Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

ФИПИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
обучающимся
по организации самостоятельной
подготовки к ЕГЭ 2024 года

МАТЕМАТИКА

Москва, 2024

Авторы-составители: И.В. Ященко, А.В. Семенов, П.И. Самсонов

Методические рекомендации предназначены для обучающихся 11 классов, планирующих сдавать ЕГЭ 2024 г. по математике. Они содержат полезную информацию от разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ для организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике базового и профильного уровней. В них указаны темы, на освоение/повторение которых целесообразно обратить особое внимание.

Содержание

Дорогие друзья!

Скоро вам предстоит сдать единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Ваша основная задача – получить аттестат о среднем образовании благодаря хорошей математической подготовке. Подготовка будет эффективной, если вы будете систематически заниматься. Данные рекомендации помогут вам в этом.

Рекомендации по выполнению экзаменационной работы ЕГЭ по математике базового уровня

Экзаменационная работа состоит из 21 задания с кратким ответом базового уровня сложности. На её выполнение отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям с кратким ответом 1–21 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби в бланке ответов № 1.

Задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, а также умения анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

На экзамене разрешается пользоваться только теми справочными материалами, которые выдаются вместе с вариантом контрольных измерительных материалов. При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой. Использовать на экзамене калькулятор нельзя.

Максимальное количество первичных баллов, которое может получить участник экзамена за выполнение всей экзаменационной работы, – 21 балл. За правильное выполнение каждого из заданий 1–21 начисляется 1 первичный балл.

Для прохождения государственной итоговой аттестации по математике необходимо набрать не менее 7 первичных баллов.

При самостоятельной подготовке к экзамену рекомендуется использовать следующую таблицу, включающую все темы и элементы содержания, которые могут быть проверены на едином государственном экзамене по математике (таблица 1). Отметьте, какие темы Вы уже изучили/повторили, а какие ещё предстоит изучить/повторить. Так Вы сможете спланировать свою подготовку к экзамену.

Таблица 1

№ задания	Элементы содержания	Пройдено	Необходимо изучить/ повторить
Алгебра			
1	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		

2	Умения решать текстовые задачи разных типов, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов, умение оценивать размеры объектов окружающего мира		
4	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов		
5	Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий		
6	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
8	Умение проводить доказательные рассуждения		
14	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		
15	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов		
16	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		
19	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
Уравнения и неравенства			
17	Умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения		
18	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства		
19	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
20	Умение решать текстовые задачи разных типов и уравнения		

21	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
Функции			
3	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
7	Умения: оперировать понятиями «функция», «непрерывная функция», «производная»; определять значение функции по значению аргумента; описывать по графику поведение и свойства функции		
Начала математического анализа			
7	Умения оперировать понятиями «функция», «непрерывная функция», «производная»; определять значение функции по значению аргумента; описывать по графику поведение и свойства функции		
Геометрия			
9	Умения использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, оценивать размеры объектов окружающего мира		
10	Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии		
11	Умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы		
12	Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии		
13	Умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы		

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей			
3	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
5	Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий		

Рекомендуем Вам придерживаться следующих этапов индивидуальной подготовки.

1. Определить свой уровень подготовки

Для подготовки к экзамену нужно определить уровень своих знаний и умений. Нужно решить три–пять разных вариантов, соответствующих демонстрационному[1] варианту ЕГЭ базового уровня 2024 г. На выполнение каждого варианта следует отводить не менее 3 часов (на экзамене – 3 часа). Результаты рекомендуем занести в лист достижений, оформленный в виде таблицы, в которой в вертикальных графах представлены номера вариантов, а в строчках – номера заданий, например обозначая правильные ответы знаком «+», а неправильные – знаком «–». В таблице 2 приведена часть листа достижений.

Таблица 2

Лист достижений

Задания	Варианты				
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

В листе достижений будут видны задания, при выполнении которых возникли трудности (знак «–»). Лист достижений позволит определить уровень подготовки и темы, задания по которым Вы решаете всегда правильно, решаете не всегда правильно и не решаете или решаете неверно.

2. Сформулировать цель сдачи экзамена

Для подготовки к экзамену нужно определить цель его сдачи.

Для того чтобы пройти государственную итоговую аттестацию (набрать не менее 7 первичных баллов), достаточно выполнить задания первой половины варианта (задания 1–10).

[1] Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ по математике (базовый уровень), кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике и спецификация контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике (базовый уровень) размещены на сайте ФГБНУ «ФИПИ» в соответствующем разделе или по ссылке: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2>.

Результаты базового ЕГЭ не используются при поступлении в вуз, однако подготовка к сдаче ЕГЭ базового уровня на высокий балл позволит закрепить математические навыки, необходимые в жизни, массовых профессиях, обучении в вузе по специальностям, для которых не требуется ЕГЭ по математике профильного уровня. При такой цели на экзамене необходимо выполнить максимально возможное количество заданий.

3. Выстроить стратегию подготовки к экзамену

Сформулированная верно цель с учётом уровня подготовки позволит спокойно готовиться к экзамену и достичь желаемого результата.

Если цель только сдать экзамен, а уровень подготовки базовый, то нужно тренироваться выполнять задания, которые хорошо получаются, добиваться стабильно верного их решения. При переходе к решению новых задач сначала повторите материал по учебникам, а затем, используя видеоуроки, Гиперматику, переходите к решению задач. Обращайте внимание на правильность понимания Вами вопроса задания, безошибочности проведённых вычислений.

Если цель – успешно учиться в вузе, который не предъявляет специальных требований к уровню математической подготовки абитуриентов, то следует ориентироваться на получение 4 или 5 тестовых баллов при текущем базовом уровне подготовки; нужно верно решать все задания варианта.

Следует уделять особое внимание вдумчивому чтению условия задач и отработке навыков безошибочного выполнения всех арифметических действий. При подготовке к экзамену все вычисления должны выполняться без калькулятора (как на экзамене). Распечатайте справочные материалы, которыми можно пользоваться на экзамене. На черновике нужно записывать выражение, преобразования выражения с использованием законов сложения и умножения, формул сокращённого умножения (не забывайте про справочные материалы) и вычисления в столбик. В самом решении целесообразно указывать порядок действий, записывать подробно приведение дробей к общему знаменателю, а также сложение, вычитание, умножение и деление дробей. После каждого действия полезно делать проверку обратным действием, поскольку самые распространённые ошибки вычислительные. Если допущена ошибка, то ответ получается неверный, и тогда за выполнение задания выставляется 0 баллов.

Для того чтобы набрать не менее 7 первичных баллов, нужно потренироваться решать не менее 10 линий заданий экзаменационного варианта. С помощью листа достижений выявите те задания варианта, которые Вы можете выполнить, Вам понятно их содержание. Нужно совершенствовать навык их решения до получения стабильно верного результата. Затем следует переходить к тем заданиям, выполнение которых вызывает затруднения, и с помощью учебника и пособий попробовать понять причину затруднения. При выполнении таких заданий простая сверка полученного ответа с эталонным не позволит достичь успеха в решении. Нужно учиться их решать, используя для этого учебник и Гиперматику.

При решении каждого задания важно пройти все этапы:

а) внимательно прочитать условие, выделить в тексте ключевые моменты;
б) выполнить вычисления (рассуждения);
в) зафиксировать полученный ответ;
г) проверить правильность ответа, решив обратную задачу, или подставив корни в уравнение, или оценив полученный ответ прикидкой ожидаемого результата, а при решении задачи проверить реалистичность полученного ответа;
д) прочитать ещё раз вопрос в задании и убедиться, что ответ получен именно на него;
е) записать ответ в бланк ответов № 1.

После прохождения всех этапов решения задания должно сформироваться внутреннее убеждение: «Я выполнил(а) задание верно!»

При решении заданий нужно пользоваться справочными материалами.

Оптимальная стратегия подготовки к экзамену – набрать из открытого банка заданий ФИПИ разные типы заданий по 10 линиям, из них на каждый день составлять себе тренировочный вариант, решать каждое задание, выполняя все шаги. Обратите внимание на то, что открытый банк заданий допускает проверку полученного Вами ответа. Отдельно изучайте с помощью Гиперматики решения аналогичных заданий, которые не получились, выполняйте по ним тренировочные задания. Торопиться при решении не нужно! Времени для решения 10 заданий достаточно (180 минут), его хватает и на проверку решения несколько раз, выполняя задание разными способами, и на проверку полученного решения. Справочные материалы могут помочь Вам в решении задач только тогда, когда придёт понимание, в каком случае имеет смысл к ним обращаться. В этих справочных материалах нет таблицы умножения, действий с обыкновенными и десятичными дробями, процентов; это нужно знать, не обращаясь к дополнительным вспомогательным материалам. Решать варианты и задания нужно самостоятельно – без калькулятора, других справочников, Интернета, звонков другу.

