Задачи с параметрами

Линейные уравнения

Дихтярь М.Б.

Содержание

Общие сведения

Если в уравнение некоторые коэффициенты или свободные члены заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются *параметрами*, а *уравнение* называется уравнением с *параметром*. Уравнение с параметром является семейством уравнений, рассматриваемых при фиксированном значении параметра.

Решить уравнение с параметром означает, что надо решить множество уравнений, которые получаются из рассматриваемого уравнения, если придавать параметру конкретные числовые значения.

Уравнение с параметром должно быть рассмотрено при всех значениях параметра.

Для того чтобы решить уравнение с параметром надо:

1) определить, при каких значениях параметра существуют решения, то есть найти *область допустимых значений параметра*;

2) для каждого значения параметра найти все решения уравнения;

3) указать, при каких значениях параметра уравнение не имеет решений.

<u>Задачами с параметрами являются</u>, например, *<u>следующие задачи</u>*:

1) найти решения уравнения в зависимости от значений параметра;

2) определить, число решений уравнения в зависимости от значений параметра;

3) найти значения параметра, при которых решения положительные (отрицательные, принадлежат некоторому промежутку);

4) определить, при каких значениях параметра уравнение имеет единственное решение;

5) определить, при каких значениях параметра уравнения равносильны.

Линейные уравнения

Уравнение $f(a)\cdot x = g(a)$ называется *линейным уравнением с параметром а.*

Для того чтобы найти решения линейного уравнения с параметром надо рассмотреть три случая.

Коэффициент при *x* в уравнении равен нулю.

1) Если $f(a)=0,\ g(a)\neq 0$, то уравнение, так как оно принимает вид $0\cdot x = g(a)$, где $g(a)\neq 0$, не имеет решений (то есть $x\in\varnothing$),

2) если $f(a)=0,\ g(a)=0$, то уравнение, так как оно принимает вид $0\cdot x=0$, имеет бесконечное множество решений (то есть $x\in R$);

Коэффициент при *x* в уравнении не равен нулю.

3) если $f(a)\neq 0$, то $x = g(a)/f(a)$ единственное решение уравнения.

Примеры

Решите уравнения

1. $(a^2-4)x = 2a-4$; (1) **2.** $ax+2=\dfrac{2}{a-1}x+a$ (2)

Решение. **1.** $(a^2-4)x=2a-4$ (1)

Коэффициент при *x* в уравнении равен нулю

1. Если $a^2-4=0$ и $a\neq-2$, $a=2$, то уравнение (1) принимает вид $0\cdot x=0$. Уравнение (1), если $a=2$ имеет бесконечное множество решений, то есть $x\in R$.

2. Если $a^2-4=0$ и $a\neq 2$, $a=-2$, то уравнение (1) принимает вид $0\cdot x=-8$. Уравнение (1), если $a=-2$ не имеет решений, то есть $x\in\varnothing$.

Коэффициент при x в уравнении не равен нулю

3. Если $a^2-4\neq0$, то есть $a\neq-2$ и $a\neq 2$, то уравнение (1) имеет единственное решение $x=2/(a+2)$.

2. $ax+2=\dfrac{2}{a-1}x+a.$ (2).

Так как ОДЗ параметра множество $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, то при $a=1$ уравнение (2) не имеет решений.

Замечание. Некоторые авторы считают: уравнение не имеет смысла при тех значениях параметра, которые не принадлежит ОДЗ параметра.

Преобразуем уравнение (2), если $a\neq1$

$$ax+2=\frac{2}{a-1}x+a\Leftrightarrow\frac{(a+1)(a-2)}{a-1}x=a-2\Leftrightarrow.$$

$$\overset{a\neq1}{\Leftrightarrow}(a+1)(a-2)x=\left(a-2\right)\left(a-1\right).\quad\left(2.1\right)$$

Коэффициент при x в уравнении (2.1) равен нулю.

1. Пусть $(a+1)(a-2)=0$.

Если $a=-1$, то уравнение (2.1), а значит и уравнение (2), не имеет решений, так как уравнение (2.1) принимает вид $0\cdot x=-3$.

Если $a=2$, то уравнение (2.1), а значит и уравнение (2), имеет бесконечное множество решений, так как уравнение (2.1) принимает вид $0\cdot x=0$.

2. Пусть $(a+1)(a-2)\neq0$.

Если $a\notin\{-1;1;2\}$, то уравнение (2) равносильно уравнению $(a+1)x=(a-1)$, решение которого $x=(a-1)/(a+1)$. В этом случае уравнение (2) имеет единственное решение $x=(a-1)/(a+1)$.

Ответы.

1. $x=2/(a+2)$, *если* $a\notin\left\{-2;\,2\right\}$; $x\in\varnothing$, *если* $a=-2$; $x\in R$, *если* $a=2$.

2. $x=(a-1)/(a+1)$, *если* $a\notin\{-1;1;2\}$; $x\in\varnothing$, *если* $a\in\{-1;1\}$; $x\in R$, *если* $a=2$.

Уравнение $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0$, где $c\neq 0$, можно решать одним из двух способов.

1) Уравнение можно заменить системой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0, \\ cx+d\neq 0. \end{cases}$$

и решить эту систему.

2) Сначала надо решить уравнение $ax+b=0$, а затем отбросить из найденных корней, те которые обращают знаменатель в ноль, то есть являются корнями уравнения $cx+d=0$.

Примеры

Решите уравнения

3. $\dfrac{x-5}{x-a}=0$; (3) **4.** $\dfrac{x-a}{x^2-5x+4}=0$; (4)

5. $\dfrac{(a+1)x-2}{x-a}=0$; (5) **6.** $\dfrac{a}{x-2a}=\dfrac{3-a}{x+a}$; (6)

7. $\dfrac{1}{(a^2-a)x+a}=1.$ (7)

Решения.

3. Имеем $\dfrac{x-5}{x-a}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ a\neq 5. \end{cases}$

Уравнение (3) имеет единственное решение $x=5$, если $a\neq 5$. Если $a=5$, то уравнение (3) решений не имеет.

4. Имеем $\dfrac{x-a}{x^2-5x+4}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-a}{(x-1)(x-4)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a, \\ x\neq 1, \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a, \\ a\neq 1, \\ a\neq 4. \end{cases}$

Из последней системы следует:

Уравнение (4) имеет единственное решение $x=a$, если $a\neq 1$ и $a\neq 4$; уравнение (4) не имеет решений, если $a=1$ или $a=4$.

5. $\dfrac{(a+1)x-2}{x-a}=0.$

1. Сначала решим уравнение $(a+1)x-2=0 \Leftrightarrow (a+1)x=2.$ (5.1)

а) Коэффициент при x в уравнении (5.1) равен нулю

Если $\underline{a=-1}$, то уравнение (5.1) не имеет решений (так как оно принимает вид $0\cdot x=2$). Тогда и <u>уравнение (5)</u> <u>не имеет решений,</u> если $\underline{a=-1}$.

б) Если $a\neq -1$, то $(a+1)x=2\Leftrightarrow x=2(a+1)^{-1}$.

2. Найдём значения $a\neq -1$, которые обращают в ноль знаменатель уравнения (5), если $x=2/(a+1)$. Имеем

$$x-a=0\Rightarrow \frac{2}{a+1}-a=0\Leftrightarrow \frac{a^2+a-2}{a+1}=0\Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+2)}{a+1}=0.$$

Из последнего уравнения следует, что $x=2/(a+1)$ обращает в ноль знаменатель, если $a\in\{-2;1\}$. Это означает, что $x=2/(a+1)$ не является решением уравнения (5), если $a\in\{-2;1\}$.

Итак, если $\underline{a\notin\{-2;-1;1\}}$, то <u>уравнение (5)</u> имеет <u>единственное решение</u> $\underline{x=2/(a+1)}$; если $\underline{a\in\{-2;-1;1\}}$, то <u>уравнение (5)</u> <u>не имеет решений</u>.

6. Имеем

$$\frac{a}{x-2a}=\frac{3-a}{x+a}\Leftrightarrow\begin{cases}ax+a^2=3x-ax-6a+2a^2,\\ x\neq 2a,\\ x\neq -a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2a-3)x=a^2-6a,\\ x\neq 2a,\\ x\neq -a.\end{cases}\qquad(6.1)$$

Рассмотрим уравнение $(2a-3)x=a^2-6a$ (6.2) системы (6.1).

1. Пусть коэффициент при x в уравнении (6.2) равен нулю, то есть $2a-3=0\Leftrightarrow a=1{,}5$. Если $a=1{,}5$, то уравнение (6.2) принимает вид $0\cdot x=-27/4$. Тогда уравнение (6.2), а значит и <u>уравнение (6), не имеет решений,</u> если $\underline{a=1{,}5}$.

2. Если $a\neq 1{,}5$, то система (6.1), значит и уравнение (6), равносильно системе

$$\begin{cases}x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3},\\ x\neq 2a,\\ x\neq -a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3},\\ \dfrac{a^2-6a}{2a-3}\neq 2a,\\ \dfrac{a^2-6a}{2a-3}\neq -a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3},\\ \dfrac{3a^2}{2a-3}\neq 0,\\ \dfrac{3a^2-9a}{2a-3}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3},\\ a\neq 0,\\ a\neq 3.\end{cases}$$

Из последней системы и из 1. следует, что <u>уравнение (6)</u>

а) <u>не имеет решений, если</u> $\underline{a\in\{0;\ 1{,}5;\ 3\}}$;

б) <u>имеет единственное решение</u> $\underline{x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3}}$<u>, если</u> $\underline{a\notin\{0;1{,}5;3\}}$.

7. Так как $(a^2-a)x+a\neq 0 \Leftrightarrow a\left[(a-1)x+1\right]\neq 0 \Rightarrow a\neq 0,$ то уравнение (7) не имеет решений, если $a=0$.(так как $a=0$ не принадлежит ОДЗ параметра уравнения (7)).

Если $a\neq 0,$ то

$$\frac{1}{(a^2-a)x+a}=1\overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow}(a^2-a)x+a=1\Leftrightarrow a(a-1)x=1-a. \quad (7.1)$$

Из уравнения $a(a-1)x=1-a$ следует, что

а) уравнение (7) имеет бесконечное множество решений, если $a=1$ (так как уравнение (7.1) принимает вид $0\cdot x=0$).

б) уравнение (7), если $a\notin\{-1;0\}$ имеет единственное решение $x=-a^{-1}$, так как $a(a-1)x=1-a\Rightarrow x=-a^{-1}$.

Ответы.

3. $x=5$, *если* $a\in(-\infty;5)\cup(5;\infty)$; $x\in\varnothing$, *если* $a=5$·

4. $x=a$, *если* $a\in(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$; $x\in\varnothing$, *если* $a=1$ *или* $a=4$.

5. $x=2(a+1)^{-1}$, *если* $a\notin\{-2;-1;1\}$; $x\in\varnothing$, *если* $a\in\{-2;-1;1\}$.

6. $x=\dfrac{a^2-6a}{2a-3}$, *если* $a\notin\{0;1{,}5;3\}$; $x\in\varnothing$, *если* $a\in\{0;1{,}5;3\}$.

7. $x=-a^{-1}$, *если* $a\notin\{0;1\}$; $x\in\varnothing$, *если* $a=0$; $x\in R$, *если* $a=1$.

Основные задачи с параметрами

8. Решите уравнение $\dfrac{ax-2}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x^2+4)}{x^2-4}$. (8)

Решение. Уравнение (8) равносильно уравнению

$$\frac{ax^2+(2a+b-2)x-2b-4}{x^2-4}=\frac{a(x^2+4)}{x^2-4}\Leftrightarrow\begin{cases}(2a+b-2)x=2(2a+b+2),\\ x\neq 2,\\ x\neq -2.\end{cases} \quad (8.1)$$

1. Пусть коэффициент при x в уравнении системы (8.1) равен нулю, то есть $2a+b-2=0\Leftrightarrow b=2-2a$, то уравнение (8) не имеет решений, так как уравнение $(2a+b-2)x=2(2a+b+2)$ принимает вид $0\cdot x=8$.

2. Если $2a+b-2\neq 0$, то система (8.1), значит и уравнение (8), равносильна системе

$$\begin{cases} x=\dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}, \\ \dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}\neq 2, \\ \dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}, \\ \dfrac{8}{2a+b-2}\neq 0, \\ \dfrac{8a+4b}{2a+b-2}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}, \\ b\neq 10-2a, \\ b\neq -2a \end{cases} \qquad (8.2)$$

Из системы (8.2) и 1. следует, что уравнение (8)

а) не имеет решений, если $b=-2a$, $b=10-2a$, $b=2-2a$;

б) имеет единственное решение $x=\dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}$, если $b\neq -2a$, $b\neq 10-2a$, $b\neq 2-2a$

Ответ. *Если* $b=10-2a$, $b=-2a$, $b=2-2a$, *то* $\varnothing$;

если $b=10-2a$, $b\neq -2a$, $b\neq 2-2a$, *то* $x=\dfrac{4a+2b+4}{2a+b-2}$.

9. Решите уравнение $\dfrac{((a-1)x+2)\cdot(x-3)}{(a-1)x+2}=\dfrac{1}{a}$. (9)

Решение. Так как $a=0$ не принадлежит ОДЗ параметра уравнения (9), то уравнение (9) не имеет решений, если $a=0$.

Если $a\neq 0$, то уравнение (9) равносильно системе

$$\begin{cases} x-3=a^{-1}, \\ (a-1)x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+a^{-1}, \\ (3+a^{-1})\cdot(a-1)\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+a^{-1}, \\ 3a-a^{-1}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+a^{-1}, \\ a^2\neq 1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+a^{-1}, \\ a\neq \sqrt{3}/3,\ a\neq -\sqrt{3}/3. \end{cases}$$

Из последней системы (при условии, что $a\neq 0$) следует, что уравнение (9)

а) не имеет решений, если $a\in\{-\sqrt{3}/3;\ 0;\ \sqrt{3}/3\}$;

б) имеет единственное решение $x=3+a^{-1}$, если $a\notin\left\{-\sqrt{3}/3; 0; \sqrt{3}/3\right\}$.

Отв. $x=3+a^{-1}$, *если* $a\notin\{-\sqrt{3}/3;0;3\sqrt{3}\}$;

$x\in\varnothing$, *если* $a\in\{-\sqrt{3}/3;0;3\sqrt{3}\}$.

10. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $\dfrac{2a-21}{x-a^2}=\dfrac{6+a}{2x+a}$ (10) имеет решение, равное 3.

Решение. Подставим $x=3$ в уравнение (10) и получим

$$\frac{2a-21}{3-a^2}=\frac{6+a}{6+a}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2a-21}{3-a^2}=1,\\ a^2\neq 3,\ a\neq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2a-24=0,\\ a^2\neq 3,\\ a\neq -6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-6,\\ a=4,\end{array}\right.\\ a^2\neq 3,\ a\neq -6\end{cases}\Leftrightarrow a=4.$$

Ответ. а=4.

11. При каких значениях параметра *a* не имеет решений уравнение $\dfrac{ax-8}{a-2x}=4\quad(11)$?

