Издательство «Легион»

Задачи с экономическим содержанием в ЕГЭ по математике профильного уровня: типы, способы решения

Дерезин Святослав Викторович

18 апреля 2024 г.

План вебинара

- Демоверсия ЕГЭ–2024
- Экономическая задача с ЕГЭ–2023
- Экономическая задача с досрочного ЕГЭ–2024
- Некоторые характерные модели

Книга для подготовки

Демоверсия ЕГЭ-2024

16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на r% по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

$\boxed{16}$ В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 750 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1350 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2035 году?

Решение:

Составим математическую модель по условию задачи. Пусть S — сумма, взятая в кредит ($S = 750$ тыс. рублей); $q = 1 + \frac{r}{100}$ — процентный коэффициент ($q = 1{,}2$); x_1, x_2, …, x_{10} — ежегодные выплаты по кредиту; $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$ — сумма всех выплат ($X = 1350$ тыс. рублей). Обозначим через d_1 — разность арифметической прогрессии долгов в июле 2026 — 2030 годов, а через d_2 — разность арифметической прогрессии долгов в июле 2031 — 2035 годов.

Тогда получим следующую схему погашения кредита в 2026 — 2030 и 2031 — 2035 годах:

$$\begin{cases} Sq - x_1 = S - d_1, \\ (S - d_1)q - x_2 = S - 2d_1, \\ \vdots \\ (S - 4d_1)q - x_5 = S - 5d_1, \end{cases} \quad \begin{cases} (S - 5d_1)q - x_6 = S - 5d_1 - d_2, \\ (S - 5d_1 - d_2)q - x_7 = S - 5d_1 - 2d_2, \\ \vdots \\ (S - 5d_1 - 4d_2)q - x_{10} = 0. \end{cases}$$

По условию задачи долг должен уменьшаться от S до 0 за 10 лет. Значит, $S - 5d_1 - 5d_2 = 0$.

Чтобы получить второе уравнение относительно d_1 и d_2, сложим все 10 уравнений из схемы погашения кредита. Получим:

$(10S - 35d_1 - 10d_2)q - X = 9S - 35d_1 - 10d_2.$

Модель: ЕГЭ-2023, основная волна

Итого, имеем $\begin{cases} S = 5d_1 + 5d_2, \\ (10S - 35d_1 - 10d_2)q - X = 9S - 35d_1 - 10d_2. \end{cases}$

Платёж в 2035 году будет $x_{10} = d_2q$. Найдём d_2 из системы уравнений.

$5d_1 = S - 5d_2$, $(10S - 7S + 35d_2 - 10d_2)q - X = 9S - 7S + 35d_2 - 10d_2$, $(3S + 25d_2)q - X = 2S + 25d_2$, $25d_2(q - 1) = 2S + X - 3Sq$,

$d_2 = \dfrac{2S + X - 3Sq}{25(q - 1)}$.

Подставим числовые данные.

$d_2 = \dfrac{1500 + 1350 - 3 \cdot 750 \cdot 1{,}2}{25 \cdot 0{,}2} = \dfrac{2850 - 2700}{5} = 30$ тыс. рублей.

$x_{10} = d_2q = 30 \cdot 1{,}2 = 36$ тыс. рублей.

Ответ: 36 тыс. рублей.

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

$\boxed{16}$ Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое с первым заводом время производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Решение:

Пусть суммарное рабочее время за неделю на первом заводе равно x^2, а на втором заводе — y^2 часов.

Тогда, согласно условию задачи, на заводах произведут соответственно $2x$ и $5y$ единиц продукции, а суммарное количество будет $K = 2x + 5y$ (единиц продукции).

За эту работу надо выплатить рабочим сумму $(x^2 + y^2) \cdot 500$ рублей. Так как нужно выплатить $1\,450\,000$ рублей, то получаем уравнение: $(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1\,450\,000$.

Отсюда $x^2 + y^2 = 2900$, $y^2 = 2900 - x^2$.

Таким образом, $K = K(x) = 2x + 5y = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}$.