Для получения высокого балла нужно учиться решать задания всего варианта.

Оптимальная стратегия подготовки к экзамену – работать тематически, используя задания открытого банка заданий ЕГЭ, размещённого на официальном сайте ФГБНУ «ФИПИ» (https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC), проверенных электронных сервисов, таких как Гиперматика (7.math.ru).

Обязательно уделяйте внимание тренировке навыков безошибочного выполнения заданий, в которых Вы уверены. Отдельно решайте задания по тем темам, которые усвоены не очень твёрдо. Изучение тем, знания по которым минимальны, и проработку соответствующих позиций варианта экзамена разумно исключить из подготовки.

Правильная стратегия подготовки – постепенно добиваться стабильных результатов в определённых темах и заданиях, тогда на экзамене эти задания не покажутся сложными. Лист достижений Вам в этом поможет.

4. Выстроить график подготовки к экзамену

Заниматься математикой нужно постоянно, желательно каждый день, чередуя повторение тем с решением полных или сокращённых вариантов. Каждое занятие должно включать в себя решение задач по трудным темам и тренировочных вариантов. Трудным темам надо уделить больше времени – обратиться к учебнику, видеоурокам, пособиям. В период подготовки к экзамену важно накопить опыт решения разных задач.

Оптимальный график подготовки к экзамену для тех, кто выбирает «сдать экзамен», – набрать из открытых банков типы заданий по 10 позициям, из них на каждый день составлять себе тренировочный вариант, решать каждое задание, выполняя все шаги, засекая время выполнения. Нужно отдельно рассмотреть решение заданий, которые не получились, чтобы вновь решать их через какое-то время.

Оптимальный график подготовки к экзамену для тех, кто выбирает «высокий балл», – составлять из открытых банков или печатных учебных пособий тренировочные варианты и каждый день выполнять не более одного варианта, отдельно решая задания по тем темам, которые усвоены плохо. На каждом занятии нужно решать задания как по алгебре, так и по геометрии, чтобы накапливать опыт решения задач.

5. Совершенствовать свои вычислительные навыки

В процессе подготовки исключите для себя возможность выполнять любые расчёты с помощью технических средств. Более того, нужно сразу для себя принять, что ответом на любое задание может быть целое число или конечная десятичная дробь.

Если, решая задачу, получился ответ $\frac{1}{3}$, то это сигнал об ошибке в решении, а если получена дробь $\frac{1}{8}$, то её нужно представить в виде дроби десятичной 0,125.

6. Ориентироваться на здравый смысл ответа к задаче

Все задачи экзамена ЕГЭ по математике базового уровня имеют реалистичный сюжет. Поэтому, получив число, которое является претендентом на ответ, не спешите его записывать сразу в бланк ответов. Задержитесь на несколько мгновений, оцените найденное Вами значение с позиций здравого смысла.

Например, в задаче нужно было найти количество спасательных шлюпок по 50 мест в каждой для 260 человек, находящихся на корабле. Если разделить 260 на 50, то получится 5,2. Однако ответом будет не число 5 как результат округления, а число 6, поскольку если на борту будет 5 шлюпок по 50 мест, то для 10 человек уже мест не будет.

7. Проверять все результаты в задачах на установление соответствия элементов двух информационных рядов

В задачах 2, 7, 18 участнику экзамена необходимо установить соответствие между утверждениями и значениями из двух столбцов. Очень часто, когда три из четырёх соответствий установлены, четвёртое вносят в ответ как само собой разумеющееся. Это неверный подход.

Если в установлении первых трёх соответствий была допущена ошибка, то при проверке последнего – четвёртого она может быть обнаружена, а если проверка не была осуществлена, то и ошибка окажется невыявленной. Поэтому, очень важно проверять правильность всех устанавливаемых соответствий.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 1**.

Пример 1.1

В летнем лагере 150 детей и 16 воспитателей. В одном автобусе можно перевозить не больше 20 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: 9.

Пример 1.2

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 900 рублей, а стоимость одного номера журнала в киоске – 44 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она потратила бы, если бы подписалась на журнал?

Ответ: 200.

Пример 1.3

Теплоход рассчитан на 760 пассажиров и 35 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее количество шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: 14.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 2**.

Пример 2.1

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) длительность звучания одной песни	1) 0,1 секунды
Б) длительность полнометражного художественного фильма	2) 365 суток
В) продолжительность вспышки фотоаппарата	3) 105 минут
Г) время одного оборота Земли вокруг Солнца	4) 3,5 минуты

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 4312.

Пример 2.2

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) высота потолка в комнате	1) 102 м
Б) длина реки Оби	2) 2,8 м
В) высота Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге	3) 54 см
Г) длина тела кошки	4) 3650 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 2413.

Пример 2.3

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса взрослого бегемота	1) 50 г
Б) масса активного вещества в таблетке	2) 3 т
В) масса куриного яйца	3) 2,5 мг
Г) масса детской коляски	4) 14 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

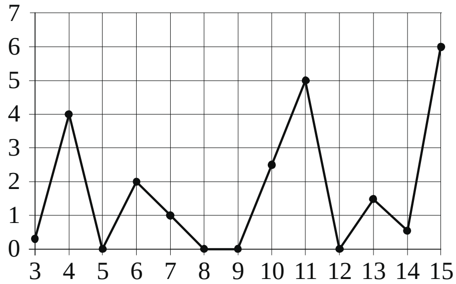
А	Б	В	Г

Ответ: 2314.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 3**.

Пример 3.1

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указаны числа месяца; по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.

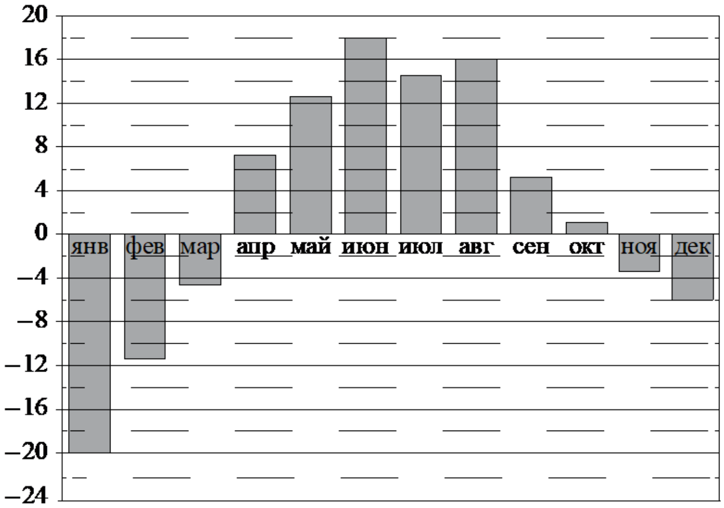


Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков в Казани за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: 6.

Пример 3.2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указаны месяцы; по вертикали — температура в градусах Цельсия.

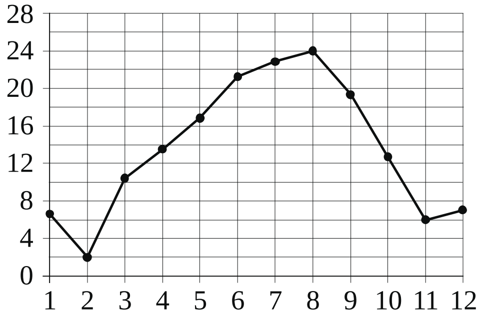


Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в Екатеринбурге (Свердловске) в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: 18.

Пример 3.3

На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указаны номера месяцев; по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку, в каком месяце среднемесячная температура в Сочи была наименьшей за данный период. В ответе запишите номер этого месяца.

Ответ: 2.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 4**.

Пример 4.1

Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите R (в омах), если $P = 144$ Вт и $I = 6$ А.

Ответ: 4.

Пример 4.2

Закон Гука можно записать в виде $F = kx$, где F — сила (в ньютонах), с которой растягивают пружину, x — абсолютное удлинение пружины (в метрах), а k — коэффициент упругости (в Н/м). Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $F = 80$ Н и $k = 5$ Н/м.

Ответ: 16.

Пример 4.3

Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2Rt$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 2$ с, $I = 6$ А и $R = 5$ Ом.

Ответ: 360.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 5**.

Пример 5.1

В чемпионате по гимнастике участвуют 64 спортсменки: 20 из Японии, 28 из Китая, остальные — из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Ответ: 0,25.

Пример 5.2

В фирме такси в наличии 15 легковых автомобилей: 9 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: 0,4.

Пример 5.3

Фабрика выпускает сумки. В среднем из 120 сумок, поступивших в продажу, 6 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется со скрытым дефектом.