Решение. Уравнение (11) равносильно системе

$$\begin{cases}ax-8=4(a-2x),\\ a\neq 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(a+8)=4(a+2),\\ x\neq 0,5a.\end{cases}\qquad(11.1)$$

1. Пусть коэффициент при *x* в уравнении системы (11.1) равен нулю, то есть $a=-8$. Уравнение (11) при $a=-8$ не имеет решений, так как уравнение системы (11.1) принимает вид $0\cdot x=-24$.

2. Если $a\neq -8$, то

$$\begin{cases}x(a+8)=4(a+2),\\ x\neq 0,5a;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4(a+8)^{-1}(a+2),\\ 4(a+8)^{-1}(a+2)\neq 0,5a;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4(a+8)^{-1}(a+2),\\ a^2\neq 16.\end{cases}$$

Из последней системы следует, что уравнение (11) не имеет решений, если $a=-4$ или $a=4$.

Ответ. $a\in\{-8;-4;4\}$.

12. Найдите все значения параметра *a,* при которых имеет бесконечное множество решений уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{x(a+4)}{a+6}=\frac{a^2+3a}{a+6}\qquad(12).$$

Решение. Так как $a=-6,\ a=0$ не принадлежат ОДЗ параметра, то при $a\in\{-6;0\}$ уравнение (12) не имеет решений.

Если $a\notin\{-6;0\}$, то уравнение (12) равносильно уравнению

$$\bar{x}(a+2)(a+3)=a^2(a+3)\qquad(12.1).$$

Уравнение *может* иметь бесконечное множество решений, если хотя бы один коэффициент при *x* равен нулю.

Приравняем нулю коэффициенты при *x* в уравнении (12.1):

если $a=-3$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=0$. Это означает, что уравнение (12.1), а значит и уравнение (12), при $\underline{a=-3}$ имеет бесконечное множество решений;

если $a=-2$,, то уравнение принимает вид $0\cdot x=4$. Это означает, что уравнение (12.1), а значит и уравнение (12), при $a=-3$ не имеет решений.

Ответ. $a=-3$.

13. Найдите наибольшее целое отрицательное значение параметра b, при котором имеет только положительное решение уравнения $\frac{2}{2x-b}+\frac{1}{bx-2}=0 \quad (13)$.

Решение. Уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases} 2(bx-2)+(2x-b)=0, \\ 2x-b\neq 0, \\ bx-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(b+1)x=b+4, \\ 2x-b\neq 0, \\ bx-2\neq 0 \end{cases} \quad (13.1)$$

1. Пусть коэффициент при x в уравнении системы (13.1) равен нулю, то есть $b=-1$. Уравнение системы (13.1) не имеет решение, если $b=-1$, так как уравнение принимает вид $0\cdot x=3$. Тогда и уравнение (13) не имеет решений, если $b=-1$.

2. Если $b\neq -1$, то уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases} x=\frac{b+4}{2(b+1)}, \\ 2x-b\neq 0, \\ bx-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b+4}{2(b+1)}, \\ \frac{b+4}{b+1}-b\neq 0, \\ b\frac{b+4}{2(b+1)}-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b+4}{2(b+1)}, \\ b^2-4\neq 0, \\ b^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b+4}{2(b+1)}, \\ b\neq -2, \\ b\neq 2. \end{cases}$$

Из последней системы (так как $b\neq -1$) следует, если $b\notin\{-2;-1;2\}$, то единственное решение уравнения (13) – это $x=(b+4)/2(b+1)$.

Решение будет положительным, если $x>0 \Leftrightarrow \frac{b+4}{2(b+1)}>0 \quad (13.2)$.

Так как $b\notin\{-2;-1;2\}$, то $b\in(-\infty;-4)\cup(-1;2)\cup(2;\infty)$ являются решениями неравенства (13.2).

<u>Наибольшее целое отрицательное значение $b=-5$.</u>

Ответ. $b=-5$.

14. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a(4x-a)}{a-3}=\frac{12x-9}{a-3}$ (14) имеет только положительные решения.

Решение. Имеем

$$\frac{a(4x-a)}{a-3}=\frac{12x-9}{a-3}\Leftrightarrow\begin{cases}4x(a-3)=(a-3)(a+3),\\ a\neq 3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,25\left(a+3\right),\\ a\neq 3.\end{cases}$$

Отметим. Уравнение может иметь только положительные решения, если коэффициент при x в уравнении не равен нулю.

Если $a\neq 3$, то $x=0,25(a+3)$ единственное решение уравнения (14). Это решение положительное, если

$$\begin{cases}x>0,\\ a\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,25(a+3)>0,\\ a\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-3,\\ a\neq 3.\end{cases}$$

Итак, уравнение имеет (14) положительные решения, если $a+3>0$ и $a\neq 3.$

Ответ. $a\in(-3;3)\cup(3;\infty)$.

15. Найдите все значения параметра *a*, при которых решения уравнения $4x(x+4)^{-1}=a+3$ (15) принадлежит отрезку [–10; 6].

Решение. Имеем $\dfrac{4x}{x+4}=a+3\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-a)=4(a+3),\\ x\neq -4.\end{cases}$ (15.1)

Отметим. Решения уравнение могут принадлежать отрезку, если коэффициент при x в уравнении не равен нулю.

2. Если $a\neq 1$, то уравнение (15) равносильно системе

$$\begin{cases}x=4(a+3)(1-a)^{-1},\\ x\neq -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4(a+3)(1-a)^{-1},\\ 4(a+3)(1-a)^{-1}\neq -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4(a+3)(1-a)^{-1},\\ 3\neq -1.\end{cases}$$

Из последней системы следует, если $a\neq 1$, то $x=\dfrac{4(a+3)}{1-a}$ есть единственное решение уравнения (15), которое принадлежит отрезку [–10; 6], если

$$-10\leq\frac{4(a+3)}{1-a}\leq 6\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3a-11}{1-a}\leq 0,\\ \dfrac{5a+3}{1-a}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\geq 11/3,\\ a\leq -0,6.\end{array}\right.$$

Из последней совокупности следует ответ.

Ответ. $a\in(-\infty;-0,6]\cup[11/3;\infty)$.

16. Найдите все значения параметра *a*, при которых решение уравнения $4x=3a+1$ (16) является целым числом.

Решение. Решение уравнения (16) – это $x=0,25(3a+1)$, где $a\in R$. Число $\dfrac{3a+1}{4}$ является целым, если $3a+1$ кратно 4, то есть, если существует такое число $n \in Z$, что $3a+1=4n \Leftrightarrow a=(4n-1)/3$.. Откуда получаем, что условию задачи удовлетворяют $\underline{a=(4n-1)/3}$, где $n \in Z$.

Ответ. $a=(4n-1)/3$, *где* $n \in Z$.

17. Найдите все натуральные значения параметра *a*, при которых решение уравнения $(5-a)x=3a-1 \; (17)$ является целым числом.

Решение. Если $a=5$, то уравнение (17) не имеет решений, так как оно принимает вид $0 \cdot x = 14$.

Если $a \neq 5$, то $x=\dfrac{3a-1}{5-a}$ является единственным решением уравнения (17). Так как $\dfrac{3a-1}{5-a}=-3+\dfrac{14}{5-a}$, то число $x=\dfrac{3a-1}{5-a}$ целое число, если число $\dfrac{14}{5-a}$ целое. Так как *a* натуральное число, то число $\dfrac{14}{5-a}$ *может быть* целым при условии, что $5-a=k$, где k равно хотя бы одному из чисел: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$ (делители числа 14). Так как *a* натуральное число, то из равенств $a=5 \pm 1$, $a=5 \pm 2$, $a=5+7$, $a=5+14$, находим, что условию задачи удовлетворяют $a \in \{3;4;6;7;12;19\}$.

Ответ. $a \in \{3;4;6;7;12;19\}$.

18. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

а) $(x+2a)\arcsin a = 0$ на отрезке [–4;1]; б) $(ax-3)\lg a = 0$

имеет единственное решение.

Решение.

а) Если $|a|>1$, то уравнение $(x+2a)\arcsin a = 0$ не имеет решений, так как ОДЗ параметра $|a| \le 1$.то.

Если $a=0$, то решением уравнения является любое $x \in R$, (так как уравнение принимает вид $(x+2 \cdot 0)\arcsin 0 = 0 \Leftrightarrow x \cdot 0 = 0$).

Исходное уравнение *может иметь* единственное решение, если $a \in [-1;0) \cup (0;1]$. Если $a \in [-1;0) \cup (0;1]$, то

$$(x+2a)\arcsin a = 0 \Leftrightarrow x+2a=0 \Leftrightarrow x=-2a.$$

Если $a \in [-1;0) \cup (0;1]$, то исходное уравнение имеет единственное решение $x=-2a$, которое принадлежит отрезку [–4;1], если

$$\begin{cases} |a| \le 1, \\ a \ne 0, \\ -4 \le -2a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \le 1, \\ a \ne 0, \\ -0,5 \le a \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0, \\ -0,5 \le a \le 1. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что исходное уравнение на отрезке $[-4;1]$ имеет единственное решение, если $a \in [-0,5;0) \cup (0;1]$.

б) Так как $a \le 0$ не принадлежат ОДЗ параметра, то исходное уравнение не имеет решений, если $a \le 0$.

Если $a > 0$, то $(ax-3)\lg a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg a = 0, \\ ax = 3. \end{array}\right.$

Если $a = 1$, то решение уравнения любое $x \in R$ (так как исходное уравнение принимает вид $(x-3)\cdot \lg 1 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot 0 = 0.$)

Если $a \in (0;1] \cup [1;\infty)$, то из второго уравнения совокупности следует, что $x = 3a^{-1}$ является решением исходного уравнения, но при $a = 1$ решением уравнения является любое $x \in R$. Поэтому исходное уравнение имеет единственное решение, если $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

Ответы. а) $a \in [-0,5;0) \cup (0;1]$; б) $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

19. При каких значениях параметра m равносильны уравнения

(19.1), $\dfrac{(m+3)x}{m+2} = m+3$ (19.2)?

Решение. **Отметим**. Уравнения $g(x,m) = 0$ и $f(x,m) = 0$ равносильны при тех значениях параметра m, при которых множество их решений совпадают.

Множество значений параметра уравнений – это множество $(-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$. Так как $m = -2$ не принадлежит области допустимых значений параметра, то при $m = -2$ исходные уравнения не имеют решений. Тогда, если $m = -2$, то уравнения равносильны, так как множества их решений совпадают (это множество $\varnothing$).

Рассмотрим исходные уравнения, если $m \ne -2$.

1. Если $m \ne -2$, то

$$\frac{2mx}{m+2} = m+3 \Leftrightarrow 2mx = (m+3)(m+2), \quad (19.3)$$

$$\frac{(m+3)x}{m+2} = m+3 \Leftrightarrow (m+3)x = (m+3)(m+2). \quad (19.4)$$

2. Пусть коэффициенты при x в хотя бы в одном уравнении равны нулю.

Если $m=0$, то уравнение (19.3) не имеет решений (уравнение принимает вид $0\cdot x=6$), а уравнение (19.4) имеет единственное решение $x=2$. Значит, при $m=0$ уравнения не равносильны.

Если $m=-3$, то уравнение (19.3) имеет единственное решение $x=0$, а уравнение (19.4) имеет бесконечное множество решений (уравнение принимает вид $0\cdot x=0$). Значит, при $m=-3$ уравнения не равносильны.

3. Пусть коэффициенты при x в уравнениях не равны нулю, то есть $m\neq 0$ и $m\neq -3$. Тогда $x=\frac{(m+3)(m+2)}{2m}$ единственное решение уравнения (19.3), а $x=m+2$ единственное решение уравнения (19.4).

Уравнения равносильны, если их решения совпадают.

Имеем уравнение $\frac{(m+3)(m+2)}{2m}=m+2$, где $m\notin\{-3;-2;0\}$. Решение последнего уравнения – это $m=3$.

Исходные уравнения равносильны, если $\underline{m=3.}$

Ответ. $m\in\{-2;3\}$.

20. При каких значениях параметра *m* равносильны уравнения

$$\frac{x}{m-2}=\sqrt{2m+1} \quad (20.1) \qquad \frac{x}{m-2}=\sqrt{m+7} \quad (20.2)?$$

Решение. Для уравнения (20.1) множество значений параметра есть множество $[-0{,}5;2)\cup(2;\infty)$, а для уравнения (20.2) множество значений параметра есть множество $[-7;2)\cup(2;\infty)$.

1. Если $\underline{m\in(-\infty;-7)\cup\{2\}}$, то уравнения равносильны, так как в этом случае они не имеют решений (так как $m\in(-\infty;-7)\cup\{2\}$ не принадлежат ОДЗ параметра обоих уравнений). Множеством решений каждого уравнения является множество $\varnothing$.

2. Если $m\in[-7;-0{,}5)$, то уравнение (20.1) не имеет решений, а уравнение (20.2) имеет решение – это $x=(m-2)\sqrt{m+7}$. В этом случае уравнения не равносильны.

3. Общее ОДЗ параметра обоих уравнений – это множество $[-0{,}5;2)\cup(2;\infty)$.

Если $m\in[-0{,}5;2)\cup(2;\infty)$, то имеем

$$\frac{x}{m-2}=\sqrt{2m+1}\overset{m\neq 2}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{2m+1}(m-2); \quad (20.3)$$

$$\frac{x}{m-2}=\sqrt{m+7}\overset{m\neq 2}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{m+7}(m-2). \quad (20.4)$$

Уравнения равносильны, если решение $x=(m-2)\sqrt{2m+1}$ уравнения (20.3) совпадает с решением $x=(m-2)\sqrt{m+7}$ уравнения (20.4).

Имеем уравнение $(m-2)\sqrt{2m+1}=(m-2)\sqrt{m+7}\overset{m\neq 2}{\Leftrightarrow} m=6.$

Так как $6\in[-0,5;\,2)\cup(2;\,\infty)$, то исходные уравнения равносильны, если $m=6$.

Ответ. $m\in\left(-\infty;\,-7\right)\left\{2;\,6\right\}$.

Уравнения, приводимые к линейным

21. Решите уравнение $(1+a^2)^{\sqrt{ax+3}}=(1+a^2)^{\sqrt{2+3x}}$ $\quad(21)$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Если $a=0$, то уравнение принимает вид $(1)^{\sqrt{3}}=(1)^{\sqrt{2+3x}}$ $\quad(21.1)$

. Решениями уравнения (21.1) являются все x, которые удовлетворяют неравенству $2+3x\geq 0$. Тогда промежуток $[-2/3;\infty)$ является множеством решений уравнения, если $a=0$.

2. Если $a\neq 0$, то уравнение (21) равносильно системе

$$\begin{cases} ax+3=2+3x, \\ x\geq -2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)x=-1, \\ x\geq -2/3. \end{cases} \qquad (21.2)$$

Пусть коэффициент при x в уравнении системы (21.2) равен нулю, то есть $a=3$. Тогда при $a=3$, то уравнение (21) не имеет решений, так как уравнение системы (21.2) принимает вид $0\cdot x=-1$.