Модель: досрочный ЕГЭ–2024

Найдём наибольшее значение $K(x)$ с помощью производной.

$$K'(x) = 2 - \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2900 - x^2}}.$$

$$K'(x) = 0, \text{ если } 2 - \frac{5x}{\sqrt{2900 - x^2}} = 0; \;\; 2\sqrt{2900 - x^2} = 5x;$$

$$4(2900 - x^2) = 25x^2; \;\; 4 \cdot 2900 = 29x^2; \;\; x^2 = 400; \;\; x = 20.$$

Заметим, что $K'(x) > 0$ при $x < 20$ и $K'(x) < 0$ при $x > 20$, поэтому в точке $x = 20$ будет наибольшее значение.

$$y = \sqrt{2900 - 20^2} = 50,$$

$$K(20) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290 \text{ (единиц продукции).}$$

Ответ: 290 единиц продукции.

$\boxed{16}$ 15 мая был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10
Текущий долг	100%	80%	60%	40%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с мая, текущий долг увеличивается на 5%, а выплаты по погашению кредита должны происходить в первой половине каждого месяца, начиная с июня. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение:

Ежемесячная выплата складывается из выплаты части полученного кредита и выплаты процентов за обслуживание кредита, начисленных банком на оставшуюся сумму долга.

Общая сумма выплат больше суммы самого кредита на сумму выплаченных процентов за обслуживание кредита.

Посчитаем сумму выплаченных процентов.
В июне предприниматель выплатит $100\% \cdot 0{,}05$ от кредита,
в июле — $80\% \cdot 0{,}05$ от кредита,
в августе — $60\% \cdot 0{,}05$ от кредита,
в сентябре — $40\% \cdot 0{,}05$ от кредита,
в октябре — $20\% \cdot 0{,}05$ от кредита.

Всего предприниматель за обслуживание кредита выплатит

$0{,}05 \cdot 100\% + 0{,}05 \cdot 80\% + \ldots + 0{,}05 \cdot 20\% = 0{,}05(100\% + 80\% + 60\% + 40\% +$
$+ 20\%) = 0{,}05 \cdot 300\% = 15\%.$

Ответ: 15.

$\boxed{16}$ В июле 2017 года был взят кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн рублей.

Решение:

Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, x_3 — выплаты с февраля по июнь каждого года. Начисление 25% соответствует умножению на коэффициент $1 + \dfrac{25}{100} = 1{,}25$. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

$$\begin{aligned}
2018\text{ г.}: &\quad 1{,}25S - x_1 = 0{,}7S,\\
2019\text{ г.}: &\quad 1{,}25 \cdot 0{,}7S - x_2 = 0{,}4S,\\
2020\text{ г.}: &\quad 1{,}25 \cdot 0{,}4S - x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Модель: ЕГЭ–2016, основная волна

Таким образом, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют

$$x_1 = 0{,}55S;\ x_2 = 0{,}475S;\ x_3 = 0{,}5S.$$

Наименьшая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$0{,}475S > 3,\ S > 3 \cdot \frac{1000}{475},\ S > 3 \cdot \frac{40}{19},\ S > 6\frac{6}{19}.$$

Наименьшим целым числом, удовлетворяющим последнему неравенству, является $S = 7$.

Ответ: 7.

Модель: ЕГЭ–2017, основная волна

$\boxed{16}$ В июле 2020 года был взят кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что если ежегодно выплачивать по 50 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 82 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года.

Найдите число r.

Модель: ЕГЭ–2017, основная волна

Решение:

Пусть сумма кредита равна S рублей, ежегодная выплата равна x рублей, $q = 1 + \frac{r}{100}$ — процентный коэффициент. По условию долг на июль меняется следующим образом:

июль 2021: $S_1 = qS - x$,

июль 2022: $S_2 = qS_1 - x = q^2S - (q+1)x$,

июль 2023: $S_3 = qS_2 - x = q^3S - (q^2 + q + 1)x$

июль 2024: $S_4 = qS_3 - x = q^4S - (q^3 + q^2 + q + 1)x = q^4S - \dfrac{(q^4 - 1)x}{q - 1}$.