Ответ: 0,05.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 6**.

Пример 6.1

В городском парке работает 5 аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся 6 видов билетов, каждый из которых на один или два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	«Весёлый тир», карусель	400
2	«Весёлый тир», «Ромашка»	550
3	Карусель	100
4	Автодром, «Ромашка»	450
5	Колесо обозрения, автодром	200
6	Карусель, колесо обозрения	400

Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и потратить не больше 900 рублей? В ответе запишите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 235.

Пример 6.2

Турист подбирает экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

Номер экскурсии	Посещаемые объекты	Стоимость (руб.)
1	Загородный дворец, крепость	250
2	Крепость	100
3	Парк, музей живописи	390
4	Загородный дворец	200
5	Музей живописи	150
6	Загородный дворец, парк	320

Пользуясь таблицей, подберите набор экскурсий так, чтобы турист посетил четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала 650 рублей. В ответе запишите какой-нибудь один набор номеров экскурсий без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 13; 256.

Пример 6.3

Путешественник из Москвы хочет посетить четыре города Золотого кольца России: Владимир, Ярославль, Суздаль и Ростов Великий. Турагентство предлагает маршруты с посещением некоторых городов Золотого кольца. Сведения о стоимости билетов и маршрутах представлены в таблице.

Номер маршрута	Посещаемые города	Стоимость (руб.)
1	Суздаль, Ярославль, Владимир	3900
2	Ростов Великий, Владимир	2400
3	Ярославль, Владимир	2100
4	Суздаль	1650
5	Ростов Великий, Суздаль	2700
6	Ярославль, Ростов Великий	2350

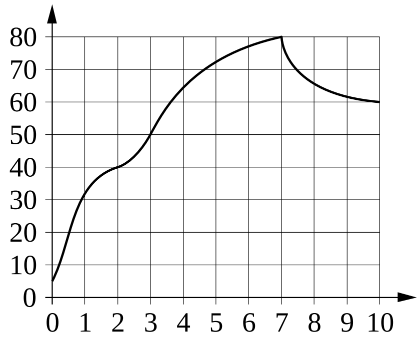
Какие маршруты должен выбрать путешественник, чтобы побывать во всех четырёх городах и потратить меньше 5000 рублей? В ответе запишите какой-нибудь один набор номеров маршрутов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 35.

Практико-ориентированные задания **линии 7** – о свойствах функций. В одних задачах может быть предложено исследование элементарных свойств функций по её графику, а в других – исследование, связанное с понятием производной и с касательной к графику функции.

Пример 7.1

На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя; на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику температуры на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0–1 мин.	1) Температура падала.
Б) 2–3 мин.	2) Самый быстрый рост температуры.
В) 4–6 мин.	3) Температура росла и на всём интервале была выше 60 °С.
Г) 7–9 мин.	4) Температура находилась в пределах от 40°С до 50°С.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

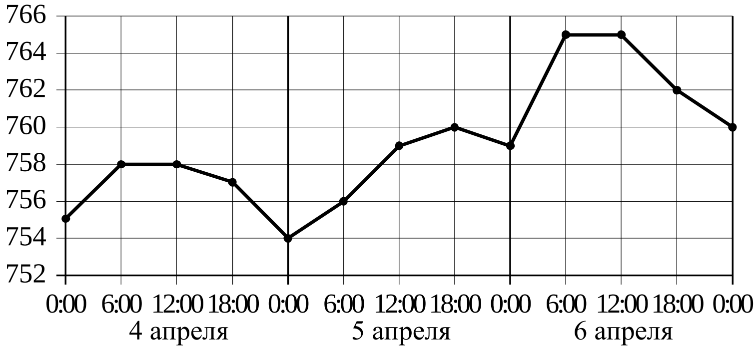
Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 2431.

Пример 7.2

На рисунке точками показано атмосферное давление в некотором городе на протяжении трёх суток, с 4 по 6 апреля 2013 года. В течение суток давление измерялось 4 раза: в 00:00, 06:00, 12:00 и 18:00. По горизонтали указаны время и дата; по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в этом городе в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) утро 4 апреля (с 6 до 12 часов)	1) Давление упало.
Б) утро 5 апреля (с 6 до 12 часов)	2) Давление не изменилось и было выше 764 мм рт. ст.
В) утро 6 апреля (с 6 до 12 часов)	3) Давление не изменилось и было ниже 760 мм рт. ст.
Г) день 6 апреля (с 12 до 18 часов)	4) давление выросло.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

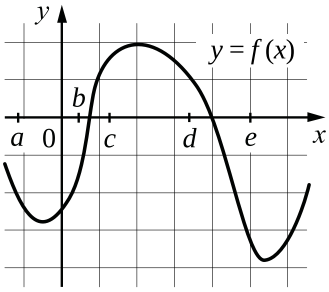
Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 3421.

Пример 7.3

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Числа a, b, c, d и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции.



ИНТЕРВАЛЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) $(a; b)$	1) значение функции положительно в каждой точке интервала
Б) $(b; c)$	2) значение функции отрицательно в каждой точке интервала
В) $(c; d)$	3) функция возрастает на интервале
Г) $(d; e)$	4) функция убывает на интервале

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 2314

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 8**.

Пример 8.1

На соревнованиях сборная России завоевала медалей больше, чем сборная Канады, сборная Канады — больше, чем сборная Германии, а сборная Норвегии — меньше, чем сборная Канады. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Сборная Германии завоевала больше медалей, чем сборная России.
2) Из названных сборных команда Канады заняла второе место по количеству медалей.
3) Среди названных сборных есть три, завоевавшие равное количество медалей.
4) Сборная России завоевала больше медалей, чем каждая из остальных трёх сборных.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 24.

Пример 8.2

При взвешивании животных в зоопарке выяснилось, что жираф тяжелее верблюда, верблюд тяжелее тигра, а леопард легче верблюда. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Жираф тяжелее леопарда.
2) Жираф самый тяжёлый из всех этих животных.
3) Жираф легче тигра.
4) Леопард тяжелее верблюда.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 12.

Пример 8.3

Школа приобрела стол, доску, магнитофон и принтер. Известно, что принтер дороже магнитофона, а доска дешевле магнитофона и дешевле стола. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Магнитофон дешевле доски.
2) Доска самая дешёвая из покупок.
3) Принтер и доска стоят одинаково.
4) Принтер дороже доски.

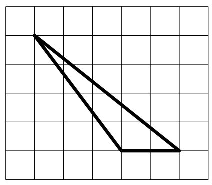
В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 24.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 9**.

Пример 9.1

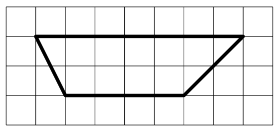
План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 4.

Пример 9.2

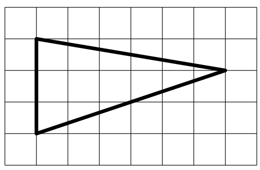
План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 11.

Пример 9.3

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



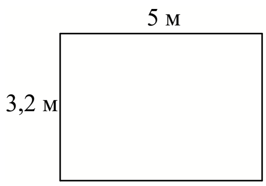
Ответ: 9.

Рассмотрим линии, на которые необходимо обратить особое внимание при подготовке к экзамену.

Практико-ориентированные задания по геометрии **линии 10** на вид не представляют особой сложности, но необходимо быть внимательным при работе с геометрическими величинами, уделять особое внимание размерности, аккуратно проводить выкладки.

Пример 10.1

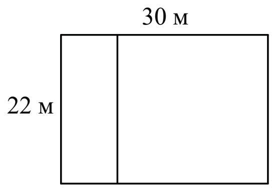
На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 16,3 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3,2 м, а длина — 5 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от площади, указанной на плане?



Ответ: 0,3.

Пример 10.2

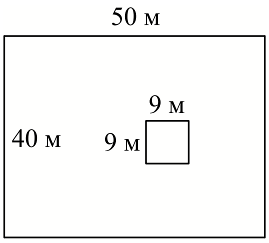
Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 22 м и 30 м. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите суммарную длину забора в метрах.



Ответ: 126.

Пример 10.3

Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 50 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



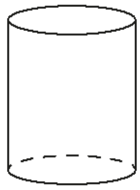
Ответ: 1919.

Рисунок в геометрической задаче нужно воспринимать как изображение взаимного расположения элементов, но нельзя относиться к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. При подготовке к экзамену можно сделать свой рисунок, отметив все известные элементы, и уже с использованием этого рисунка решать задачу – находить площадь, сумму длин, и только потом отвечать на вопрос задания.

Геометрические задачи **линий 11** и **13** на расчёт элемента фигуры в пространстве представляют определённые трудности для участников экзамена базового уровня. Тем не менее, даже если участник экзамена испытывал трудности при изучении систематического курса стереометрии, отработка решения указанных заданий с использованием открытого банка и ресурса Гиперматика позволит освоить необходимые, в том числе для реальной жизни, пространственные навыки.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 11**.