Если $a\neq 3$ и $a\neq 0$, то

$$\begin{cases} (a-3)x=-1, \\ x\geq -2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/(a-3), \\ x\geq -2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/(a-3), \\ \dfrac{1}{a-3}\leq\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/(a-3), \\ \dfrac{9-2a}{a-3}\leq 0. \end{cases} \qquad (21.3)$$

Так как $a\neq 0$ и $a\neq 3$, то $a\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup[4{,}5;\infty)$ решения неравенства $\dfrac{9-2a}{a-3}\leq 0$. Итак, если $a\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup[4{,}5;\infty)$, то решением системы (21.3), а значит, и уравнения (21), является $x=(3-a)^{-1}$.

Ответ. $x\in\varnothing$, *если* $a\in[3;\,4{,}5)$; $x\in[-2/3;\infty)$, *если* $a=0$;
$x=(3-a)^{-1}$, *если* $a\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup[4{,}5;\infty)$.

22. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

а) $(a-x)\cdot\sqrt{x-1}=0$ $\quad$ (22.1);

б) $(ax-4)(x-3)=0$ $\quad$ (22.2) на отрезке $[-3;1]$

имеет единственное решение.

Решение.

а) ОДЗ уравнения $x \ge 1$.

Если $x \ge 1$, то $(a-x)\cdot\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=a. \end{array}\right. \quad (22.3)$

Из первого уравнения совокупности (22.3) следует, что $x=1$ решение уравнения при любом $a \in R$.

Так как $x \ge 1$, то $x=a$ является решением уравнения, если $a \ge 1$.

Если $a<1$, то $x=a$ не является решением исходного уравнения, так как ОДЗ уравнения $x \ge 1$.

Таким образом, если $a=1$, то решение $x=a$ совпадает с решением $x=1$. Уравнение имеет единственное решение $x=1$, если $a \le 1$.

б) Имеем

$$\begin{cases} (ax-4)(x-3)=0, \\ -3 \le x \le 1 \end{cases} \overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax=4, \\ -3 \le x \le 1. \end{cases} \quad (22.4)$$

Если коэффициент при *x* в первом уравнении совокупности (22.4) равен нулю, то есть $a=0$, то уравнение $ax=4$ не имеет решений, так как оно принимает вид $0\cdot x=4$.

Если $a \ne 0$, то $ax=4 \Leftrightarrow x=4a^{-1}$.

На отрезке [–3;1] единственным решением исходного уравнения является $x=4a^{-1}$, если

$$-3 \le \frac{4}{a} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4+3a}{a} \ge 0, \\ \dfrac{4-a}{a}1 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -4/3, \\ a \ge 4. \end{array}\right. .$$

Итак, если $a \in (-\infty;-4/3] \cup [4;\infty)$, то исходное уравнение имеет единственное решение.

Ответы. а) $a \le 1$; б) $a \in (-\infty;-4/3] \cup [4;\infty)$.

23. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $((a-1)x-a)\sqrt{ax-1}=0 \quad (23)$ имеет два решения.

Решение. ОДЗ уравнения удовлетворяет неравенству $ax-1 \ge 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

Пусть коэффициенты при *x* равны нулю.

1. Если $a=0$, то уравнение не имеет решений, так как в этом случае неравенство $ax-1 \ge 0$ принимает вид $0\cdot x-1 \ge 0 \Leftrightarrow 0\cdot x \ge 1$.

2. Если $a=1$, то уравнение принимает вид $\sqrt{x-1}=0$. Решение последнего уравнения – это $x=1$. Так как для $a=1$ и $x=1$ выполняется неравенство $ax-1\ge 0$, то $x=1$ единственное решение уравнения (22) при $a=1$.

Пусть коэффициенты при x не равны нулю.

3. Если $ax-1\ge 0$ и $a\ne 0$, $a\ne 1$, то

$$((a-1)x-a)\sqrt{ax-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(a-1)x=a,\\ ax-1=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\cdot(a-1)^{-1},\\ x=a^{-1}.\end{array}\right.$$

Определим значения a, при которых $x=a(a-1)^{-1}$ удовлетворяет неравенству $ax-1\ge 0$. Имеем

$$ax-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a-1}-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-a+1}{a-1}\ge 0 \Leftrightarrow a>1.$$

Так как $x=a(a-1)^{-1}$ удовлетворяет неравенству $ax-1\ge 0$, если $a>1$, то $x=a(a-1)^{-1}$ решение уравнения (22), при $a>1$.

Так как $x=a^{-1}$ удовлетворяют неравенству $ax-1\ge 0$ при всех значениях $a\ne 0$, то $x=a^{-1}$ является решением уравнения (23), если $a\ne 0$.

Итак, если $a>1$, то решениями уравнения (23) являются $x=a^{-1}$, $x=a(a-1)^{-1}$..

Уравнение (23) имеет два решения при тех значениях $a>1$, при которых $a^{-1}\ne a(a-1)^{-1} \overset{a\ne 0, a\ne -1}{\Leftrightarrow} a^2-a+1\ne 0.$

Так как $a^2-a+1\ne 0$ при $a\in R$, а значит и при $a>1$, то уравнение (23), имеет два решения, если $a>1$.

Ответ. $a>1$.

24. Найдите все значения параметра m, при которых уравнение

а) $\dfrac{4(m-2)\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}}=8mx-13$ (24.1)

б) $\sqrt{(a-1)x}=\sqrt{a(x-a-1)}$ (24.2)

не имеет решений.

Решение. ОДЗ уравнения (24.1) – это $x\in(-\infty;\,4)$.

Очевидно, если $x\in(-\infty;\,4)$, то уравнение (24.1) равносильно уравнению $8mx=4m+5$ (24.3).

1) Если коэффициент при x в уравнении (24.3) равен нулю, то есть если $m=0$, то уравнение (24.1), не имеет решений, так как уравнение $8mx=4m+5$ принимает вид $0\cdot x=5$;

2) Если $m \neq 0$, то $x = \dfrac{4m+5}{8m}$ единственное решение уравнения $8mx = 4m+5$. (24.3)

Так как ОДЗ уравнения (24.1) интервал $(-\infty; 4)$, то $x = \dfrac{4m+5}{8m}$ не является решением уравнения (24.1), если

$$\frac{4m+5}{8m} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{5-28m}{8m} \geq 0 \Leftrightarrow \underline{0 < m \leq \frac{5}{28}}.$$

Если $\underline{0 < m \leq 5/28}$, то <u>уравнение (24.1),</u> <u>не имеет решений</u>.

б) Найдём, при каких значениях параметра *a* уравнение (24.2) имеет решение.

Уравнение (24.2) равносильно системе

$$\begin{cases} (a-1)x \geq 0, \\ (a-1)x = a(x-a-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x \geq 0, \\ x = a^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a^2+a) \geq 0, \\ x = a^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)(a+1) \geq 0, \\ x = a^2 + a. \end{cases}$$

Так как решения неравенства системы это $a \in [-1; 0] \cup [1; \infty)$, то $x = a^2 + a$ является единственным решением уравнения (24), если $a \in [-1; 0] \cup [1; \infty)$. Тогда <u>уравнение</u> (24.2) <u>не имеет решений</u>, если $a \notin [-1; 0] \cup [1; \infty)$, то есть, если $\underline{a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)}$.

Ответ. $m \in [0; 5/28]$; б) $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

25. Найдите значения параметра *a*, при которых все решения уравнения $\sqrt{(6-a^2-a)x} = \sqrt{30-a^2-13a}$ (25) по модулю больше единицы.

Решение. Уравнение (25) равносильно системе

$$\begin{cases} 30 - a^2 - 13a \geq 0, \\ (6-a^2-a)x = 30 - a^2 - 13a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 \leq a \leq 2, \\ (a+3)(a-2)x = (a-2)(a+15). \end{cases} \quad (25.1)$$

Если коэффициент при *x* в уравнении системы (25.1) равен нулю, то это уравнение или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений.

Поэтому рассмотрим только случай, когда коэффициент при *x* в уравнении системы (25.1) не равен нулю, то есть если $a \notin \{-3; 2\}$.

Если $a \notin \{-3; 2\}$, то решениями неравенства системы (25.1) являются $a \in [-15; -3) \cup (-3; 2)$, а $x = \dfrac{a+15}{a+3}$ является единственное решение уравнения системы (25.1), а значит и уравнения (25).

Найдём, при каких значения параметра $a \in [-15; -3) \cup (-3; 2)$ выполняется неравенство

$$|x|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{a+15}{a+3}\right|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a+15}{a+3}>1, \\ \frac{a+15}{a+3}<-1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{12}{a+3}>0, \\ \frac{2a+18}{a+3}<0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a>-3, \\ -9<a<-3.\end{array}\right.$$

Так как $a\in[-15;-3)\cup(-3;2)$, то решениями неравенства $\left|\frac{a+15}{a+3}\right|>1$ являются $a\in(-9;-3)\cup(-3;2)$.

Итак, если $a\in(-9;-3)\cup(-3;2)$, то решения уравнения (25) удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a\in(-9;-3)\cup(-3;2)$.

26. Сколько решений на отрезке $[0;2{,}5\pi]$ имеет уравнение

$$\sqrt{a^2-1}\,(\cos x\cdot ctgx-\sin x)=(2{,}5\pi-x)(2\sin x-\sin^{-1}x) \quad (26)?$$

Решение. Так как ОДЗ параметра удовлетворяет условию $|a|\ge 1$, то при $|a|<1$ уравнение (26) не имеет решений.

ОДЗ уравнения (26) это $x\ne\pi n,\ n\in Z$, находим из условия $\sin x\ne 0$.

Так как

$$\cos x\cdot ctgx-\sin x=\frac{\cos 2x}{\sin x},\ \ 2\sin x-\frac{1}{\sin x}=-\frac{\cos 2x}{\sin x},$$

то уравнение (26), если $x\ne\pi n,\ n\in Z$, равносильно уравнению

$$\cos 2x\cdot(x-2{,}5\pi-\sqrt{a^2-1})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0, \\ x=2{,}5\pi+\sqrt{a^2-1}.\end{array}\right. \quad (26.1)$$

Рассмотрим первое уравнение совокупности (26.1).

Так как $\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\pi/2+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x=\pi/4+\pi n,\ n\in Z$, то первое уравнение совокупности (26.1) на отрезке $[0;2{,}5\pi]$ имеет пять решений: $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$, $9\pi/4$, если $|a|\ge 1$.

Рассмотрим второе уравнение совокупности (26.1).

Так как $2{,}5\pi+\sqrt{a^2-1}\ge 2{,}5\pi$, то $x=2{,}5\pi$ решение второго уравнение совокупности (26.1), а значит и уравнения (26) на отрезке $[0;2{,}5\pi]$, если $a=1$ или $a=-1$.

Ответ. Если $|a|<1$, то решений нет; если $|a|=1$, то шесть решений; если $|a|>1$, то пять решений.

27. Найдите значения параметра *a*, при которых уравнение $2-a\cos 2x=a^2 \quad (27)$ имеет решения.

Решение. Сделаем замену $t = \cos 2x$, где $|t| \le 1$. Тогда уравнение (27) принимает вид $at = 2 - a^2$, где $|t| \le 1$.

Отметим: уравнение (27) и полученное уравнение имеют решения при одних и тех же значениях параметра.

Рассмотрим уравнение $at = 2 - a^2$, где $|t| \le 1$ (27.1)

1. Если $a = 0$ (коэффициент при t), то уравнение (27) не имеет решений, так как уравнение $at = 2 - a^2$ принимает вид $0 \cdot t = 2$.

2. Если $a \ne 0$, то $t = 2a^{-1} - a$ решение уравнения $at = 2 - a^2$.

Решением уравнения (27.1) является $t = 2a^{-1} - a$, если

$$-1 \le t \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 2a^{-1} - a \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} - a \ge -1, \\ \frac{2}{a} - a \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - a - 2}{a} \le 0, \\ \frac{a^2 + a - 2}{a} \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+1)(a-2)}{a} \le 0, \\ \frac{(a-1)(a+2)}{a} \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le a \le -1, \\ 1 \le a \le 2. \end{array} \right.$$

Из последней совокупности следует:

уравнение $at = 2 - a^2$, где $|t| \le 1$, а значит и <u>уравнение (27), имеет решение, если $a \in [-2;-1] \cup [1;2]$</u>.

Ответ. $a \in [-2;-1] \cup [1;2]$.

28. Найдите все значения параметра *a*, при которых равносильны уравнения $a\sin^2 x = a - 4$ (28.1), $(a-1)\cos 2x = 5 - a$ (28.2).

Решение. Имеем

$$a\sin^2 x = a - 4 \Leftrightarrow a - a\cos 2x = 2a - 8 \Leftrightarrow a\cos 2x = 8 - a.$$

Получили, что уравнение (28.1) равносильно уравнению $a\cos 2x = 8 - a$.

Сделаем замену $\cos 2x = t$, где $|t| \le 1$.

Уравнения (28.1) и (28.2) соответственно принимают вид

$at = 8 - a$, где $|t| \le 1$ (28.3) и $(a-1)t = 5 - a$, где $|t| \le 1$ (28.4).

Отметим, что уравнения (28.1) и (28.2) и уравнения (28.3) и (28.4) равносильны при одних и тех же значениях параметра.

Пусть коэффициенты при t в уравнениях (28.3) и (28.4) равны нулю.

1. Если $a = 0$, то уравнении (28.3) не имеет решений, так как оно принимает вид $0 \cdot t = 8$.

Уравнение (28.4), если $a = 0$, так же не имеет решений, так как оно принимает вид $t = -5$, где $|t| \le 1$.

Итак, если $\underline{a = 0}$, то уравнения (28.3) и (28.4), равносильны, так как их множества решений совпадают (это множество $\varnothing$). Тогда и уравнения (28.1) и (28.2) равносильны, если $\underline{a = 0}$.

2. Если $a = 1$, то уравнения (28.3) и (28.4), равносильны, так как уравнения не имеют решений (уравнение (28.3) принимает вид $t = 7$, где $|t| \le 1$, (уравнение (28.4) принимает вид $0 \cdot t = 4$). Множества их решений совпадают (это множество $\varnothing$). Тогда и уравнения (28.1) и (28.2), равносильны, если $\underline{a = 1}$.

3. Пусть $a \ne 0$ и $a \ne 1$.

Рассмотрим уравнение (28.3), если $a \notin \{0; 1\}$.

$$\begin{cases} at = 8 - a, \\ |t| \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8a^{-1} - 1, \\ -1 \le \dfrac{8}{a} - 1 \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8a^{-1} - 1, \\ 0 \le \dfrac{8}{a} \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8a^{-1} - 1, \\ \dfrac{8 - 2a}{a} \le 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8a^{-1} - 1, \\ a \ge 4. \end{cases}$$

Из последней системы следует: уравнение (28.3) имеет единственное решение $t = 8a^{-1} - 1$, если $a \ge 4$. Если $a < 4$, то уравнение (28.3) решений не имеет.

