесли общие множители за скобку. Видим, что и в первой, и во второй скобке — суммы арифметической прогрессии,
у которой $a_1 = \frac{1}{19}$ и $d = \frac{1}{19}$
В первой скобке — сумма 19 слагаемых, во второй сумма 18 слагаемых.

По формуле сумма арифметической прогрессии,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\frac{1}{19} + \frac{2}{19} + ... + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{19} + \frac{19}{19}\right) \cdot 19 = 10$$

$$\frac{1}{19} + \frac{2}{19} + ... + \frac{18}{19} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{19} + \frac{18}{19}\right) \cdot 18 = 9$$

Получим, что общая сумма выплат

$$S_0 = 10\,kS - 9S = 10\left(1 + \frac{p}{100}\right)S - 9S$$

Далее преобразовываем и выполняем вычисления.

$n = 19$ месяцев, $S_0 = 1{,}3S$, $r = ?\ \%$, $k = 1 + \frac{r}{100}$

Внесем все данные в таблицу

№	ДОЛГ	ИЗМЕНЕНИЯ ДОЛГА	ВЫПЛАТЫ
1	$\frac{19}{19}S$	Sk	$Sk - \frac{18}{19}S$
2	$\frac{18}{19}S$	$\frac{18}{19}Sk$	$\frac{18}{19}Sk - \frac{17}{19}S$
...			
18	$\frac{2}{19}S$	$\frac{2}{19}Sk$	$\frac{2}{19}Sk - \frac{1}{19}S$
19	$\frac{1}{19}S$	$\frac{1}{19}Sk$	$\frac{1}{19}Sk$
20	0		

$$S_0 = \left(Sk - \frac{18}{19}S\right) + \left(\frac{18}{19}Sk - \frac{17}{19}S\right) + \ldots + \left(\frac{2}{19}Sk - \frac{1}{19}S\right) + \frac{1}{19}Sk =$$

$$= Sk\underbrace{\left(1 + \frac{18}{19} + \ldots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right)}_{1} - S\underbrace{\left(\frac{18}{19} + \frac{17}{19} + \ldots + \frac{1}{19}\right)}_{2}$$

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n}$$

1) $\dfrac{1 + \frac{1}{19}}{2} \cdot 19 = \dfrac{19 + 1}{2} = 10$

2) $\dfrac{\frac{18}{19} + \frac{1}{19}}{2} \cdot 18 = \dfrac{18}{2} = 9$

$S_0 = 10Sk - 9S$

$1{,}3\cancel{S} = 10\cancel{S}k - 9\cancel{S}$

$1{,}3 = 10k - 9$

$10{,}3 = 10k$

$k = 1{,}03$

$1 + \frac{r}{100} = 1{,}03$

$r = 3\ \%$

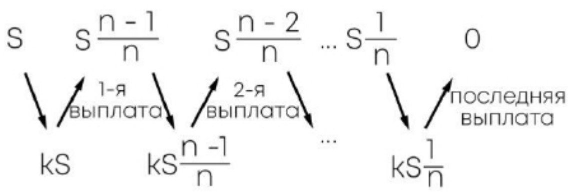
Ответ: 3%

Основные принципы решения задач на кредиты 2 ТИПА (с дифференцированными платежами)

Пусть S – сумма кредита,
n – количество платежных периодов,
p – процент по кредиту, начисляемый банком.

Коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Схема погашения кредита для n платежных периодов



n - число платежных периодов

1 выплата: $S_1 = S \cdot k - S \cdot \frac{n-1}{n}$

2 выплата: $S_2 = S \cdot \frac{n-1}{n}k - S \cdot \frac{n-2}{n}$

n-ная выплата: $S_n = S \cdot \frac{1}{n} \cdot k$

Сумма всех выплат $S_0 = S_1 + S_2 + \ldots + S_n =$

$$= S \cdot k\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) -$$

$$- S\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Применяем формулу суммы арифметической прогрессии.
Общая сумма выплат :

$$S_0 = S \cdot k \cdot \frac{n+1}{2} - S \cdot \frac{n-1}{2} =$$

$$S + S \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{100} = S - П$$