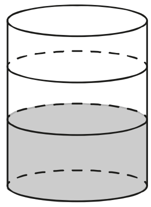
Пример 11.1



Высота бака цилиндрической формы равна 40 см, а площадь его основания равна 150 квадратным сантиметрам. Чему равен объём этого бака (в литрах)? В одном литре — 1000 кубических сантиметров.

Ответ: 6.

Пример 11.2

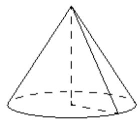


В бак цилиндрической формы, площадь основания которого равна 80 квадратным сантиметрам, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 10 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

Ответ: 800.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 13**.

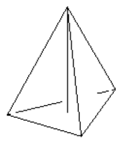
Пример 13.1



Объём конуса равен 25π, а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: 5.

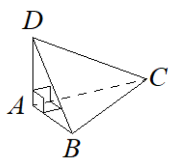
Пример 13.2



Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Найдите объём этой пирамиды.

Ответ: 9.

Пример 13.3



В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB, AC и AD взаимно перпендикулярны. Найдите объём этой пирамиды, если $AB = 3$, $AC = 18$ и $AD = 7$.

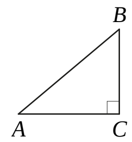
Ответ: 0,25.

В трёхмерном пространстве объёмы визуально сравнить труднее, чем площади на плоскости. Задачи нужно решать с использованием формул из справочных материалов.

Геометрические задачи **линии 12** на различные соотношения в треугольнике представляют трудности для участников экзамена базового уровня. Рассмотрим примеры заданий, связанных с прямоугольным треугольником.

Пример 12.1

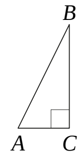
В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = \sqrt{29}$, $BC = 2$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



Ответ: 0,4.

Пример 12.2

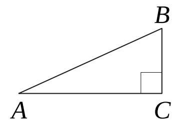
В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 13$, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите длину стороны AC.



Ответ: 5.

Пример 12.3

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 8$, $AC = 2\sqrt{15}$. Найдите $\cos B$.



Ответ: 0,25.

К решению задач о прямоугольных треугольниках можно применить следующий алгоритм.

1. Решая прямоугольный треугольник, последовательно находить стороны и углы, которые можно найти непосредственно из условия или из найденных ранее.
2. Найдя все стороны и углы, нужно выписать в ответ нужный элемент.

Задачи можно решать с использованием формул справочных материалов – теоремы Пифагора и определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике.

Задания **линии 14**. Нахождение значения выражения. При подготовке к решению указанных задач следует обратить внимание на повторение понятий обыкновенной и десятичной дробей и грамотные выполнение вычислений, избегая устного счёта.

Пример 14.1

Найдите значение выражения $\frac{1}{3} \cdot 3{,}6 - 1$.

Ответ: 0,2.

Пример 14.2

Найдите значение выражения $0{,}35 : \frac{7}{3} + 2$.

Ответ: 2, 15.

Задания **линии 15**. Решение простейших практико-ориентированных текстовых задач. При решении указанных задач важно не просто выполнять действия, а также проверять полученный ответ на «здравый смысл», что позволит избежать ошибок.

Пример 15.1
Налог на доходы составляет 13 % заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 20 000 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 17400.

Пример 15.2
В городе 180 000 жителей, причём 30 % из них — пенсионеры. Сколько пенсионеров в этом городе?

Ответ: 54000.

Пример 15.3
Ежемесячная плата за телефон составляет 300 рублей. В следующем году она увеличится на 6 %. Сколько рублей будет составлять ежемесячная плата за телефон в следующем году?

Ответ: 318.

Задания **линии 16**. Нахождение значений рациональных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических и показательных выражений.

Пример 16.1
Найдите значение выражения $6^{-3}\cdot\dfrac{6^6}{6^2}$.

Ответ: 6.

Пример 16.2
Найдите значение выражения $\dfrac{1{,}6\cdot10^2}{8\cdot10^{-1}}$.

Ответ: 200.

Пример 16.3
Найдите значение выражения $\dfrac{3^{-10}\cdot3^5}{3^{-7}}$.

Ответ: 9.

Задания **линии 17**. Решение линейных, квадратных, рациональных, показательных, логарифмических уравнений.

Пример 17.1

Решите уравнение $x^2 = 3x$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

Ответ: 3.

Пример 17.2

Решите уравнение $x^2 = 7x + 8$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.

Ответ: –1.

Пример 17.3

Решите уравнение $x^2 = 25$.

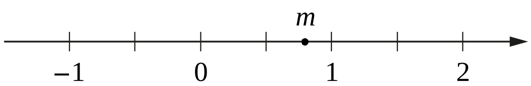
Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

Ответ: 5.

В заданиях **линии 18** нужно установить соответствие между точками координатной прямой и рациональными, иррациональными числами. На этой же позиции может быть задание на решение рациональных, показательных, логарифмических неравенств. При подготовке рекомендуется не только решать задания, аналогичные экзаменационным, но и повторять решения простейших неравенств всех типов.

Пример 18.1

На координатной прямой отмечено число m.



Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $4 - m$	1) $[-3; -2]$
Б) m^2	2) $[0; 1]$
В) $\sqrt{m+1}$	3) $[1; 2]$
Г) $-\dfrac{2}{m}$	4) $[3; 4]$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

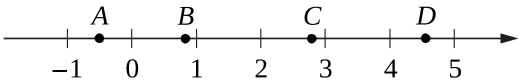
Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 4231.

Пример 18.2

На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $\log_4 0,5$

2) $\frac{50}{11}$

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{0,68}$

В таблице для каждой точки укажите номер соответствующего числа.

Ответ:

A	B	C	D

Ответ:1432.

Пример 18.3

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $2^{-x+1} < 0,5$

Б) $\frac{(x-5)^2}{x-4} < 0$

В) $\log_4 x > 1$

Г) $(x-4)(x-2) < 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(4; +\infty)$

2) $(2; 4)$

3) $(-\infty; 4)$

4) $(2; +\infty)$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 4312.

В заданиях **линии 20** проверяется умение решать текстовые задачи. Несмотря на то что в задании требуется лишь привести краткий ответ, при решении данной задачи как при подготовке, так и на экзамене рекомендуется полностью провести решение задачи на черновике, включая составление модели, решение полученного уравнения, проверку ответа.

<u>Пример 20.1</u>
Первый час автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие два часа — со скоростью 75 км/ч, а затем два часа — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 66.

<u>Пример 20.2</u>
Расстояние между городами A и B равно 360 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 55 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 250 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 50.

<u>Пример 20.3</u>
Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью 30 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 45.

Задачи **линий 19** и **21** требуют организованного перебора вариантов или логического анализа. Эти задания проверяют умение работать с числами, записанными по разрядам, знание признаков делимости.

<u>Пример 19.1</u>
Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 6840; 6480; 4860; 4680; 8640; 8460.

<u>Пример 19.2</u>
Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 2 и 0 и делится на 24. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 222000; 220200; 202200.

<u>Пример 19.3</u>
Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 1152; 1512; 5112.

Задание линии 19 творческое, конструктивное, требующее не столько фантазии, сколько тщательного системного подбора, основанного на владении свойствами целых чисел. Если не использовать алгебраические соображения, то одно какое-нибудь число, удовлетворяющее всем условиям, можно найти за 5–10 минут простым перебором. Нужно обращать внимание на умение выполнять организованный, последовательный перебор вариантов, а позже – перебор условий, которым должно удовлетворять число-кандидат.

Полученное число, прежде чем записать в ответ, целесообразно ещё раз проверить, удовлетворяет ли оно всем требованиям, указанным в условии задачи.

Задание **линии 21** – интересная задача на сообразительность и логику.

<u>Пример 21.1</u>

В таблице три столбца и несколько строк. В каждую клетку таблицы вписали по натуральному числу так, чтобы сумма всех чисел в первом столбце была равна 127, во втором — 136, в третьем — 146, а сумма чисел в каждой строке была больше 17, но меньше 20. Сколько всего строк в таблице?

Ответ: 22.

<u>Пример 21.2</u>

На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цветов. Если распилить палку по красным линиям, получится 9 кусков; если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 6 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Ответ: 20.

<u>Пример 21.3</u>

Список заданий викторины состоял из 40 вопросов. За каждый правильный ответ участник получал 9 очков, за неправильный ответ с него списывали 11 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал участник, набравший 171 очко, если известно, что, по крайней мере, один раз он ошибся?

Ответ: 30.