Модель: ЕГЭ–2017, основная волна

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2, то $S_2 = 0$. Тогда

$$q^2 S - (q+1)x_2 = 0, \quad S = \frac{(q+1)x_2}{q^2}.$$

Если долг выплачен четырьмя равными платежами x_4, то $S_4 = 0$. Тогда

$$q^4 S - \frac{(q^4-1)x_4}{q-1} = 0, \quad S = \frac{(q^4-1)x_4}{q^4(q-1)}.$$

Исключив из уравнений сумму кредита S, получим

$$\frac{(q+1)x_2}{q^2} = \frac{(q^4-1)x_4}{q^4(q-1)}, \quad q^2 = \frac{x_4}{x_2 - x_4}.$$

По условию $x_4 = 50\,000$, $x_2 = 82\,000$. Значит

$$q^2 = \frac{50\,000}{82\,000 - 50\,000} = \frac{25}{16}, \quad q = \frac{5}{4} = 1{,}25, \quad r = 25\%.$$

Ответ: 25.

$\boxed{16}$ В мае 2024 года Роман Матвеевич планирует взять кредит на развитие бизнеса на три года в размере 1 600 000 рублей. Условия его возврата такие:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по апрель каждого года нужно выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2025 и 2026 годах должны быть равными;
— к маю 2027 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2 637,5 тыс. рублей. Сколько тыс. рублей составит платеж Романа Матвеевича в 2026 году?

Решение:

Пусть платежи в 2025 и 2026 годах составят по x тыс. рублей.

В январе 2025 года долг будет равен $1600 \cdot 1{,}25 = 2000$ тыс. рублей, а в мае $2000 - x$ тыс. рублей.

В январе 2026 года долг будет равен $(2000 - x) \cdot 1{,}25 = 2500 - 1{,}25x$ тыс. рублей, а в мае $2500 - 2{,}25x$ тыс. рублей.

В январе 2027 года долг будет равен $(2500 - 2{,}25x) \cdot 1{,}25 = 3125 - 2{,}8125x$ тыс. рублей.

По условию, к маю 2027 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платеж в 2027 году должен быть равен $(3125 - 2{,}8125x)$ тыс. рублей.

Тогда сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна

$3125 - 2{,}8125x + 2x = 3125 - 0{,}8125x$ тыс. рублей.

$3125 - 0{,}8125x = 2\,637{,}5, \quad 0{,}8125x = 487{,}5, \quad x = 600.$

Платеж Романа Матвеевича в 2026 году составит 600 тыс. рублей.

Ответ: 600 тыс. рублей.

$\boxed{16}$ В июле 2020 года планируется взять кредит в размере 6,3 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2021, 2022 и 2023 годов долг остаётся равным 6,3 млн рублей;
— суммы выплат в 2024 и 2025 годах равны.
Найдите r, если долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 9,15 млн рублей.

Модель: ЕГЭ–2020, основная волна

Решение:

Составим математическую модель по условию задачи. Пусть S — сумма, взятая в кредит ($S = 6{,}3$ млн рублей); $q = 1 + \dfrac{r}{100}$ — процентный коэффициент; $x_1, x_2, \ldots, x_5$ — ежегодные выплаты по кредиту; $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_5$ — сумма всех выплат ($X = 9{,}15$ млн рублей).

Тогда получим следующую схему погашения кредита:

$$
\begin{gathered}
Sq - x_1 = S,\\
Sq - x_2 = S,\\
Sq - x_3 = S,\\
Sq - x_4 = S_4,\\
S_4 q - x_5 = 0.
\end{gathered}
$$

Модель: ЕГЭ–2020, основная волна

Заметим, что $x_1 = x_2 = x_3 = x$, причём $x = S(q-1)$.
По условию задачи $x_4 = x_5 = y$, тогда $X = 3x + 2y$, $y = \dfrac{X - 3S(q-1)}{2}$.

Выплата y удовлетворяет следующему уравнению:

$$(Sq - y)q - y = 0.$$

Следовательно, процентный коэффициент q может быть найден из уравнения

$$Sq^2 - \frac{X - 3S(q-1)}{2}(q+1) = 0.$$

Подставим числовые значения S и X. Получим:

$6{,}3q^2 - \dfrac{9{,}15 + 18{,}9 - 18{,}9q}{2}(q+1) = 0;\quad 210q^2 - 61q - 187 = 0;$

$q = 1{,}1; -\dfrac{17}{21}.$

По смыслу задачи $q > 1$. Значит, $q = 1{,}1$; $r = 10\%$.

Ответ: 10.