Рассмотрим уравнение (28.4), если $a \notin \{0; 1\}$.

$$\begin{cases} (a-1)t = 5 - a, \\ |t| \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5-a}{a-1}, \\ -1 \le \dfrac{5-a}{a-1} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5-a}{a-1}, \\ \dfrac{5-a}{a-1} \le 1, \\ \dfrac{5-a}{a-1} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5-a}{a-1}, \\ \dfrac{3-a}{a-1} \le 0, \\ \dfrac{6}{a-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5-a}{a-1}, \\ a \ge 3. \end{cases}$$

Из последней системы следует: если $a \ge 3$, то $t = (5-a)(a-1)^{-1}$ единственное решение уравнения (28.4). Если $a < 3$, то уравнение (28.4) решений не имеет.

Из 1. – 3. следует:

а) уравнения (28.1) и (28.2) имеют одновременно решения, если $a \ge 4$. В этом случае они могут быть равносильными только при тех значениях параметра $a \ge 4$, при которых их решения совпадают, то есть, если

$$\begin{cases} \dfrac{8}{a} - 1 = \dfrac{5-a}{a-1}, \\ a \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 9a + 8 = a^2 - 5, \\ a \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a \ge 4. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решений, то уравнения (28.3) и (28.4), а значит и уравнения (28.1) и (28.2), не равносильны ни при каких значениях $a \geq 4$;

б) Уравнения (28.3) и (28.4) не имеют одновременно решений, если $a < 3$. В этом случае эти уравнения, а значит, и уравнения (28.1) и (28.2), равносильны.

в) В 1, 2. получили, что уравнения (28.1) и (28.2) равносильны, если $a \in \{0; 1\}$. Так как $a \in \{0; 1\}$ удовлетворяют неравенству $a < 3$, то уравнения (28.1) и (28.2), равносильны, если $a < 3$

Ответ. $a < 3$.

29. Найдите положительные решения уравнения

$$\sin(ax + 2) = \sin(a - 2)x \quad (29).$$

Решение. Так как $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin 0{,}5(\alpha - \beta) \cdot \cos 0{,}5(\alpha + \beta)$, то

$$\sin(ax+2) = \sin(a-2)x \Leftrightarrow \sin(ax+2) - \sin(a-2)x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin(1+x) \cdot \cos(ax - x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(1+x) = 0, \\ \cos((a-1)x+1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n - 1,\ n \in Z, \\ (a-1)x = \pi/2 + \pi k - 1,\ k \in Z. \end{array}\right. \quad (29.1)$$

1. Из первого уравнения совокупности (29.1) следует, что $x = \pi n - 1$, , где $n \in N$, являются положительными решениями уравнения (29) для $a \in R$.

2. Рассмотрим уравнение $(a-1)x = \pi/2 + \pi k - 1$, где $k \in Z$ (29.2) совокупности (29.1).

а) Если $a = 1$,(коэффициент при x в уравнении (29.2)), то уравнение (29.2) не имеет решений, так как оно принимает вид $0 \cdot x = 0{,}5(2k+1)\pi - 1)$, где $k \in Z$. Тогда и уравнение (29) не имеет решений.

б) Если $a \neq 1$, то

$$(a-1)x = \pi/2 + \pi k - 1 \overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi/2 + \pi k - 1}{a-1}, \text{ где } k \in Z..$$

Решениями уравнения(29) являются $x = \dfrac{(2k+1)\pi - 2}{2(a-1)}$, где $k \in Z$.

Определим, в каких случаях эти решения положительные.

Решения уравнения положительные, если

$$x>0 \Leftrightarrow \frac{(2k+1)\pi-2}{2(a-1)}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<1, \\ (2k+1)\pi<2; \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ (2k+1)\pi>2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<1, \\ k<0; \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ k>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из совокупности следует, что положительные решения уравнения (29) это $\underline{x=\frac{(2k+1)\pi-2}{2(a-1)}}$, где целые $\underline{k\ge 0}$ и $\underline{a>1}$; целые $\underline{k<0}$ и $\underline{a<1}$.

Отв. $x=\pi n-1$, *где* $n\in N$, *если* $a\in R$;
$x=\frac{(2k+1)\pi-2}{2(a-1)}$, *где целые* $k\ge 0$ *и* $a>1$; $k<0$ *и* $a<1$.

30. Решите уравнение $\log_a(2ax-3+a^2)=2. \quad (30)$

Решение. Так как ОДЗ параметра множество $(0;1)\cup(1;\infty)$, то при $\underline{a\in(-\infty;0]\cup\{1\}}$ уравнение (30) не имеет решений.

Если $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$, то уравнение (30) равносильно системе

$$\log_a(2ax-3+a^2)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax-3+a^2=a^2, \\ a>0,\ a\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1{,}5a, \\ a>0,\ a\ne 1. \end{cases}$$

Отв. $x=1{,}5a$, *если* $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$; $x\in\varnothing$, *если* $a\in(-\infty;0]\cup\{1\}$.

31. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $\frac{\cos 0{,}5x}{3-\cos 0{,}5x}=\frac{1-a}{1+a} \quad (31)$ на отрезке $[-2\pi;3\pi]$?

Решение. Если $a=-1$, то уравнение (31) не имеет решений, так как $a=-1$ не принадлежит ОДЗ параметра.

Сделаем замену $t=\cos 0{,}5x$, где $|t|\le 1$.

Уравнение принимает вид

$$\frac{t}{3-t}=\frac{1-a}{1+a}, \text{ где } |t|\le 1. \quad (31.1)$$

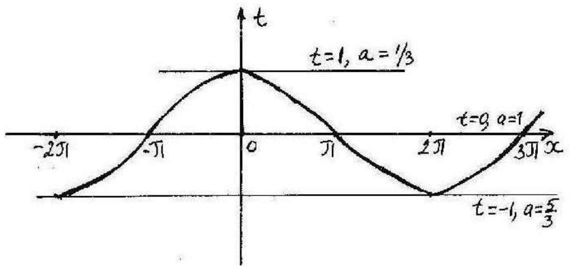
Отметим: уравнение (31) и уравнение (31.1) имеют решения при одних и тех же значениях параметра.

1. Найдём решения уравнения $\frac{t}{3-t}=\frac{1-a}{1+a}$

$$\frac{t}{3-t}=\frac{1-a}{1+a} \overset{|t|\le 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t+ta=3-3a-t+at, \\ a\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=1{,}5(1-a), \\ a\ne -1. \end{cases}$$

Если $a\ne -1$, то $t=1{,}5(1-a)$ решение уравнения (31.1), если

$$|t| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1{,}5(1-a) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 3-3a \le 2 \Leftrightarrow 1/3 \le a \le 5/3.$$



Итак, если $a \in [1/3;\ 5/3]$, то $t = 1{,}5(1-a)$ решение уравнения (31.1).

Тогда и уравнение (31) имеет решение, если $a \in [1/3;\ 5/3]$.

2. Найдём количество решений уравнения $\dfrac{\cos 0{,}5x}{3-\cos 0{,}5x} = \dfrac{1-a}{1+a}$ на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ в зависимости от параметра $a \in [1/3;\ 5/3]$.

Если $t = \cos 0{,}5x$ и $t = 1{,}5(1-a)$, то $\cos 0{,}5x = 1{,}5(1-a)$, где $a \in [1/3;\ 5/3]$.

Построим график функции $t = \cos 0{,}5x$, где $t = 1{,}5(1-a)$, на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ и из рисунка сделаем вывод.

1) Если $t = -1$, то $\cos 0{,}5x = -1 \Leftrightarrow 1{,}5(1-a) = -1 \Leftrightarrow a = 5/3$.

Из графика следует, если $\underline{a = 5/3}$, то <u>уравнение (31)</u> на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет <u>два решения</u>.

2) Если $t = 1$, то $\cos 0{,}5x = 1 \Leftrightarrow 1{,}5(1-a) = 1 \Leftrightarrow a = 1/3$.

Из графика следует, если $\underline{a = 1/3}$, то <u>уравнение (31)</u> на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет <u>одно решение</u>.

3) Если $t = 0$, то

$\cos 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow 1{,}5(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Из графика следует, если $\underline{a = 1}$, то <u>уравнение (31)</u> на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет <u>три решения</u>.

4) Если $-1 < t < 0$, то

$$-1 < \cos 0{,}5x < 0 \Leftrightarrow -1 < 1{,}5(1-a) < 0 \Leftrightarrow 1 < a < 5/3.$$

Из графика следует, если $\underline{a \in (1; 5/3)}$, то <u>уравнение (31)</u> на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет <u>три решения</u>.

5) Если $0 < t < 1$, то

$0 < \cos 0{,}5x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1{,}5(1-a) < 1 \Leftrightarrow 1/3 < a < 1$.

Из графика следует, если $\underline{a \in (1/3; 1)}$, то <u>уравнение (31)</u> на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет <u>два решения</u>.

Ответ. *Одно решение, если* $a = 1/3$; *два решения, если* $a \in \{5/3\} \cup (1/3; 1)$; *три решения, если* $a \in (1; 5/3)$.

Уравнения с модулем

Замечание. При раскрытии модуля надо учитывать знак выражения, стоящего под модулем на соответствующем промежутке. Так как знак выражения на каждом промежутке постоянный, то знак выражения на промежутке совпадает со знаком выражения в любой точке этого промежутка.

32. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $5+x=\left|a(x+1)\right| \quad (32)$ на отрезке $[-3;5]$?

Решение. 1. Пусть коэффициент при x в уравнении (32) равен нулю. Если $\underline{a=0}$, то <u>уравнение (32)</u> на отрезке $[-3;5]$ <u>не имеет решений</u>, так как оно принимает вид $5+x=0 \Leftrightarrow x=-5\notin[-3;5]$.

2. Пусть $a\neq 0$.

Имеем $5+x=\left|a(x+1)\right| \Leftrightarrow 5+x=|a|\cdot|x+1| \quad (32.1)$.

Замечание. Если пара $(a;x)$ удовлетворяет уравнению (32.1), то и пара $(-a;x)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Из замечания следует: надо сначала рассмотреть уравнение (32.1) при $a>0$.

3. Если $a>0$, то уравнение (32.1), а значит и уравнение(32) равносильно уравнению

$$5+x=a|x+1|,\ \text{где } x\in[-3;5] \text{ и } a>0 \qquad (32.2)$$

Раскрывая модули, на отрезке $[-3;5]$ заменим уравнение (32.2) равносильной совокупностью уравнений

$$\left[\begin{aligned} &a(x+1)=-5-x, \quad где -3\le x\le -1,\\ &a(x+1)=5+x, \quad где\ -1<x\le 5\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(a+1)x=-5-a, \quad где -3\le x\le -1,\\ &(a-1)x=5-a, \quad где\ -1<x\le 5.\end{aligned}\right. \qquad (32.3)$$

Рассмотрим первое уравнение совокупности (32.3), если $a>0$.

Так как $a>0$, то $a+1\neq 0$. Тогда $(a+1)x=-5-a \overset{a+1\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{-5-a}{a+1}$.

Решением первого уравнения совокупности (32.3), а значит и уравнения (32), на отрезке $[-3;-1]$ является $x=\dfrac{-5-a}{a+1}$, если

$$\begin{cases} -3\le x\le -1,\\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le \dfrac{-5-a}{1+a}\le -1,\\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+3a\ge 5+a,\\ 1+a\le 5+a,\\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1,\\ 1\le 5,\\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 1.$$

Итак, если $\underline{a \geq 1}$, то $\underline{x = \frac{-5-a}{a+1}}$ является решением первого уравнения совокупности (32.3), а значит и уравнения (32), на отрезке $\underline{[-3; -1]}$.

Рассмотрим второе уравнение совокупности (32.3), если $a > 0$.

а) Пусть коэффициент при x в уравнении $(a-1)x = 5-a$ равен нулю. Если $a = 1$, то уравнение $(a-1)x = 5-a$ не имеет решений так как оно принимает вид $0 \cdot x = 4$,. Тогда и уравнение (32), не имеет решений, если $\underline{a = 1}$,

б) Пусть $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$. Тогда

$$(a-1)x = 5-a \overset{a \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{5-a}{a-1}.$$

Решением второго уравнения совокупности (32.3), а значит и уравнения (32), на промежутке $(-1; 5]$ при $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$. является

$$x = \frac{5-a}{a-1}, \text{ если } \begin{cases} -1 < x \leq 5, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1, \\ a > 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \dfrac{5-a}{a-1} \leq 5, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1, \\ a > 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 5/3.$$

Итак, если $\underline{a \geq 5/3}$, то $\underline{x = \frac{5-a}{a-1}}$ является решением второго уравнения совокупности (32.3), а значит и уравнения (32), на промежутке $\underline{(-1; 5]}$.

Из 2. с учётом замечания следует ответ.

Ответ. Если $|a| < 1$, *то нет решений; если* $1 \leq |a| < 5/3$, *то одно решение*; *если* $|a| \geq 5/3$, *то два решения.*

33. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|2x+5| + |x-7| = a^2 \quad (33)$? Найдите эти решения.

Решение. 1. Приравняем нулю выражения, стоящие под знаком модуля: $2x+5=0, x-7=0$. Точки $x = -2,5$ и $x = 7$ разбивают числовую ось на три промежутка: $(\infty; -2,5]$, $(-2,5; 7]$, $(7;\infty)$.

2. Рассмотрим уравнение (33) на каждом промежутке.

Раскрывая модули, заменим уравнение $|2x+5| + |x-7| = a^2$ равносильной совокупностью:

$$\left[\begin{array}{l}-2x-5-x+7=a^2,\ \textit{если}\ x\le -2{,}5,\\ 2x+5-x+7=a^2,\ \textit{если}\ -2{,}5<x\le 7,\\ 2x+5+x-7=a^2,\ \textit{если}\ x>7;\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\left(2-a^2\right)/3,\ \textit{если}\ x\le -2{,}5,\\ x=a^2-12,\ \textit{если}\ -2{,}5<x\le 7,\\ x=\left(2+a^2\right)/3,\ \textit{если}\ x>7.\end{array}\right. \quad (33.1)$$

а) Из первого уравнения совокупности (33.1) следует, что решением уравнения (33) на промежутке $(\infty;-2{,}5]$ является $x=\left(2-a^2\right)/3$, если

$$x\le -2{,}5 \Leftrightarrow \frac{2-a^2}{3}\le -2{,}5 \Leftrightarrow a^2\ge 9{,}5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\le -\sqrt{9{,}5},\\ a\ge \sqrt{9{,}5}.\end{array}\right.$$

Итак, решением уравнения (33) на промежутке $\underline{(\infty;-2{,}5]}$ является $\underline{x_1=\left(2-a^2\right)/3}$, если $\underline{a\in(-\infty;-\sqrt{9{,}5}]\cup[\sqrt{9{,}5};\infty).}$

б) Из второго уравнения совокупности (33.1) следует, что решением уравнения (32) на промежутке $(-2{,}5;\,7]$ является $x=a^2-12$, если

$$-2{,}5<x\le 7 \Leftrightarrow -2{,}5<a^2-12\le 7 \Leftrightarrow 9{,}5<a^2\le 19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{9{,}5}<a\le\sqrt{19},\\ -\sqrt{19}\le a<-\sqrt{9{,}5}.\end{array}\right.$$

Итак, решением уравнения (33) на промежутке $\underline{(-2{,}5;\,7]}$ является $\underline{x_2=a^2-12}$, если $\underline{a\in[-\sqrt{19};-\sqrt{9{,}5})\cup(\sqrt{9{,}5};\sqrt{19}].}$

в) Из третьего уравнения совокупности (33.1) следует, что решением уравнения (33) на промежутке $(7;\infty)$ является $x=\left(2+a^2\right)/3$, если

$$x>7 \Leftrightarrow \frac{2+a^2}{3}>7 \Leftrightarrow a^2>19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a<-\sqrt{19},\\ a>\sqrt{19}.\end{array}\right.$$

Итак, решением уравнения (33) на промежутке $(7;\infty)$ является $\underline{x_3=\left(2+a^2\right)/3}$, если $\underline{a\in\left(-\infty;-\sqrt{19}\right)\cup\left(\sqrt{19};\infty\right).}$

Ответ. *Если* $a\in\left(-\sqrt{9{,}5};\sqrt{9{,}5}\right)$, *то нет решений*; *если* $a\in\left\{-\sqrt{9{,}5};\sqrt{9{,}5}\right\}$, *то одно решение* $x_1=\dfrac{2-a^2}{3}$; *если* $a\in\left(-\infty;-\sqrt{19}\right)\cup\left(\sqrt{19};\infty\right)$, *то два решения* $x_1=\left(2-a^2\right)/3$, $x_3=\left(2+a^2\right)/3$; *если* $a\in[-\sqrt{19};-\sqrt{9{,}5})\cup(\sqrt{9{,}5};\sqrt{19}]$, *то два решения* $x_1=\left(2-a^2\right)/3$, $x_2=a^2-12$.

34. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x+1|=2ax \quad (34)$ не имеет решений.

Решение 1. Имеем

$$|x+1| = 2ax \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=-2ax,\ если\ x\le -1, \\ x+1=2ax,\ если\ x>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(1+2a)=-1,\ если\ x\le -1, \\ x(1-2a)=-1,\ если\ x>-1. \end{array}\right. \qquad (34.1)$$

Уравнение (34) не имеет решений, если одновременно не имеют решений оба уравнения совокупности (34.1).

Возможны следующие случаи.

1. Коэффициент при x в первоем уравнении совокупности (34.1) равен нулю.

Если $a=-0,5$, то первое уравнения не имеет решений, так как это уравнение принимает вид $0\cdot x=-1$.

Второе уравнение совокупности (34.1) имеет решение так как, если $a=-0,5$, то $2x=-1,\ если\ x\le -1 \Leftrightarrow x=-0,5,\ если\ x\le -1$.

2. Коэффициент при x во втором уравнении совокупности (34.1) равен нулю.

Если $a=0,5$, то второе уравнения совокупности (34.1) не имеет решений (оно принимает вид $0\cdot x=-1$).

Если $a=0,5$, то первое уравнение совокупности (35.1) принимает вид $2x=-1,\ если\ x\le -1 \Leftrightarrow x=-0,5,\ если\ x\le -1.$ Это означает, что первое уравнения совокупности (34.1) не имеет решений, если $a=0,5$.

Так как первое и второе уравнения совокупности (34.1) не имеют решений, если $a=0,5$, то <u>уравнение (34)</u> при $\underline{a=0,5}$ <u>не имеет решений</u>.

3. Если $a\notin\{-0,5;\,0,5\}$, то уравнение (34) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=-(1+2a)^{-1},\ если\ x\le -1, \\ x=-(1-2a)^{-1},\ если\ x>-1. \end{array}\right. \qquad (34.2)$$

Совокупность (34.2) не имеет решений при тех значениях параметра a, которые удовлетворяют системе

$$\left[\begin{array}{l} x=-(1+2a)^{-1},\ если\ x>-1, \\ x=-(1-2a)^{-1},\ если\ x\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{1+2a}>-1, \\ -\dfrac{1}{1-2a}\le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{1+2a}<0, \\ \dfrac{2a}{1-2a}\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-0,5, \\ a>0; \end{array}\right. \\ 0\le a<0,5; \end{cases} \Leftrightarrow 0<a\le 0,5.$$

Из последнего двойного неравенства следует, что <u>уравнение (34)</u> при $\underline{0<a<0,5}$ <u>не имеет решений</u>.

Из 2. и 3. следует ответ.

Ответ. $0 < a \le 0,5$.

35. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $3\left|x^2-4\right|+5\left|x^2-2\right|-2x^2=a^2-a$ (35) имеет бесконечное множество решений. Найдите множество решений уравнения при этих значениях параметра

Решение. Сделаем замену $t = x^2$. Очевидно, $t \ge 0$.

Уравнение (35) принимает вид

$$3\left|t-4\right|+5\left|t-2\right|-2t=a^2-a, \text{ где } t \ge 0 \qquad (35.1)$$

Отметим: уравнение (35) и уравнение (35.1) при одних и тех же значениях параметра *a* имеют бесконечное множество решений.

Уравнение (35.1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -3t+12-5t+10-2t=a^2-a, \text{ } если \text{ } 0 \le t \le 2, \\ -3t+12+5t-10-2t=a^2-a, \text{ } если \text{ } 2 < t \le 4, \\ 3t-12+5t-10-2t=a^2-a, \text{ } если \text{ } t > 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -10t=a^2-a+22, \text{ } если \text{ } 0 \le t < 2, \\ a^2-a-2=0, \text{ } если \text{ } 2 \le t \le 4, \\ 6t=a^2-a+22, \text{ } если \text{ } t > 4. \end{array}\right. \qquad (35.2)$$

Так как первое и третье уравнения совокупности (35.2) имеют не более чем по одному решению, то уравнение (35.1) может иметь бесконечное множество решений, если $a^2-a-2=0$.

Так как корни уравнения $a^2-a-2=0$ – это $a=-1$ или $a=2$, то при $a \in \{-1; 2\}$ решениями уравнения (35.1) являются $t \in [2; 4]$.

Рассмотрим функцию $t = x^2$, если $t \in [2; 4]$.

Если $t=2$, то $x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$; если $t=4$, то $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$. Так как функция $t=x^2$, если $x \le 0$ убывает, а если $x \ge 0$ – возрастает, то $x \in \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

Итак, если $a \in \{-1; 2\}$, то решениями уравнения (35) являются $x \in \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

Ответ. $a \in \{-1; 2\}$, $\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

36. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left|\dfrac{a-1+8ax^{-1}}{x-2}\right|+\left|\left|a+1\right|+a^{-1}x\right|=0$ (36) имеет решение.

Решение. Так как $a=0$ не принадлежит ОДЗ параметра, то уравнение не имеет решений, если $a=0$.

Так как левая часть уравнения (36) – сумма двух неотрицательных слагаемых, то уравнение, если $a \ne 0$, равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{a-1+8ax^{-1}}{x-2}=0,\\ |a+1|+a^{-1}x=0;\end{cases}\overset{a\neq0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(a-1)x+8a=0,\\ |a+1|a+x=0,\\ x\neq0,\ x\neq2.\end{cases}\qquad(36.1)$$

1. Коэффициент при x в первом уравнении совокупности (36.1) равен нулю.

Если $a=1$, то уравнение (36) не имеет решений, так как первое уравнение системы (36.1) принимает вид $0\cdot x+8=0$.

2. Если $a\neq1$, то система (36.1) равносильна системе

$$\begin{cases}x=\dfrac{-8a}{a-1},\\ x=-|a+1|a,\\ x\neq0,\ x\neq2\end{cases}\overset{a\neq1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=-|a+1|a,\\ \dfrac{8a}{a-1}=|a+1|a,\\ x\neq0,\ x\neq2.\end{cases}\underset{a\neq1}{\overset{a\neq0}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}x=-|a+1|a,\\ 8=|a+1|(a-1),\\ x\neq0,\ x\neq2.\end{cases}\quad(36.2)$$

3. Найдём, при каких значениях $a\notin\{0;1\}$ решением уравнения (36) является $x=-|a+1|\cdot a.$

Так как $|a+1|\geq0$, то из второго уравнения системы (36.2), следует, что $a>1$ (так как $8=|a+1|(a-1)$). Так как $a>1$, то $|a+1|=a+1$. Тогда $8=|a+1|(a-1)\overset{a>1}{\Leftrightarrow}8=a^2-1\overset{a>1}{\Leftrightarrow}a=3.$

Найдём значение $x=-|a+1|a$, если $a=3$.

Имеем $x=-|a+1|a\overset{a=3}{\Rightarrow}x=-12$. Так как $x=-12$ не удовлетворяет условиям $x\neq0, x\neq2,$ то уравнение (36) <u>имеет решение, если $a=3$</u>.

Ответ. $a=3$.

37. Найдите, при каких значения параметра a уравнение $|ax+2|=(a-1)x-3 \quad (37)$ имеет решение. Укажите эти решения.

Решение. Так как $|ax+2|\geq0$, то из уравнения (37) следует, что $(a-1)x-3\geq0$. Тогда

$$|ax+2|=(a-1)x-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+2=(a-1)x-3,\\ ax+2=3-(a-1)x.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ (2a-1)x=1.\end{array}\right.\quad(37.1)$$

1. Уравнение (37) имеет решением $x=-5$ при тех значениях параметра a, при которых выполняется неравенство

$$(a-1)x-3\geq0\overset{x=-5}{\Rightarrow}-5(a-1)-3\geq0\Leftrightarrow a\leq0,4.$$

При <u>$a\leq0,4$</u> <u>решением уравнение (37)</u> является <u>$x=-5$</u>.

2. Пусть коэффициент при x во втором уравнении совокупности (37.1) равен нулю, то есть $a=0,5$. Так как уравнение $(2a-1)x=1$, где $a=0,5$, принимает вид $0\cdot x=1$, то это уравнение, а значит и уравнение (37), не имеет решений.

3. Если $a\neq 0,5$, то $x=(2a-1)^{-1}$ будет решением уравнения (37), если $(a-1)x-3\geq 0$. Имеем

$$(2a-1)^{-1}\cdot(a-1)-3\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-5a}{2a-1}\geq 0 \Leftrightarrow 2/5\leq a<1/2$$

Итак, если $\underline{0,4\leq a<0,5}$, то $\underline{x=(2a-1)^{-1}}$ решение уравнения (37).

Так как $x=-5$ решение уравнения (37), если $a\leq 0,4$ и $x=(2a-1)^{-1}$ решение этого уравнения, если $0,4\leq a<0,5$, то уравнение (37) может иметь два решения только при $a=0,4$, если решения $x=(2a-1)^{-1}$ и $x=-5$ не совпадают. Так как $(2a-1)^{-1}=-5 \Leftrightarrow a=0,4$, то $\underline{x=-5}$ единственное решение уравнения (37), если $\underline{a=0,4}$ (решения при $a=0,4$ совпадают).

Ответ. Уравнение имеет решение, если $a<1/2$; *единственное решение* $x=-5$, *если* $a\leq 0,4$, *единственное решение* $x=(2a-1)^{-1}$, *если* $2/5<a<0,5$.

38. Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-2|-a|x+3|=5 \quad (38)$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} -x+2+ax+3a=5, \text{ если } x\leq -3, \\ -x+2-ax-3a=5, \text{ если } -3<x<2, \\ x-2-ax-3a=5, \text{ если } x\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(a-1)=3(1-a), \text{ если } x\leq -3, \\ x(1+a)=-3(1+a), \text{ если } -3<x<2, \\ x(1-a)=7+3a, \text{ если } x\geq 2. \end{array}\right. \quad (38.1)$$

1. Из первого уравнения совокупности (38.1) следует:

а) если коэффициент при x равен нулю, то есть $\underline{a=1}$, то решением рассматриваемого уравнения, а значит и уравнения (38), является любое $\underline{x\in(-\infty;-3]}$, так как уравнение принимает вид $\underline{0\cdot x=0}$;

б) если $\underline{a\neq 1}$, то решением рассматриваемого уравнения, а значит и уравнения (38) является, $\underline{x=-3}$.

2. Из второго уравнения совокупности (38.1) следует:

а) если коэффициент при x равен нулю, то есть $\underline{a=-1}$, то решением рассматриваемого уравнения, а значит и уравнения (38), является любое $x \in (-3;2)$, так как уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$;

б) если $a \neq -1$, то $x = -3$ не является решением рассматриваемого уравнения, а значит и уравнения (38), так как $x = -3$ не удовлетворяет условию $-3 < x < 2$.

в) Рассмотрим третье уравнение совокупности (38.1).

Если коэффициент при x равен нулю, то есть $a = 1$, то рассматриваемое уравнение, а значит и уравнение (38), решений не имеет, так как оно принимает вид $0 \cdot x = 7$.

Если $a \neq 1$, то $x = (7+3a)/(1-a)$, где $x \geq 2$.

Найдём, при каких значениях a выполняется неравенство

$$x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{7+3a}{1-a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5+5a}{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a < 1.$$

Итак, если $a \in [-1;1)$, то решением рассматриваемого уравнения, а значит и уравнения (38), является $x = (7+3a)/(1-a)$.

Ответ. Если $|a| > 1$, *то решение* $x = -3$; *если* $a = -1$, *то решения* $x \in (-3;2)$; *если* $a = 1$, *то решения* $x \in (-\infty;-3]$; *если* $a \in [-1;1)$, *то решения* $x = (7+3a)/(1-a)$ *или* $x = -3$.

39. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\left||x|-1\right| = x - a \quad (39)$.

Решение. Имеем

$$\left||x|-1\right| = x - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|-1 = a-x, \text{ если } |x| \leq 1, \\ |x|-1 = x-a, \text{ если } |x| > 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = a-x+1, \text{ если } |x| \leq 1, \\ |x| = x-a+1, \text{ если } |x| > 1; \end{array}\right. \quad (39.1)$$

1. Рассмотрим первое уравнение совокупности (39.1)

$$\begin{cases} |x| = a-x+1, \\ |x| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+x = a+1, \\ |x| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1, \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0,5(a+1), \\ 0 < x \leq 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (39.2)$$

а) Из первой системы совокупности (39.2) следует, если $a = -1$, то решением совокупности (39.2), а значит и уравнения (39), является любое $x \in [-1;0]$.

б) Рассмотрим вторую системы совокупности (39.2).

Определим, при каких значениях параметра *a*, решением совокупности (39.2), а значит и уравнения (39), является $x = 0,5(a+1)$, где $\underline{0 < x \le 1.}$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 0,5(a+1), \\ 0 < x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5(a+1), \\ 0 < 0,5(a+1) \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5(a+1), \\ -1 < a \le 1. \end{cases}$$

Если $\underline{-1 < a \le 1}$, то <u>решени</u>ем совокупности (39.2), а значит и <u>уравнения (39),</u> является $\underline{x = 0,5(a+1).}$

2. Рассмотрим второе уравнение совокупности (39.1)

$$\begin{cases} |x| = x - a + 1, \\ |x| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - x = 1 - a, \\ |x| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ x > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0,5(a-1), \\ x < -1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (39.3)$$

а) Из первой системы совокупности (39.3) следует, если $\underline{a = 1}$, то решением совокупности (39.3), а значит и <u>уравнения (39),</u> является любое $\underline{x \in (1; \infty).}$

б) Рассмотрим вторую системы совокупности (39.3).