Для успешного выполнения этих заданий требуется умение пробовать различные пути решения, которое вырабатывается при решении задач углублённого уровня на протяжении нескольких лет обучения, а также требуется внимательно прочитать условие задачи и провести организованный перебор вариантов, обращая внимание на проверку полученного ответа.

Желаем успеха на экзамене!

Рекомендации по выполнению экзаменационной работы ЕГЭ по математике профильного уровня

КИМ ЕГЭ 2024 г. по математике профильного уровня состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Все линии заданий преемственны по отношению к предыдущей экзаменационной модели.

Рекомендуем Вам придерживаться следующих этапов индивидуальной подготовки.

1. Определение своего уровня подготовки

Для подготовки к экзамену нужно определить уровень своих знаний и умений. Нужно решить, на какой результат экзамена Вы рассчитываете, и понять, соответствует ли ему уровень Вашей подготовки. Попробуйте решить три–пять, из числа размещённых на сайте ФИПИ открытых и демонстрационного, вариантов; посмотрите, какие задачи получается решить легко, в решении каких возникают трудности, а решение каких оказалось возможным только после ознакомления с критериями.

Начните подготовку с решения тех задач, которые получаются лучше всего, для этого Вы можете использовать открытый банк заданий ФИПИ и Гиперматику. После повторения соответствующих приемов и методов решения задач по учебнику, рассмотрения решения задач на платформе Гиперматика, постепенно включайте в свои занятия решение тех задач, которые раньше вызвали у Вас затруднения. Обращайте внимание на ключевые этапы решения задачи, которые позволили получить верный результат, выделяйте для себя те подходы, которые оказались эффективными.

Каждая задача может быть решена разными методами, это может Вам помочь не только в решении новых и незнакомых задач, но и в выполнении проверки полученного решения и ответа.

2. Внимание к задачам, которые получается верно решать

Статистика результатов экзамена свидетельствует об очень досадном явлении. Участник ЕГЭ по математике профильного уровня получает максимальное количество первичных баллов за каждую задачу части 2, но 100 баллов в итоге у него нет, потому что он допустил ошибку в двух–трёх задачах части 1.

Парадокс, но решивший верно последнюю задачу в варианте допускает арифметическую ошибку в первой задаче. Вы должны помнить, что любая верно решённая задача приносит баллы, в том числе и из части 1 экзамена. Уделяйте внимание задачам, которые хорошо получается решать, совершенствуйте навык их решения. Этот же подход позволит сэкономить время на решение других содержательных задач.

3. Достоверный источник заданий для тренировки

Доверяйте только достоверному источнику заданий, из которого Вы выбираете задания для своей подготовки. Повторение, систематизация и обобщение знаний наиболее результативны, позволяют правильно выявить дефициты в подготовке к экзамену, если все задания соответствуют требованиям этого экзамена. На сайте ФИПИ размещен открытый банк заданий ЕГЭ по математике профильного уровня, из которого формируется часть 1 варианта экзамена. Помочь сориентироваться в нём призваны «Навигатор подготовки» и Гиперматика.

Кроме того, в открытом банке заданий ФИПИ представлены задачи из части 2 экзамена, которые были ранее использованы при проведении экзамена. Они помогут Вам оценить свой уровень подготовки, составить соответствующий тренажёр, решить несколько типовых заданий, совершенствовать часто встречающиеся методы решения, получить уверенность в их посильности.

4. Тематическое повторение при подготовке к экзамену

Не увлекайтесь решением тренировочных вариантов ЕГЭ по математике профильного уровня. Решение варианта может помочь выстроить стратегию в последовательности решаемых задач, целесообразную именно для Вас, в планировании времени на экзамене, научиться сосредоточиваться и не отвлекаться при решении задач.

Для текущей подготовки правильно ориентироваться на тематическое повторение. Например, логарифмическая функция и её свойства могут быть представлены в следующих заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня: 6 (решить уравнение), 7 (найти значение выражения), 9 (найти значение заданной величины), 11 (найти значение функции), 12 (исследовать функцию) и 15 (решить неравенство). Таким образом, если повторение будет иметь тематический характер, то оно обеспечит универсальность в подготовке к экзамену.

Тематическое повторение может быть, например, таким.

Таблица 3

Тема	Номер задания в соответствии с демонстрационным вариантом ЕГЭ–2024 по математике профильного уровня
Показательная функция и её свойства	6, 7, 9, 11, 12, 15
Логарифмическая функция и её свойства	6, 7, 9, 11, 12, 15
Тригонометрические функции и их свойства	6, 7, 9, 11, 12, 13
Иррациональные выражения	6, 7, 9, 11, 12
Теория вероятностей	4, 5
Исследование функций	8, 12
Задачи по геометрии	1, 2, 3
Решение задач на составление уравнений	10

Для повторения, обобщения и систематизации знаний разумно решать сокращенные тренировочные варианты по пять–семь заданий (из которых одна–две задачи из части 2).

5. Непрерывное совершенствование вычислительных навыков

На экзамене нельзя использовать калькулятор или любое другое техническое средство, упрощающее или убыстряющее вычисления, поэтому ни на каком из занятий у Вас не должно быть соблазна им воспользоваться. Отложите калькулятор в сторону. Все вычисления выполняйте на листе бумаге (черновике).

При этом совершенствуйте технику проведения вычислений. Не спешите найти числовой результат сразу перемножая, деля или складывая числа. Спрогнозируйте последовательность необходимых арифметических действий на несколько шагов вперед. Возможно, для решения задачи и не потребуется проведение трудоёмких подсчётов.

Рассмотрим в качестве примера такую **задачу**. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}}$ = 15 °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,3 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}}$ = 90 °С до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{в}}-T_{\text{п}}}{T-T_{\text{п}}}$, где $c=4200\,\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{с}}$ – теплоёмкость воды, $\gamma=28\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{с}}$ – коэффициент теплообмена, а α = 1,6 – постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 144 м.

После анализа условия задачи и выполнения подстановки указанных значений в закон зависимости будет получено уравнение относительно T:

$$144=1,6\cdot\frac{4200\cdot0,3}{28}\cdot\log_2\frac{90-15}{T-15}.$$

Обратим внимание на то, что сначала можно выполнить преобразование, ведущее к арифметическим действиям с целыми числами, и упростить выражение под знаком логарифма

$$144=\frac{16\cdot42\cdot3}{28}\log_2\frac{75}{T-15}.$$

Следующим шагом можно сократить дробь (как коэффициент перед логарифмом) на 7 и на 4

$$144=4\cdot6\cdot3\cdot\log_2\frac{75}{T-15}.$$

Теперь удобно обе части полученного уравнения разделить последовательно на числа 12 и 6:

$$12=6\cdot\log_2\frac{75}{T-15};$$

$$2=\log_2\frac{75}{T-15}.$$

Далее, после определения логарифма числа перейдём к решению уравнения с использованием свойства пропорции:

$$\frac{75}{T-15}=4,\ 4\cdot\left(T-15\right)=75,\ 4T=135,\ T=33{,}75.$$

Спланированная последовательность действий позволила не прибегать к трудоёмким вычислениям и решить задачу.

6. Использование преимущества разных подходов к решению одной и той же задачи

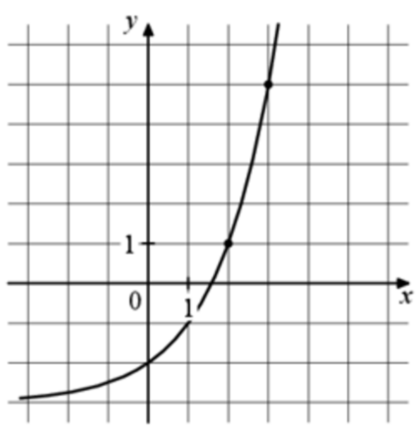
Одна и та же математическая задача может быть решена разными способами. Это обстоятельство является хорошим помощником участнику экзамена. С одной стороны, предоставляется возможность, решив задачу по-разному, проверить верность полученного результата. С другой стороны, знание разных способов решения позволяет выбирать для конкретной задачи самый рациональный и экономить время, отведённое на решение всех экзаменационных задач. Кроме того, при встрече с незнакомой задачей появляется возможность попробовать разные подходы к решению.

Например, если предложена задача найти значение выражения $\frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}-\frac{6\sqrt{x}}{x}+3x-2$ при $x=3$, то её можно решить разными способами. Можно сразу выполнить подстановку числа 3 вместо переменной x и выполнять далее преобразования числового выражения. Можно предварительно привести обе дроби к общему знаменателю x. Однако можно поступить иначе: сократить вторую дробь и уже после этого привести обе дроби к общему знаменателю и в завершении всех преобразований выполнить подстановку заданного значения переменной:

$$\frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}-\frac{6\sqrt{x}}{x}+3x-2=\frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}-\frac{6}{\sqrt{x}}+3x-2=\frac{11\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+3x-2=11+3x-2=$$
$$=9+3x;\ 9+3\cdot 3=18.$$

Такое решение показывает, что предложенная задача допускает простой подход в её решении, на этапе подготовке к экзамену разумно уделять внимание наиболее рациональным способам решения задач. На экзамене же это не имеет значения; важно, чтобы задача была верно решена.