$\boxed{16}$ 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на (n+1) месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 70 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
— к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 214 500 рублей.

Решение:

По условию долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1000;\ \ 930;\ \ 860;\ \ \ldots;\ \ 370;\ \ 300;\ \ 0.$$

Значит,

$$n = \frac{1000 - 300}{70} = 10.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $q = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1000q;\ \ 930q;\ \ \ldots;\ \ 370q;\ \ 300q.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$1000(q-1)+70;\;\; 930(q-1)+70;\;\; \ldots;\;\; 370(q-1)+70;\;\; 300q.$$

Всего следует выплатить

$(q-1)\cdot\dfrac{10\cdot 1370}{2}+700+300q = 7150q-6150$ (тыс. рублей),

откуда $7150q-6150 = 1214{,}5$; $7150q = 7364{,}5$; $q = 1{,}03$; $r = 3$.

Ответ: 3.

$\boxed{16}$ У Леонида Игоревича есть 60 миллионов рублей. Он планирует часть этих денег вложить в некоторый проект на год, а остаток суммы положить на счёт в банке. Согласно условиям вклада, через год банк увеличит вложенную сумму на 21%. Если вложить в проект $\dfrac{2m^2}{33}$ рублей, к моменту окончания срока проекта Леонид Игоревич получит m рублей. Какую наибольшую сумму (в млн рублей) может получить Леонид Игоревич суммарно через год?

Решение:

Пусть Леонид Игоревич вложит в проект $\frac{2x^2}{33}$ миллионов рублей, тогда к моменту окончания срока проекта он получит x рублей. На счёт в банке он положит $\left(60 - \frac{2x^2}{33}\right)$ миллионов рублей, тогда через год на банковском вкладе будет сумма $\left(60-\frac{2x^2}{33}\right)\cdot 1{,}21$ миллионов рублей. Суммарно через год Леонид Игоревич получит $x + \left(60 - \frac{2x^2}{33}\right) \cdot 1{,}21$ миллионов рублей.

Модель: резерв досрочного ЕГЭ–2022

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \left(60 - \dfrac{2x^2}{33}\right) \cdot 1{,}21$, где $x \in [0; 60]$.

$f(x) = -\dfrac{11x^2}{150} + x + 72{,}6$. Эта квадратичная функция принимает

наибольшее значение в точке $x = \dfrac{75}{11}$, $x \in [0; 60]$.

$$f\left(\frac{75}{11}\right) = -\frac{11 \cdot \left(\frac{75}{11}\right)^2}{150} + \frac{75}{11} + 72{,}6 = 76\frac{1}{110}.$$

Ответ: $76\dfrac{1}{110}$.

$\boxed{16}$ Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение:

Прибыль:

$$f(x) = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 6,$$

Вершина параболы:

$$x_0 = p - 2,\ \ y_0 = \frac{1}{2}\Big((p - 2)^2 - 12\Big),$$

Условие окупаемости:

$$3y_0 \geqslant 78,\ \ p = 10.$$

Ответ: 10.

Перспективная модель: вклады

$\boxed{16}$ Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой 8%, второй — 10%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка. Через два года второй банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 10 до P процентов. Ещё через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства. Оказалось, что второй банк принёс ему больший доход, чем первый. Найдите наименьшее целое P, при котором это возможно.

Решение:

Пусть в каждом банке клиент открыл вклад в размере X рублей. Тогда через 3 года на счёте в первом банке будет

$$(1{,}08)^3\mathrm{X},$$

а на счёте во втором банке будет

$$(1{,}1)^2 \cdot (1 + \mathrm{P}/100)\mathrm{X}.$$

Перспективная модель: вклады

По условию второй вклад принёс больший доход, это значит, что в момент закрытия на втором счёте было больше средств:

$$(1{,}08)^3 X < (1{,}1)^2 \cdot (1 + P/100) X,$$

$$(1{,}08)^3 < (1{,}1)^2 \cdot (1 + P/100),$$

$$\frac{(1{,}08)^3}{(1{,}1)^2} < 1 + P/100,$$

$$1{,}041\ldots < 1 + P/100,$$

$$4{,}1\ldots < P.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому равенству: $P = 5$.

Ответ: 5.

Книга для подготовки

Спасибо за внимание!