Определим, при каких значениях параметра *a*, решением совокупности (39.3), а значит уравнения (39), является $x = 0,5(a-1)$, если $x < -1$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 0,5(a-1), \\ x < -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5(a-1), \\ 0,5(a-1) < -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5(a-1), \\ a < -1. \end{cases}$$

Если $\underline{a < -1}$, то <u>решени</u>ем совокупности (39.3), а значит и <u>уравнения (39</u>), является $\underline{x = 0,5(a-1).}$

Ответ. Если $a < -1$, то $x = 0,5(a-1)$; *если* $a = -1$, то $x \in [-1; 0]$; *если* $-1 < a \le 1$, то $x = 0,5(a+1)$; *если* $a = 1$, то $x \in (1; \infty)$; *если* $a > 1$, то *уравнение не имеет решений.*

40. Решите уравнение

$$5\left|x^2 - 2x - 4\right| + 3\left|x^2 - 2x - 5\right| - 2\left(x^2 - 2x\right) = 5a. \quad (40)$$

Решение. Сделаем замену $x^2 - 2x - 4 = t \Leftrightarrow (x-1)^2 = t + 5.$

Так как $(x-1)^2 = t+5,$ то $t \ge -5$. Уравнение (40) принимает вид

$$5|t| + 3|t-1| - 2t - 8 - 5a = 0, \text{ где } t \ge -5. \quad (40.1)$$

Отметим, что уравнение (40) и уравнение (40.1) имеют решения при одних и тех же значениях параметра.

Раскрывая модули, заменим уравнение (40.1) равносильной совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l} -5t-3t+3-2t-8-5a=0, \ где -5 \le t \le 0, \\ 5t-3t+3-2t-8-5a=0, \ где \ 0 < t \le 1, \\ 5t+3t-3-2t-8-5a=0, \ где \ t > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1/2 \cdot (1+a), \ где -5 \le t \le 0, \\ a = -1, \ где \ 0 < t \le 1, \\ t = 1/6 \cdot (11+5a), \ где \ t > 1. \end{array}\right. \quad (40.2)$$

1. Рассмотрим первое уравнение совокупности (40.2).

а) Решением первого уравнения совокупности (40.2) является $t = -1/2 \cdot (1+a),$ если

$$-5 \le t \le 0 \Leftrightarrow -5 \le -1/2 \cdot (1+a) \le 0 \Leftrightarrow -10 \le -(1+a) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le a \le 9.$$

Если $-1 \le a \le 9,$ то $t = -1/2 \cdot (1+a)$ является решением первого уравнения совокупности (40.2), значит и решением уравнения (40.1).

б) Перейдём к переменной x.

Так как $t = x^2 - 2x - 4$ и $t = -1/2 \cdot (1+a)$, где $-1 \le a \le 9,$ то

$$x^2 - 2x - 4 = t \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = -1/2(1+a) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 7 + a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,5\left(2 - \sqrt{18-2a}\right), \\ x_2 = 0,5\left(2 + \sqrt{18-2a}\right). \end{array}\right.$$

Отметим, что $18 - 2a \ge 0,$ если $-1 \le a \le 9$.

Если $\underline{-1 \le a < 9,}$ то $\underline{x_1 = 0,5 \cdot \left(2 - \sqrt{18-2a}\right)}$ или $\underline{x_2 = 0,5 \cdot \left(2 + \sqrt{18-2a}\right)}$ <u>решения уравнения (40).</u> Если $\underline{a = 9,}$ то $\underline{x_1 = x_2 = 1}$ (так как $\underline{\sqrt{18 - 2 \cdot 9} = 0}$) <u>решение уравнения</u> <u>(40)</u>.

2. Рассмотрим второе уравнение совокупности (40.2).

а) Из неравенства $0 < t \le 1$ и из того, что $x^2 - 2x - 4 = t$ найдём решения уравнения (40) при $a = -1$.

Имеем

$$x^2 - 2x - 4 = t \overset{0<t\le 1}{\Leftrightarrow} 0 < x^2 - 2x - 4 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 > 0, \\ x^2 - 2x - 5 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sqrt{6} \le x < 1 - \sqrt{5}, \\ 1 + \sqrt{5} < x \le 1 + \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Итак, если $\underline{a = -1,}$ то <u>решениями уравнения (40)</u> является любое $\underline{x \in [1 - \sqrt{6}; 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{6}].}$

б) Из 1. б) следует, если $a=-1,$ то решениями уравнения (40) являются

$x_1=0,5\cdot\left(2-\sqrt{18-2\cdot(-1)}\right)\Leftrightarrow x_1=1-\sqrt{5},\quad x_2=0,5\cdot\left(2+\sqrt{18-2\cdot(-1)}\right)\Leftrightarrow x_2=1+\sqrt{5}$

Итак, если $a=-1$, то решением уравнения (40) является любое $x\in\left[1-\sqrt{6};1-\sqrt{5}\right]\cup\left[1+\sqrt{5};1+\sqrt{6}\right].$

3. Рассмотрим третье уравнение совокупности (40.2).

а) Решением третьего уравнения совокупности (40.2) является

$t=1/6\cdot(11+5a),$ если $t>1\Leftrightarrow 1/6\cdot(11+5a)>1\Leftrightarrow a>-1.$

Если $-1\le a\le 9,$ то $t=-1/2\cdot(1+a)$ является решением третьего уравнения совокупности (40.2), а значит и уравнения (40.1).

б) Перейдём к переменной x.

Так как $t=x^2-2x-4$ и $t=1/6\cdot(11+5a)$, где $a>-1,$ то

$$x^2-2x-4=t\Leftrightarrow x^2-2x-4=1/6\cdot(11+5a)\Leftrightarrow 6x^2-12x-35-5a=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_3=1/6\cdot\left(6-\sqrt{246+30a}\right),\\ x_4=1/6\cdot\left(6+\sqrt{246+30a}\right).\end{array}\right.$$

Отметим, что $246+30a>0,$ если $a>-1$.

Если $a>-1,$ то $x_3=1/6\cdot\left(6-\sqrt{246+30a}\right)$, $x_4=1/6\cdot\left(6+\sqrt{246+30a}\right)$ решения уравнения (40).

Ответ. Если $a<-1,$ *решений нет*;
если $a=-1,$ *решения* $x\in\left[1-\sqrt{6};1-\sqrt{5}\right]\cup\left[1+\sqrt{5};1+\sqrt{6}\right]$;
если $-1<a<9,$ *то четыре решения* $x_1=0,5\cdot\left(2-\sqrt{18-2a}\right)$,
$x_2=0,5\cdot\left(2+\sqrt{18-2a}\right),$ $x_3=1/6\cdot\left(6-\sqrt{246+30a}\right),$ $x_4=1/6\cdot\left(6+\sqrt{246+30a}\right)$;
если $a=9,$ *три решения* $x_1=0,5\cdot\left(2-\sqrt{18-2a}\right)$, $x_2=0,5\cdot\left(2+\sqrt{18-2a}\right)$,
$x=1,$ *если* $a>9,$ *два решения* $x_3=1/6\cdot\left(6-\sqrt{246+30a}\right)$,
$x_4=1/6\cdot\left(6+\sqrt{246+30a}\right)$

41. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $4(\cos^4 x+\sin^4 x)=\left|a\cos 4x\right|\quad(41)$ имеет решения.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (41)

$$4(\cos^4 x+\sin^4 x)=4\left((\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\cdot\sin^2 x\right)=$$

$$=4-2\sin^2 2x=4-\left(1-\cos 4x\right)=3+\cos 4x.$$

Так как $4(\cos^4 x+\sin^4 x)=3+\cos 4x,$ то уравнение (41) равносильно уравнению $3+\cos 4x=|a\cos 4x|$.

Сделаем замену $\cos 4x=t,\ где\ |t|\le 1$. Уравнение (41) принимает вид $3+t=|at|,$ где $|t|\le 1\quad(41.1)$. Отметим, что $3+t=|at|\Leftrightarrow 3+t=|a||t|$.

Замечание 1. Исходное уравнение и уравнение $3+t=|a||t|$, где $|t|\le 1$ имеют решения при одних и тех же значениях параметра.

Замечание 2. Если пара $(a;t)$ удовлетворяет уравнению $3+t=|a||t|$, то и пара $(-a;t)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Рассмотрим уравнение (41) при $a\ge 0$. В этом случае уравнение принимает вид $3+t=a|t|$, где $|t|\le 1$ (41.2)

1. Если коэффициент при t равен нулю, то есть $a=0$, то уравнение (41.2) не имеет решений (оно принимает вид $3+t=0$, где $|t|\le 1,$), тогда и уравнение (41), при $a=0$ не имеет решений.

2. Если $a>0$, то раскрывая модули, заменим уравнение (41.2) равносильной совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} at=-3-t, & где\ -1\le t\le 0, \\ at=3+t, & где\ 0<t\le 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (a+1)t=-3, & где\ -1\le t\le 0, \\ (a-1)t=3, & где\ 0<t\le 1. \end{array}\right. \quad (41.2)$$

а) Рассмотрим уравнение $(a+1)t=-3,\ где\ -1\le t\le 0,\ (41.3)$ совокупности (41.2).

Так как $a>0,$ то $a+1\ne 0$, а тогда $(a+1)t=-3\Leftrightarrow t=-3/(a+1)$.

Решением уравнения (41.3) является $t=-3/(a+1)$, где $a>0$, если

$$-1\le t\le 0\Leftrightarrow -1\le \frac{-3}{1+a}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} 3/(a+1)\ge 0, \\ (3-a-1)/(a+1)\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1>0, \\ 2-a\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 2.$$

Если $a\ge 2$, то $t=-3/(a+1)$ является решением уравнения (41.3). Тогда из замечания 1. следует, что уравнение (41.1), а значит и уравнение (41), имеет решение, если $a\ge 2$. Из замечания 2. следует, что уравнение (41.1), а значит и уравнение (41), имеет решение при $a\le -2$.

Итак, уравнение(41) имеет решение, если $|a|\ge 2$.

б) Рассмотрим уравнение $(a-1)t=3,\ где\ 0<t\le 1,\ (41.4)$ совокупности (41.2).

Если коэффициент при t равен нулю, то есть $a=1$, то уравнение (41.4) не имеет решений (оно принимает вид $3+t=0$, где $|t|\le 1$,), тогда и уравнение (41), при $a=1$ не имеет решений.

Если $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$, то $(a-1)t=3 \Leftrightarrow t=3/(a-1)$.

Решением уравнения (41.4) при $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$ является $t=3/(a-1)$, если

$$0<t\le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{3}{a-1}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3/(a-1)>0, \\ (3-a+1)/(a-1)\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1>0, \\ 4-a\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 4.$$

Если $a\ge 4$, то $t=3/(a-1)$ является решением уравнения (41.4).

Итак, если $\underline{a\ge 4}$, то уравнение (41.4), а значит и уравнение (41) (замечание 1.), имеет решение.

Из замечания 2. следует, что уравнение (41.1), а значит и уравнение (42), имеет решение при $a\le -4$.

Итак, уравнение (41) имеет решение, если $\underline{|a|\ge 4}$.

Из 1. и 2. следует, что уравнение (41) имеет решение, если $\underline{|a|\ge 2}$.

Ответ. $|a|\ge 2$.

42. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x-1|-3|x+1|+|x|+x-a=0 \quad (42)$?

Решение. В плоскости $(x;a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $a(x)=|x-1|-3|x+1|+|x|+x$.

Так как при раскрытии модулей функция $a(x)$ линейная на каждом промежутке $(-\infty;-1]$, $(-1;0]$, $(0;1]$, $(1;\infty)$, то для построения множества точек надо:

1) найти значения функции $a(x)$ в тех точках, в которых выражения, стоящие под знаком модуля равны нулю, а также в одной из точек, например, в точке $x=-2$, принадлежащей промежутку $(-\infty;-1]$, и, например, в точке $x=2$, принадлежащей промежутку $(1;\infty)$.

Имеем $a(-2)=0$, $a(-1)=2$, $a(0)=-2$, $a(1)=-4$, $a(2)=-4$;

2) в плоскости $(x;a)$ построить точки $(-2;\ 0)$, $(-1;\ 2)$, $(0;-2)$, $(1;-4)$, $(2;-4)$;

3) на каждом промежутке $(-\infty;-1]$, $(-1;0]$, $(0;1]$, $(1;\infty)$ построить часть прямой, которая проходит через точки, принадлежащие соответствующему промежутку.

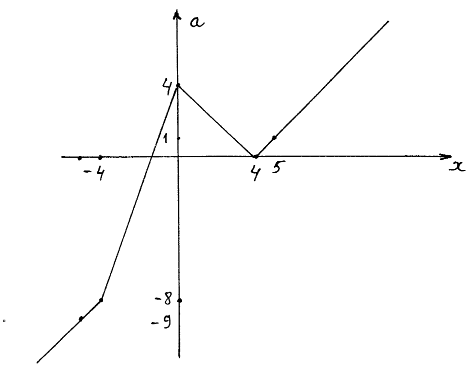
Число решений уравнения (42), при каждом значении параметра $a=C$, равно количеству точек пересечения графика функции $a(x)=|x-1|-3|x+1|+|x|+x$ с прямой $a=C$.

Отв. решений нет, если $a>2$; *одно решение, если* $a=2$; *два решения, если* $-4<a<2$; *бесконечно много решений, если* $a=-4$; *одно решение, если* $a<-4$.

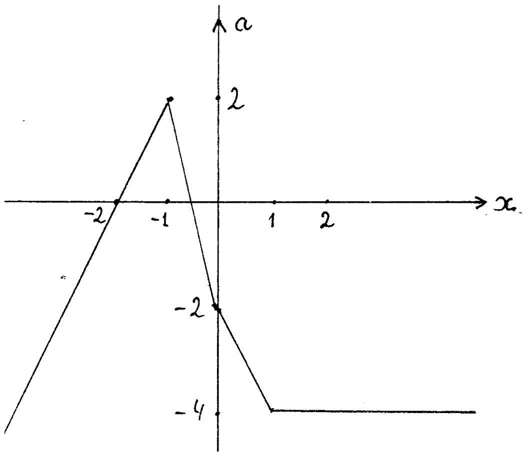
43. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\big||x|-4\big| - |x| + x - a = 0 \quad (43)$$

имеет не менее двух решений.