Рассмотрим ещё один пример. По заданному на рисунке графику функции $f\left(x\right)=a^{x}+b$ необходимо найти значение $f\left(4\right)$.



Если придерживаться прямолинейного подхода решения задачи, то координаты (2; 1) и (3; 5) «выделенных» на графике функции точек необходимо поставить в функцию и предварительно решить составленную систему уравнений $\begin{cases} a^2+b=1, \\ a^3+b=5. \end{cases}$ Однако для её решения придётся решать уравнение третьей степени, что не так-то просто. Между тем если проанализировать график заданной функции, то можно найти другие, более удобные точки — (0; –2), (1; – 1), которые ему принадлежат, и подстановка координат которых приведёт к решению существенно более простой системы уравнений: $\begin{cases} 1+b=-2, \\ a^1+b=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} b=-3, \\ a=2. \end{cases}$ Откуда: $f(4)=2^4-3=13.$ При этом знание координат точек графика функции (2; 1) и (3; 5) помогает проверить, что функция $f(x)=2^x-3$ найдена верна.

7. Проверка полученного ответа

Получив ответ для предложенной задачи, не спешите сразу вносить его в бланк ответов. Подумайте, как проверить его, как убедиться, что задача решена верно. Если решали уравнение, то можно выполнить подстановку найденного корня; если решали задачу на движение, то помните, что скорость пешехода не может быть больше скорости поезда.

Интерпретация и оценка полученного результата очень важны в задачах, где требуется найти наибольшее значение, – оно должно достигаться. Например, если в задаче нужно найти наибольшее время, в течение которого электроприбор может нагреваться, и получены два положительных значения, то, перед тем как записать ответ, необходимо ещё раз проанализировать всю информацию, содержащуюся в условии задачи.

Обратимся для примера к задаче из открытого банка заданий. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t – время в минутах, $T_0=1400$ К, $a=-10$ К/мин.^{2}, $b=200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Обычно путь решения состоит в том, что участник экзамена составит уравнение $1760=1400+200t-10t^2$. Из него будет получено приведённое квадратное уравнение $t^2-20t+36=0,$ корень которого $t=18$ или $t=2.$

Поставленный в задаче вопрос требует найти наибольшее время, и возникает предпосылка для получения неверного ответа – числа 18, так как из двух найденных корней: 2 и 18 – число 18 наибольшее. Между тем этот ответ неверен в силу физического смысла задачи. В ситуации непрерывного нагревания 2 – критичное значение, после которого прибор нужно будет уже выключать. Поэтому правильный ответ – число 2. А наибольшее время в данной ситуации означает, что прибор можно выключить и раньше, но через 2 минуты его выключить следует обязательно, иначе он сломается.

Рекомендации по выполнению заданий части 1 экзаменационной работы по математике профильного уровня

Часть 1 содержит 7 заданий базового уровня (задания 1–4, 6–8) и 5 заданий повышенного уровня (задания 5, 9–12), в которых ответ необходимо записать в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Они проверяют вычислительные и логические умения и практические навыки применения математических знаний в повседневных ситуациях, в том числе умения использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам курса математики: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Геометрия

Задания **линий 1–3** проверяют умение решать геометрические задачи, наиболее трудные для выпускников. Ниже приведены примеры заданий базового уровня с кратким ответом линий 1–3.

Задание 1

Элементы содержания

Треугольник.
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат.
Трапеция.
Окружность и круг.
Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.
Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.
Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.
Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.

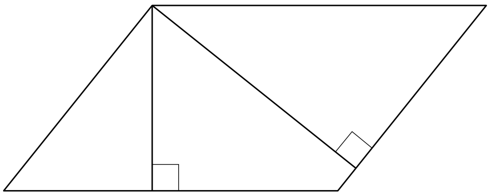
Проверяемые умения

Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

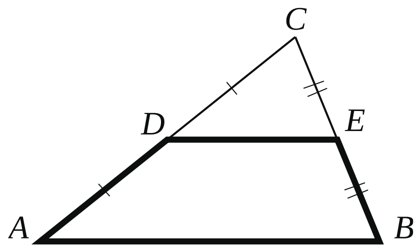
Пример 1.1

Стороны параллелограмма равны 18 и 20. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 10. Найдите длину высоты, опущенной на бо́льшую сторону параллелограмма.



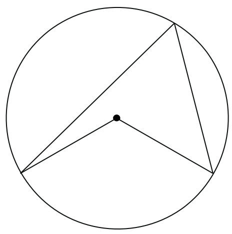
Пример 1.2

Площадь треугольника ABC равна 60, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



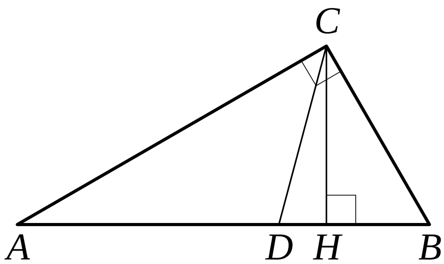
Пример 1.3

Найдите величину центрального угла, если он на 69° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



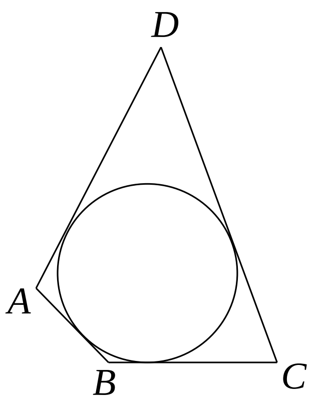
Пример 1.4

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 75°. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



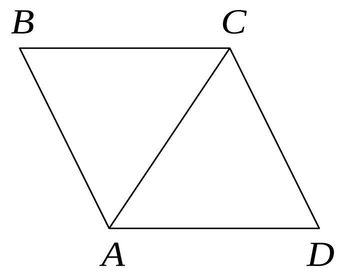
Пример 1.5

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 10$ и $CD = 37$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Пример 1.6

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Задание 2

Элементы содержания

Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве.
Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число.
Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

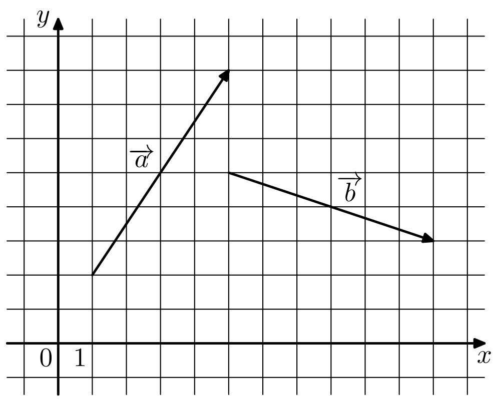
Проверяемые умения

Определять координаты точки; проводить операции над векторами; вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

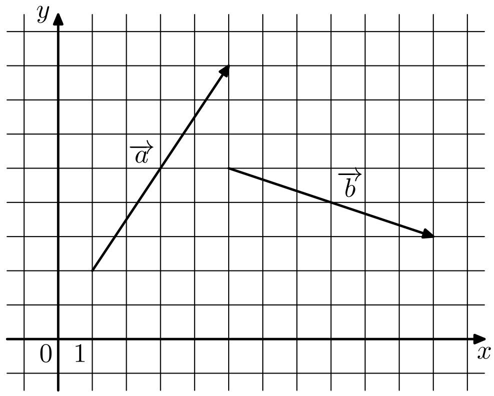
Пример 2.1

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Пример 2.2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a}+3\vec{b}$.



Пример 2.3

Даны векторы $\vec{a}(-6;4)$ и $\vec{b}(2;5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Пример 2.4

Даны векторы $\vec{a}(2;0)$, $\vec{b}(-19;6)$ и $\vec{c}(-4;6)$. Найдите длину вектора $7\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Пример 2.5

Даны векторы $\vec{a}(11;-8)$, $\vec{b}(-7;9)$ и $\vec{c}(-5;9)$. Найдите скалярное произведение $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Пример 2.6

Длина вектора $\vec{a}$ равна $14\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135°$, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно -28. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Задание 3

Элементы содержания

Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма.
Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида.
Сечения куба, призмы, пирамиды.
Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.
Шар и сфера, их сечения.
Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями.
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы.
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

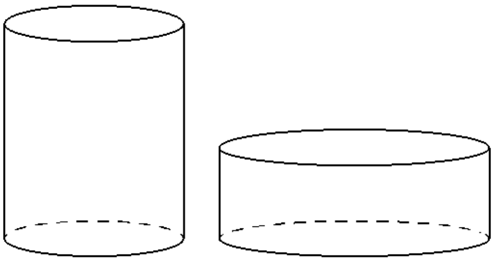
Проверяемые умения

Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов), использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

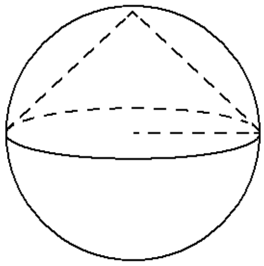
Пример 3.1

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



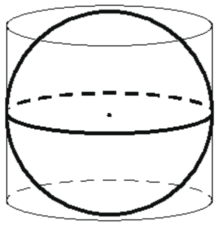
Пример 3.2

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.



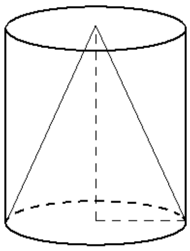
Пример 3.3

Цилиндр, объём которого равен 18, описан около шара. Найдите объём шара.



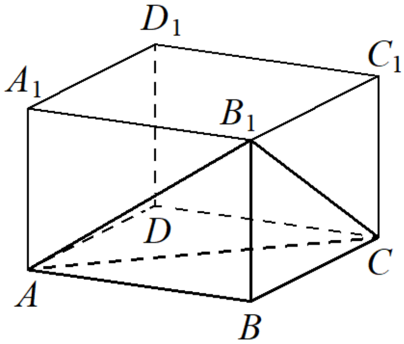
Пример 3.4

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 30. Найдите объём конуса.



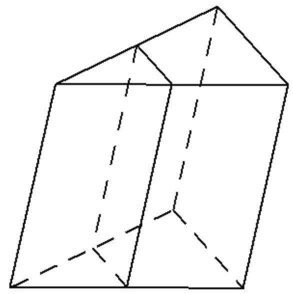
Пример 3.5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Пример 3.6

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Вероятность и статистика

Задания **линий 4** и **5** проверяют сформированность умения находить вероятность события. Ниже приведены примеры задания базового уровня линии 4 и задания повышенного уровня линии 5.

Задание 4

Элементы содержания

Вероятности событий.

Проверяемые умения

Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 4.1

В сборнике билетов по физике 20 билетов, в двух из них встречается вопрос по теме «Термодинамика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Термодинамика».

Пример 4.2

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Японии, 13 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Пример 4.3

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 9 из Португалии, 7 из Финляндии и 4 из Болгарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым окажется доклад учёного из Португалии.

Пример 4.4

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже, чем $36{,}8\,°\mathrm{C}$, равна 0,83. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36{,}8\,°\mathrm{C}$ или выше.

Пример 4.5
В группе туристов 20 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В., входящий в состав группы, полетит первым рейсом вертолёта.

Пример 4.6
В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Задание 5

Элементы содержания

Вероятности событий.

Проверяемые умения

Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 5.1
Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Пример 5.2
Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Пример 5.3
В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что в то же время чай закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что чай закончится одновременно в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется и в первом, и во втором автоматах.

Пример 5.4

Игральную кость бросили дважды. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».

Пример 5.5

В коробке 6 синих, 9 красных и 10 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Пример 5.6

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 6–12** проверяют сформированность умения решать алгебраические задания. Ниже приведены примеры задания базового уровня линий 6–8 и задания повышенного уровня линий 9–12.

Задание 6

Элементы содержания

Квадратные уравнения.
Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.

Проверяемые умения

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 6.1

Найдите корень уравнения $3^{x+2}=81$.

Пример 6.2

Найдите корень уравнения $4^{x-3}=64$.

Пример 6.3

Найдите корень уравнения $\sqrt{9x-47}=4$.

Пример 6.4
Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49}=10$.

Пример 6.5
Найдите корень уравнения $\log_5(8-x)=\log_5 2$.

Пример 6.6
Найдите корень уравнения $\log_7(1-x)=\log_7 5$.

Пример 6.7
Найдите корень уравнения $(x-5)^3=64$.

Пример 6.8
Найдите корень уравнения $(x+4)^3=-125$.

Задание 7

Элементы содержания

Степень с натуральным показателем.
Дроби, проценты, рациональные числа.
Степень с целым показателем.
Корень степени $n > 1$ и его свойства.
Степень с рациональным показателем и её свойства.
Свойства степени с действительным показателем.
Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.
Основные тригонометрические тождества.
Формулы приведения.
Синус и косинус двойного угла.
Логарифм числа.
Логарифм произведения, частного, степени.
Преобразования выражений, включающих арифметические операции.
Преобразования выражений, включающих операцию возведения степень.
Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени.
Преобразования тригонометрических выражений.
Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.
Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 7.1

Найдите значение выражения $\log_2 6,4+\log_2 10$.

Пример 7.2

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 81}{\log_8 3}$.

Пример 7.3

Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ\cdot\sin 43^\circ}$.

Пример 7.4

Найдите значение выражения $6\sqrt{3}\cos^2\dfrac{11\pi}{12}-3\sqrt{3}$.

Пример 7.5

Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\cos^2\dfrac{7\pi}{8}-5\sqrt{2}\sin^2\dfrac{7\pi}{8}$.

Пример 7.6

Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-0,8$.

Задание 8

Задания **линии 8** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции.

Элементы содержания

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания.

Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной.

Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.

Уравнение касательной к графику функции.

Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.

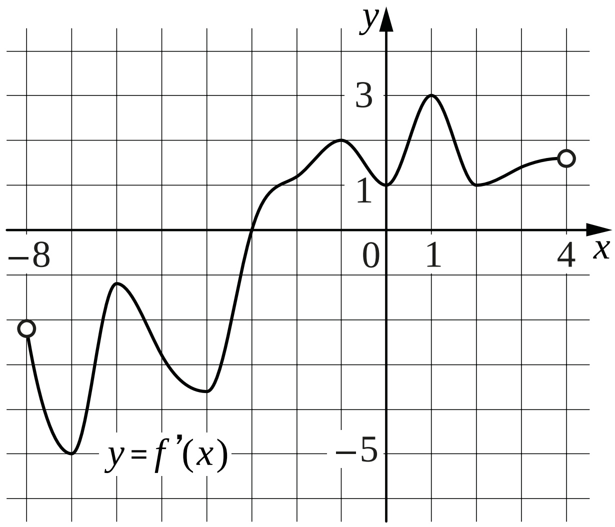
Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее наименьшее значения функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

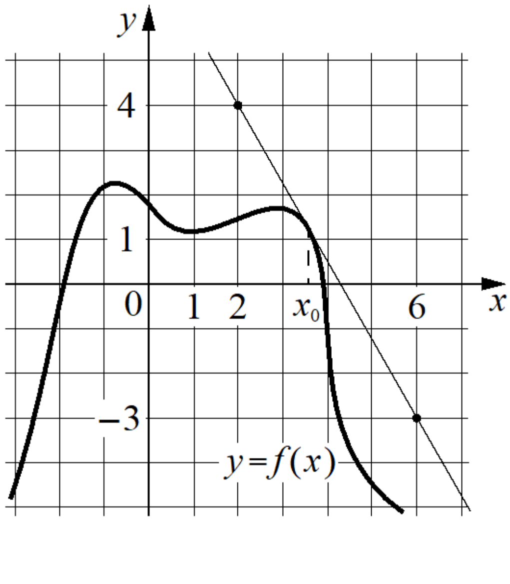
<u>Пример 8.1</u>

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–8; 4). В какой точке отрезка [–7; –4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