Решение. В плоскости $(x;a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $a(x)=\big||x|-4\big|-|x|+x$. Так как при раскрытии модулей функция $a(x)$ линейная на каждом промежутке $(-\infty;-4]$, $(-4;0]$, $(0;4]$, $(4;\infty)$, то для построения множества точек надо: найти значения функции $a(x)=\big||x|-4\big|-|x|+x$ в тех точках, в которых выражения, стоящие под знаком модуля равны нулю, а также, например, в точках $x=-5\in(-\infty;-4]$ и $x=5\in(4;\infty)$. Имеем



$a(-5)=-9,\quad a(-4)=-8,\quad a(0)=4,$
$a(4)=0,\ a(5)=1;$

2) в плоскости $(x;a)$ построить точки: (–5; –9), (–4; –8), (0;4), (4;0), (5;1);

3) на каждом промежутке $(-\infty;-4]$, $(-4;0]$, $(0;4]$, $(4;\infty)$ построить часть прямой, проходящей через точки, которые принадлежат соответствующему промежутку.

Уравнение (43) будет иметь не менее двух решений при тех значениях параметра $a=C$ при которых прямые $a=C$ пересекают график функции $a(x)=\left||x|-4\right|-|x|+x$ в двух или трех точках.

Отв. $0\le a\le 4$.

44. Решите уравнение $|x-a|+2|x-1|-5-a=0 \quad (44)$.

Решение. В плоскости $(x;a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $|x-a|+2|x-1|-5-a=0$.

Для построения множества точек проделаем следующее.

1. Приравняем нулю выражения, стоящие под знаком модуля и построим прямые $x=a$ и $x=1$ в плоскости $(x;a)$. Эти прямые разобьют плоскость $(x;a)$ на 4 области.

2. Рассмотрим данное уравнение в каждой области и построим в каждой области соответствующее множество точек.

Замечание. Так как знак, например, (*x*–*a*) в каждой области постоянный, то знак (*x*–*a*), например, в области I, можно определить следующим образом: берём любую точку из этой области и определяем знак (*x*–*a*) в этой точке.

В области I уравнение (44) равносильно системе

$$\begin{cases} x-a\le 0, \\ x-1>0, \\ -x+a+2x-2-5-a=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le a, \\ x>1, \\ x=7. \end{cases}$$

В области I строим часть прямой $x=7$. Прямая $x=7$ пересекает прямую $x=a$ в точке (7; 7).

В области II уравнение (44) равносильно системе

$$\begin{cases} x-a<0, \\ x-1\le 0, \\ -x+a-2x+2-5-a=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<a, \\ x\le 1, \\ x=-1. \end{cases}$$

В области II строим часть прямой $x=-1$. Прямая $x=-1$ пересекает прямую $x=a$ в точке (–1; –1).

В области III уравнение (44) равносильно системе

$$\begin{cases} x - a \ge 0, \\ x - 1 < 0, \\ x - a - 2x + 2 - 5 - a = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge a, \\ x < 1, \\ x + 2a = -3. \end{cases}$$

В области III строим часть прямой $x + 2a = -3$, которая пересекает прямые $x = a$ и $x = 1$ соответственно в точках (–1; –1) и (1; –2).

В области IV уравнение (44) равносильно системе

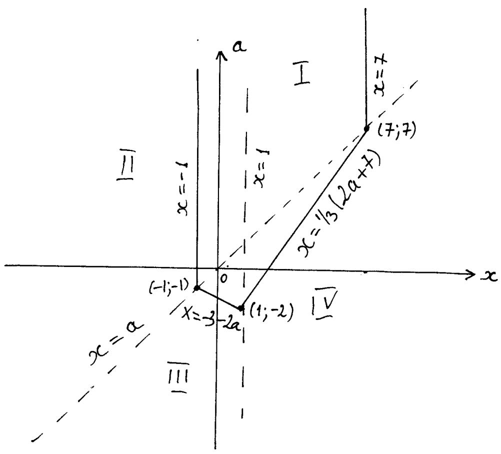
$$\begin{cases} x - a > 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ x - a + 2x - 2 - 5 - a = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a, \\ x \ge 1, \\ 3x - 2a = 7. \end{cases}$$

В области IV строим часть прямой $3x - 2a = 7$, которая пересекает прямые $x = a$ и $x = 1$ соответственно в точках (7; 7) и (1; –2).

График уравнения (44) изображён на рисунке. Для того чтобы найти решения исходного уравнения при каждом значении параметра $a = C$, надо провести прямые $a = C$ и сделать вывод, который является ответом.

Отв. при $a < -2$ уравнение решений не имеет; при $a = -2$ уравнение имеет одно решение $x = 1$; при $-2 < a < -1$ уравнение имеет два решения $x = -3 - 2a$, $x = 1/3(2a + 7)$; при $-1 \le a < 7$, уравнение имеет два решения $x = -1$, $x = 1/3(2a + 7)$; при $a \ge 7$ уравнение имеет два решения $x = -1$, $x = 7$.

45. Найдите, при каких значения параметра a уравнение $|2x - 2| = ax$ (45) имеет единственное решение. Найдите эти решения.



Решение. Первый способ.

Из уравнения (45) следует, что $ax \ge 0$.

Уравнение (45) равносильно совокупности уравнений

$$|2x - 2| = ax \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = ax, \\ 2x - 2 = -ax. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2-a)x=2,\\(2+a)x=2.\end{array}\right. \quad (45.1)$$

а) Если в первом уравнении совокупности (45.1), коэффициент при x равен нулю, то есть $a=2$, то это уравнение не имеет решений, так как оно принимает вид $0\cdot x=2$.

Решением второго уравнение совокупности (45.1), если $a=2$ является $x=0{,}5$. Так как, если $x=0{,}5$ и $a=2$ выполняется условие $ax\ge 0$, то $\underline{x=0{,}5}$ является <u>единственным решение уравнение (45),</u> если $\underline{a=2}$.

б) Если во втором уравнении совокупности (45.1), коэффициент при x равен нулю, то есть $a=-2$, то это уравнение не имеет решений, так как оно принимает вид $0\cdot x=2$.

Решением первого уравнения совокупности (45.1) является $x=0{,}5$, если $a=-2$.

Так как, если $x=0{,}5$ и $a=-2$ не выполняется условие $ax\ge 0$, то уравнение (45) не имеет решений, если $a=-2$.

в) Если $a\notin\{-2;\,2\}$, то уравнение (45) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ax\ge 0,\\x=2/(2-a);\end{cases}\\\begin{cases}ax\ge 0,\\x=2/(2+a).\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a/(2-a)\ge 0,\\x=2/(2-a);\end{cases}\\\begin{cases}2a/(2+a)\ge 0,\\x=2/(2+a).\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le a<2,\\x=2/(2-a);\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-2,\\a\ge 0;\end{array}\right.\\x=2/(2+a).\end{cases}\end{array}\right. \quad (45.2)$$

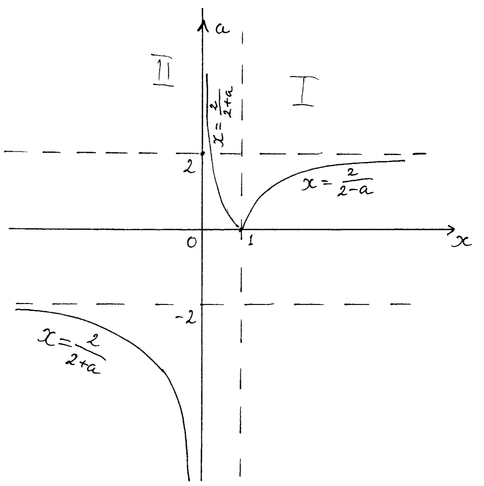
Если $a\in[0;2)$, то из первой системы совокупности (45.2) следует, что $x=2/(2-a)$ решения уравнения (45).

Если $a\in(-\infty;-2)\cup[0;\infty)$, то из второй системы совокупности (45.2) следует, что $x=2/(2+a)$ решения уравнения (45).

Тогда, если $a\in[0;2)$, то $x=2/(2-a)$ и $x=2/(2+a)$ $x=2/(2-a)$ решения уравнения (45). Уравнение (45) может иметь единственное решение, если решения $x=2/(2-a)$ и $x=2/(2+a)$ совпадают при $a\in[0;2)$ то есть, если

$$2/(2-a)=2/(2+a)\overset{a\ne\pm 2}{\Leftrightarrow}2-a=2+a\Leftrightarrow a=0.$$

Итак, если $a=0$ то уравнение (45) имеет единственное решение $x=1$.



Если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$, то $x=2/(2+a)$ единственное решение уравнения (45).

Отв. $a=0$, *то* $x=1$;
$a\in(-\infty;-2)\cup[2;\infty)$, *то* $x=2/(2+a)$.

Второй способ.

В плоскости $(x;a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $|2x-2|=ax \quad (45)$.

Для построения множества точек проделаем следующее.

1. Приравняем нулю выражение, стоящие под знаком модуля и построим прямую $x=1$ в плоскости $(x;a)$. Эта прямая разобьёт плоскость $(x;a)$ на 2 области.

2. Рассмотрим данное уравнение в каждой области и построим в каждой области соответствующее множество точек.

а) В области I данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2x-2=ax. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ a=2-2/x. \end{cases}$$

В области I строим часть гиперболы $a=2-2/x$. Асимптота гиперболы– прямая $a=2$. Гипербола пересекает границу области, которая определяется прямой $x=1$, в точке (1; 0).

б) Так как $x=0$ не является решением уравнения (46) (уравнение принимает вид $2=a\cdot 0$), то в области II уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-1<0,\ x\ne 0, \\ -2x+2=ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1,\ x\ne 0, \\ a=-2+2/x. \end{cases}$$

В области II строим часть гиперболы $a=2-2/x$. Гипербола пересекает прямую $x=1$, в точке (1; 0) и её асимптоты – прямая $a=-2$ и ось a.

Уравнение имеет одно решение при тех значениях параметра

$a = C$ при которых прямые $a = C$ пересекают график множества точек, задаваемых уравнением $|2x-2| = ax$, в одной точке.

Отв. $a = 0$, *то* $x = 1$; $a \in (-\infty;-2) \cup [2;\infty)$, *то* $x = 2/(2+a)$.

46. Определите, сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}} = a$ (46) и найдите все значения параметра a, при которых решения уравнения принадлежат интервалу (3; 6).

Решение. Сделаем замену $\sqrt{x-2} = t$. Очевидно, $t \geq 0$ и $x = t^2 + 2$. Имеем

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} = \sqrt{t^2+4-4t} = \sqrt{(t-2)^2} = |t-2|,$$

$$\sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}} = \sqrt{t^2+16-8t} = \sqrt{(t-4)^2} = |t-4|.$$

Если $\sqrt{x-2} = t$, то уравнение (46) принимает вид

$$|t-2| + |t-4| = a, \text{ где } t \geq 0.$$

Замечание. Так как для каждого $t \geq 0$ уравнение $\sqrt{x-2} = t$ относительно x имеет единственное решение, то число решений уравнения (46) совпадает с числом решений уравнения $|t-2|$ + $|t-4| = a$, где $t \geq 0$, для каждого параметра a.

Определим сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|t-2| + |t-4| = a$, где $t \geq 0$.

В плоскости $(t; a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a(t) = |t-2| + |t-4|, \text{ где } t \geq 0.$$

Так как при раскрытии модулей на каждом промежутке $[0; 2]$, $(2; 4]$, $(4;\infty)$ функция $a(t)$ линейная, то для построения множества точек надо:

1) найти значения функции $a(t) = |t-2| + |t-4|$ точках $t = 2$ и $t = 4$ (выражения, стоящие под знаком модуля равны нулю); в одной из точек, например, в точке $t = 5$, принадлежащей интервалу $(4;\infty)$ и в точке $t = 0$. Имеем: $a(2) = 2$, $a(4) = 2$, $a(0) = 6$, $a(5) = 4$;

2) в плоскости $(t; a)$ построить точки (2; 2), (4; 2), (0; 6), (5; 4).

3) на каждом промежутке $[0;2]$, $(2;4]$, $(4;\infty)$ построить часть прямой, проходящей через точки, которые принадлежат соответствующему промежутку.

Число решений уравнения $|t-2| + |t-4| = a$, где $t \geq 0$, при каждом значении параметра $a = C$ равно количеству точек пересечения графика функции $a(t) = |t-2| + |t-4|$, где $t \geq 0$, с прямой $a = C$.

Из рисунка следует: рассматриваемое уравнение, следовательно, и уравнение (46), имеет

1) бесконечное множество решений, если $a = 2$;

2) два решения, если $2 < a \leq 6$;

3) одно решение, если $a > 6$;

4) не имеет решений, если $a < 2$.

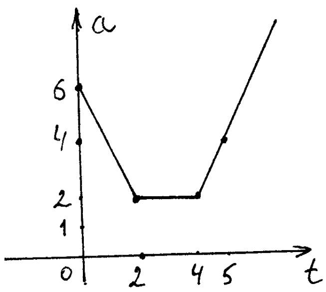
Найдём все значения параметра *a*, при которых решения уравнения (46) принадлежат интервалу (3; 6).

Так как $\sqrt{x-2} = t$, то $3 < x < 6 \Leftrightarrow 1 < t < 2$.

Так как функция $a(t) = |t-2| + |t-4|$ на интервале (1; 2) убывает (следует из рисунка), то $a \in (2; 4)$ (так как $a(1) = 4, a(2) = 2$)

Получили, что решения уравнения (46) принадлежат интервалу (3; 6), если $a \in (2; 4)$.

Отв. бесконечное множество решений, если $a = 2$*; два решения, если* $2 < a \leq 6$*; одно решение, если* $a > 6$*; не имеет решений, если* $a < 2$*; решения уравнения принадлежат интервалу* (3; 6)*, если* $a \in (2; 4)$.



Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $2ax - 2(1-a) = 3(a+2)x - 4x - 2(a+1)x$;

2) $\dfrac{2x+a}{x-4} = 0$;

3) $\dfrac{2x+a}{a-2x} = \dfrac{1+a}{a-1}$;

4) $\dfrac{2x-a}{(x+4)(x-3)} = 0$;

5) $\dfrac{2+a}{x+2} = \dfrac{3-a}{x+3}$;

6) $\dfrac{((a-1)x+2)\cdot(x-3)}{(a-1)x+2}=\dfrac{1}{a}$; 7) $\dfrac{ax+3}{x+3}-\dfrac{b}{x-3}=\dfrac{a(x^2+9)}{x^2-9}$;

8) $\log_{a+1}((2+a)x-7+2a^2)=2$;

9) $(a+5)^{(a-5)x}=(a+5)^{(5-a)/(36-a^2)}$; 10) $|x+4a|=4a-1$;

11) $|ax-2|=|ax+a|$; 12) $|x+a|+|x-a|=x+1$.

13) $|a|-|x|=2$, если $a>2$;. 14) $\left|x-a^2\right|+|x-3a|=a+1$.

Ответ. 1) $x\in\varnothing$, *если* $a=0$; $x=2(1-a)\cdot a^{-1}$, *если* $a\neq 0$;

2) $x\in\varnothing$, *если* $a=-8$; $x=-0{,}5a$, *если* $a\neq -8$;

3) $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, *если* a=0; $x\in\varnothing$, *если* $a=1$;

x=1/2, *если* $a\neq 0$ *и* $a\neq 1$;

4) $x\in\varnothing$, *если* $a=6$ и $a=-8$; $x=a/2$, *если* $a\neq -8$ *и* $a\neq 6$;

5) $x\in\varnothing$, *если* a=0,5, $a=-2$, a=3; $x=5a(1-2a)^{-1}$, *если* $a\neq 0$, $a\neq -2$, $a\neq 3$;

6) $x\in\varnothing$, *если* $a\in\{-\sqrt{3}/3;0;\ \sqrt{3}/3\}$; $x=3+a^{-1}$, *если* $a\notin\{-\sqrt{3}/3;0;\ \sqrt{3}/3\}$;

7) $x=3\dfrac{3a+b+3}{3-3a-b}$, *если* $3a+b\neq 3$ *и* $b\neq -3a$; $x\in\varnothing$, *если* $b=-3a$ *или* $3a+b=3$;

8) $x\in\varnothing$, *если* $a\le -1$, a=0; $x=4-a$, *если* $a>-1$ *и* $a\neq 0$;

9) $x\in\varnothing$, *если* a=6 *или* $a\le -5$; $x=(a^2-36)^{-1}$, *если* $a>-5$ *и* $a\notin\{-4;5;6\}$;

$x\in R$, *если* $a\in\{-4;5\}$;

10) $x\in\varnothing$, *если* $a<1/4$; $x=-1$ *или* $x=1-8a$, *если* $a>1/4$;
$x=-1$, *если* $a=1/4$;

11) $x\in R$, *если* $a=-2$; $x=a^{-1}-0{,}5$, *если* $a\neq 0$, $a\neq -2$;
$x\in\varnothing$, *если* a=0;

12) $x\in\varnothing$, *если* $|a|>1$; $x=1$ *или* $x=-1/3$, *если* $|a|\le 1/3$;

$x=2a-1$ *или* $x=1$, *если* $1/3<a<1$; $x=1$ *или* $x=-2a-1$, *если* $-1<a<-1/3$;; $x=1$, *если* $a\in\{-1;1\}$.

13) $x=a-2$, $x=2-a$.

14) $x\in\varnothing$, *если* $a\le -1$*; любое* $x\in[1;3]$, *если* $a=1$*;*

$x_1=0{,}5\left(a^2+2a-1\right)$, $x_2=0{,}5\left(a^2+4a+1\right)$, *если* $a\in(-1;1)\cup(1;\infty)$*;*

2. При каком значении параметра a уравнение $2ax+2=3(a+2)+4x$ имеет решение равное 2?

Ответ. a=12.

3. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

1) $\dfrac{ax+8}{a+2ax}=\dfrac{3}{a}$; 2) $\dfrac{(2a+7)\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}=2ax-9$; 3) $|x-2|=2ax-3$

не имеет решений.

Ответ. 1) $a\in\{0;6;16\}$; 2) $a\in[-8/3;8]$; 3) $a\in(-3;3]$.

4. При каких значениях параметра *a* уравнение

$|x-1|+2|x+3|=a+8$ имеет не более одного решения?

Ответ. $a\le -4$.

5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

1) $((a-1)x+3a)\lg(a+1)=0$ на отрезке [–5;3];

2) $((a+1)x-2a)\cdot\sqrt{x+3}=0$ 3) $|3x-2a|=ax-2$,

4) $ax=|x|$, 5) $\left|x+\cos^2 4a-2\sin a\cdot\cos^2 4a\right|+\left|x-\sin^2 4a\right|=b\left(a-1{,}5\pi\right)$

6) $2\left|(x+a)^2-9\right|+2|x|-x^2-2ax-a^2+5=0$,

7) $\arcsin\left(2+|2x-a|\right)^{-1}=\arcsin\left(1+|x+3|\right)^{-1}$,

8) $\left|x+\sqrt{a^3-1}\right|+\left|x-1+a^2\right|=a^3-3a^2+2a$

имеет единственное решение.

Ответ. 1) $a\in(-1;1/2]\cup[5/2;\infty)$; 2) $a\in(-1;-0{,}6]$;

3) $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)\cup\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; 7) $a\in\{-8;-4\}$; 4) $a\notin\{-1;1\}$.

5) $a=0{,}5\pi+2\pi n$, *где* $n\in Z$, $b=0$; $a=-1{,}5\pi$, $-\infty<b<\infty$.

6) $a=|1|$ *или* $a=|7|$.

7) $a=1$. 8) $a\in\{-8;-4\}$.

6. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

1) $4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$ 2) $\left|\left||x+2|-1\right|-3\right|=|x-a|$

имеет два решения.

Ответ 1). $a\in(-8;6)$.

2) $a\in(-6;-4)\cup(-4;0)\cup(0;2)$.

7. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

1) $x-0{,}5a=4\left|4|x|-a^2\right|$; 2) $\left|x^2+4x-5\right|+\left|x^2+4x\right|=a$ имеет три различных решения. Найдите эти решения.

Ответ. 1) *Если* $a=-2$, *то* $x\in\{-1;15/17;17/15\}$;

если $a = -1/8$, *то* $x \in \{-1/136; 0; 1/120\}$..

2) *Если* $a = 13$, *то* $x = -2$, $x = -2-\sqrt{13}$, $x = -2+\sqrt{13}$.

8. При каких значениях *k* уравнение $\left||x-2|-2x+1\right| = kx-4$ имеет три решения?

Ответ. $k \in (-3; 1)$

9. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\left(a+3-|x+2|\right)\cdot\left(a+x^2+4x\right)=0$ имеет 1) два решения; 2) три решения. Найдите эти решения.

Ответ. 1) *Два решения, если* $a > 4$, *то* $x_1 = -5-a,$, $x_2 = 1+a$;

если $a < -3$, *то* $x_1 = -3-\sqrt{4-a}$, $x_2 = -2+\sqrt{4-a}$;

если $a = -0,5\left(7-\sqrt{29}\right)$, *то* $x_1 = -0,5\left(5-\sqrt{29}\right)$, $x_2 = -0,5\left(3+\sqrt{29}\right)$.

2) *Три решения, если* $a = 4$, *то* $x_1 = -9$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$;

если $a = -3$, *то* $x_1 = -2$, $x_2 = -2-\sqrt{7}$, $x_3 = -2+\sqrt{7}$.

10. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\left||x-1|-5\right|-|x-1|-a+x+2=0$ имеет не менее двух решений.

Ответ. $4 \le a \le 8$.

11. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение

1) $5\left|x^2-3a\right|+\left|x^2-a^2\right|+4x^2=a$; 2) $\dfrac{5x}{2-5a}+\dfrac{x(a+4)}{a+2}=\dfrac{18-5a^2-13a}{a-1}$

имеет бесконечное множество решений.

*Ответ*1). $a \in \varnothing$. 2) $a = -3,6$.

12. Сколько решений в зависимости от параметра *a* имеет уравнение 1) $\dfrac{\cos x}{2-\cos x}=\dfrac{1+2a}{1-a}$ на отрезке $[0; 1,5\pi]$;

2) $4+x=\left|a(x-2)\right|$ на отрезке $[-4; 5]$?

Ответ 1) *одно решение, если* $a \in (-0,5; 0] \cup \{-0,8\}$;

два решения, если $a \in (-0,8; -0,5]$..

2) *одно решение; если* $|a| < 3$, *два решения, если.* $|a| \ge 3$

13. Сколько решений в зависимости от параметра *a* имеет уравнение $|2x-3|-|x+5|=a^2$? Найдите эти решения.

Ответ. Два решения $x = 8-a^2$, $x = a^2+8$, *если* $a \in \left(-\infty; -\sqrt{13}\right) \cup \left(\sqrt{13}; \infty\right)$;

два решения $x = \left(-2-a^2\right)/3$, $x = a^2+8$, *если* $a \in \left[-\sqrt{13}; \sqrt{13}\right]$

14. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение 1) $(a-2)\cdot\sin x=1$; 2) $(x-1)\arccos a=0$ имеет решение.

Ответ. 1) $(-\infty;1)\cup[3;\infty)$; 2) $|a|\le 1$.

15. Найдите значениях параметра a, при которых решения уравнения $\frac{2(x-2a)}{a}=3+2x$ принадлежат отрезку $x\in[-2;4]$?

Отв. $a\in[-4/3;0)\cup(0;8/15)$

16. При каких значения параметра a все решения уравнения $\sqrt{(a^2-4a+3)x}=\sqrt{1+5a-6a^2}$ по модулю больше единицы?

Отв. $2/7<a<1$.

17. Найдите наибольшее целое положительное значение параметра a, при котором уравнение $2a^{-1}\cdot(3+x)=3x+2$ имеет отрицательное решение.

Ответ. $a=4$.

18. При каких значениях параметра a только положительное решение имеет уравнение $\frac{a(3x-9a)}{x-5}=\frac{x+1}{x-5}$?

Ответ. $a\in(1/3;2/3)\cup(2/3;1)\cup(1;\infty)$.

19. Найдите положительные решения уравнения $\cos(2-(a+1)x)=\cos(2+(a+1)x)$.

Отв. $x=\frac{\pi k}{(a+1)}$, *где целые* $k>0$, *если* $a>-1$;

$x=\frac{\pi k}{(a+1)}$, *где целые* $k<0$, *если* $a<-1$.

20. Найдите число целочисленных значений параметра a, при которых корень уравнения $ax+4/a=4x$ принадлежит отрезку $[0;1]$.

Ответ. 1.

21. При каких значениях параметра a решения уравнения

1) $(5-a)x=3a-1$; 2) $(2-a)x=5a^2-6a-8$

3) $(a-3)x=2a+9$ 4) $4(a+x)=ax$

являются целыми числами?

Ответ. 1) $a=(5n+1)(3+n)^{-1}$, *где* $n\in Z$ *и* $n\ne-3$;

2) $a=-0{,}2(n+4)$, *где* $n\in Z$ *и* $n\ne-14$.

3) {2; 4; 6; 8; 18}.4) {–12; –4; 0; 8; 12; 20}.

22. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $a^3+\left|a^3+xa^2\right|+\left|1+xa^2\right|=1$ имеет не менее четырёх различных решений, являющихся целыми числами.

Ответ. $a\in(-\infty;-3]\cup\left[-\sqrt{3}/3;\,0,5\right]$.

23. При каких значениях параметра a каждый корень уравнения $\dfrac{(1+a)x-2a^2}{9+2a^2}=2$ в 3 раз больше корней уравнения $\dfrac{3x-2a}{9+4a}=1$?

Отв. $a=0,6$.

24. Определите, при каких значения параметра a сумма решений уравнений $ax+\dfrac{4x}{a}=a+1$, $\dfrac{a^2x-1}{2a-1}+\dfrac{4x}{2a-1}=\dfrac{1+2a}{2a-1}$ меньше 1.

Отв. $a<2/3$, $a\neq 0$, $a\neq 1/2$.

25. При каких значениях параметра a равносильны уравнения

1) $\dfrac{(4+a)x}{a-2}=a+2$ и $\dfrac{3x}{a-2}=a+2$;

2) $\dfrac{x-a}{a+2}=\sqrt{2a-1}$ и $\dfrac{x-a}{a+2}=\sqrt{7-a^2}$;

3) $(a-4)\cos^2 x=(a-4)\cdot(a-1)^{-1}$ и $(a+1)\cos 2x=5+a$?

Отв. 1) $a\in\{-2;-1;2\}$; 2) $a\in(-\infty;-\sqrt{7})\cup\{-2;2\}$; 3) $a\in(-3;2)$.

26. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{(3-a)x}{x-a}-\dfrac{3-x}{x-a}=1$ является следствием уравнения $(3-a)x=3a^{-1}-1$?

Отв. $a=0$.

ТЕСТ

1. При a=1 решение уравнения $\dfrac{x+a}{x^2-5x-6}=0$ принадлежит множеству

1) $[-2;0]$; 2) $[0;2]$; 3) $(1;\infty)$; 4) R; <u>5) $\varnothing$.</u>

2. Значения параметра a, при котором решение уравнения $\dfrac{4ax}{a+1}=a+1$, равное a, принадлежит множеству

1) $\varnothing$; 2) R; 3) $\{-1/3\}$; 4) $\{1\}$; <u>5) $\{-1/3; 1\}$.</u>

3. Число целочисленных значений параметра a, при которых корень уравнения $ax + 4/a = 4x$ принадлежит отрезку $[0;1]$

1) 5; 2) 4; <u>*3)* 1;</u> 4) 0; 5) 2.

4. Уравнение $\frac{a^2x}{a+2} - \frac{x}{a+2} + 2 = \frac{a^2 + 2a + 3}{a+2}$ имеет бесконечно много решений, если

1) $a = -1$; 2) $a = 1$; <u>*3)* $a \in \{-1; 1\}$;</u> 4) $a \in \varnothing$; 5) $a \in (1; -1)$.

5. Уравнение $\frac{a^2x}{a+2} - \frac{x}{a+2} + 2a = \frac{a^2 + 2a + 3}{a+2}$ не имеет решений, если

1) $a \neq -2$; <u>*2)* $a = -2$;</u> 3) $a = -2$, $a = -1$; 4) $a \in \varnothing$; 5) $a = -1$.

6. Уравнение $|x - 3| + |x + 4| = a$ не имеет решений, если

1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $a \in (-2; 7)$; 4) $a \in \varnothing$; <u>*5)* $a \in (-\infty; 7)$.</u>

7. Уравнение $|x| = ax$ имеет более одного решения, если

1) $a \neq 0$; 2) $a < 0$; 3) $a = 1$; <u>*4)* $|a| = 1$;</u> 5) другие значения a.

8. Решениями уравнения $|a| - |x| = 2$, если $a > 2$ являются

1) $x = a - 2$; 2) $x = 2 - a$; 3) $x = 2 - a$, $x = a + 2$;
<u>*4)* $x = a - 2$, $x = 2 - a$;</u> 5) $x = a - 2$, $x = 2 - a$.

9. Уравнение $|x - a| = 2a - 3$ имеет два решения, если

<u>*1)* $a > 1{,}5$;</u> 2) $a \neq 1{,}5$; 3) $a \geq 1$; 4) $a \in \varnothing$; 5) $a < 1{,}5$

10. Уравнение $(\sqrt{x} - 2)(x - a) = 0$ имеет единственное решение, если

1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $a = 4$; 4) $a \in \varnothing$; <u>*5)* $a < 0$ или $a = 4$.</u>

11. Уравнение $(a - 2) \cdot \sin x = 1$ имеет решение, если значения параметра a принадлежат множеству

1) $[3; \infty)$; 2) $(1; 2) \cup [3; \infty)$; <u>*3)* $(-\infty; 1) \cup [3; \infty)$;</u> 4) R; 5) $(2; 3]$.

12. Уравнение $(x - 1)\arccos a = 0$ имеет решения, если

1) $a \in R$; 2) $|a| < 1$; 3) $0 < a < \pi$; <u>*4)* $|a| \leq 1$;</u> 5) $|a| \leq \pi/2$.

13. Уравнения $\frac{3ax}{x-1} = a - 1$ и $\frac{x-1}{3ax} = \frac{1}{a-1}$ равносильны, если

1) $a \neq 0$; 2) $a \neq 1$; 3) $a = 1$, $a = 0$; 4) $a \in \varnothing$; <u>*5)* другие значения a.</u>