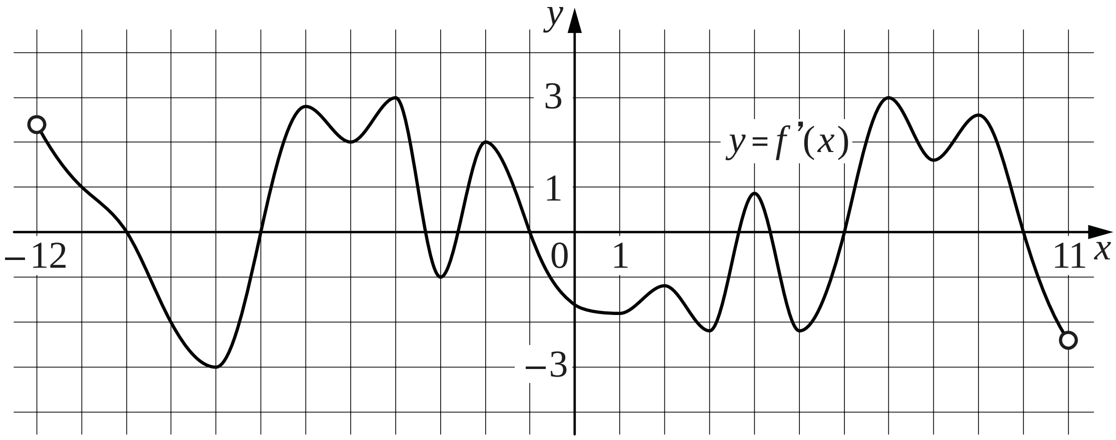
<u>Пример 8.2</u>

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



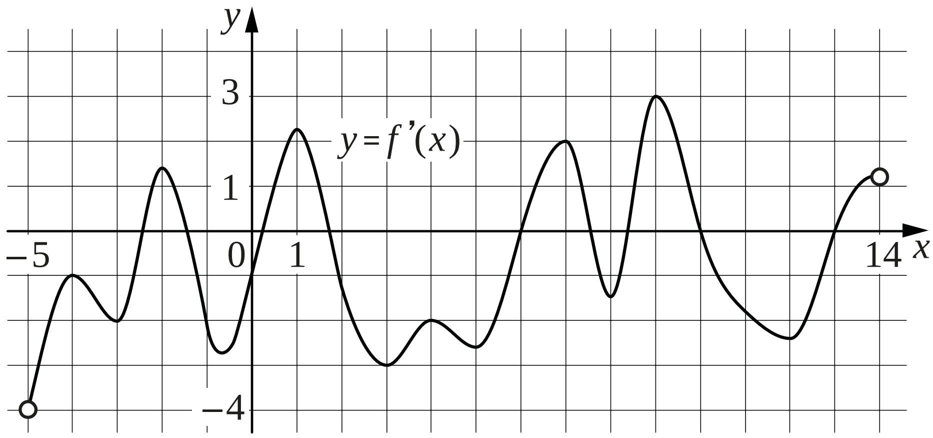
Пример 8.3

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11; 5]$.



Пример 8.4

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 9]$.



Задание 9

Существенные затруднения вызывают задания, связанные с вычислением по формуле. Задания **линии 9** проверяют сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Элементы содержания

Преобразования выражений, включающих арифметические операции.
Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень.
Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени.
Преобразования тригонометрических выражений.
Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования.

Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.
Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.
Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 9.1

В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой R_1 = Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого – R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R вычисляется по формуле $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

Пример 9.2

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где c = 1500 м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с. Ответ дайте в МГц.

Пример 9.3

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса (в мг) уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа (в мг), τ – время, прошедшее от начального момента (в мин.), T — период полураспада (в мин.). В начальный момент времени масса изотопа равна 116 мг. Период его полураспада составляет 9 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 29 мг.

Пример 9.4

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Пример 9.5

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 295$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе такой же тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (в м/с) и изменяется по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они различаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Пример 9.6

Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Задание 10

Элементы содержания

Квадратные уравнения.

Рациональные уравнения.

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Решать рациональные уравнения, их системы.

Решать рациональные неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 10.1

На изготовление 384 деталей первый рабочий тратит на 8 ч меньше, чем второй рабочий на изготовление 480 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Пример 10.2

Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пример 10.3

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 ч. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Пример 10.4

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Пример 10.5

Два велосипедиста одновременно отправились в 220-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 9 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Пример 10.6

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 468 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 47 часов. Ответ дайте в км/ч.

Пример 10.7

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40 % меди, второй — 25 % меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Пример 10.8

Расстояние между пристанями A и B равно 192 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Задание 11

Линия 11 – задания повышенного уровня сложности с кратким ответом интегрированного характера, для выполнения которых необходимо привлекать знания из разных разделов курса математики: элементарные функции; решение линейных, квадратных, иррациональных, рациональных, логарифмических, показательных уравнений и их систем.

Элементы содержания

Определение и график функции.
Линейная функция, её график.
Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график.
Квадратичная функция, её график.
Степенная функция с натуральным показателем, её график.
Тригонометрические функции, их графики.
Показательная функция, её график.
Логарифмическая функция, её график.
Квадратные уравнения.
Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.
Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

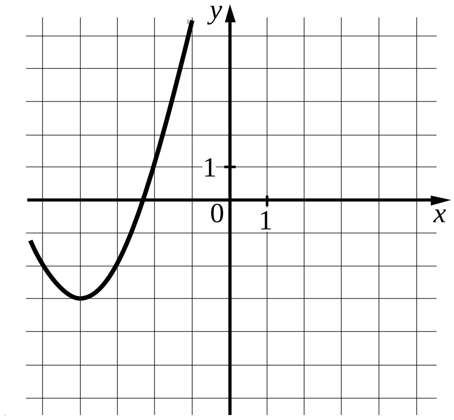
Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее наименьшее значения; строить графики изученных функций.
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Примеры таких заданий приведены ниже.

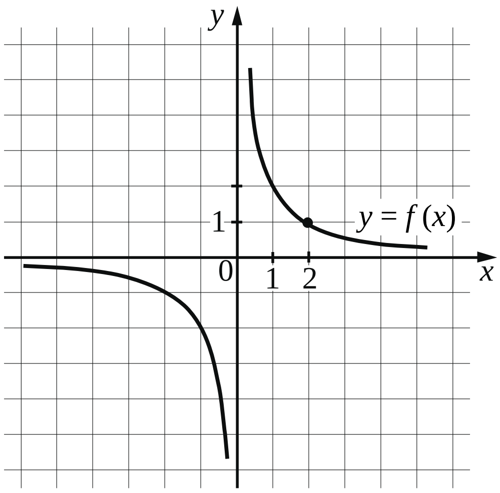
Пример 11.1

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c целые. Найдите значение $f(-12)$.



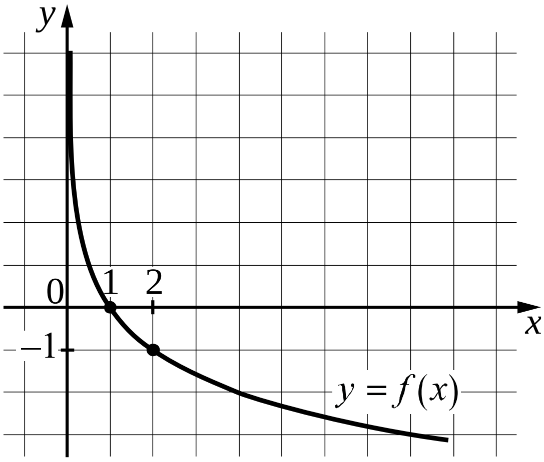
Пример 11.2

На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



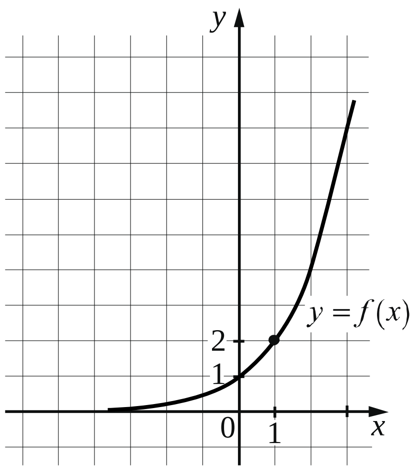
Пример 11.3

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(32)$.



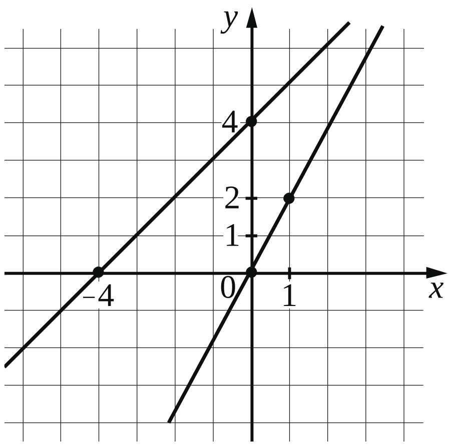
Пример 11.4

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение $f(3)$.



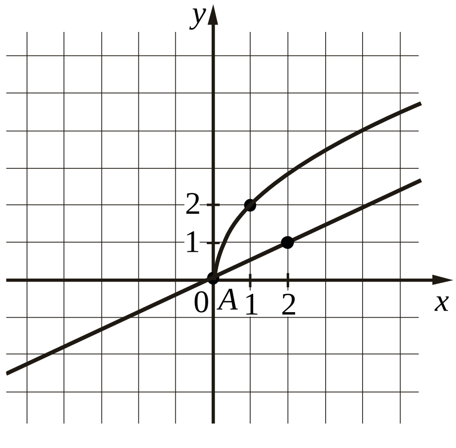
Пример 11.5

На рисунке изображены графики двух линейных функций, пересекающиеся в точке *A*. Найдите абсциссу точки *A*.



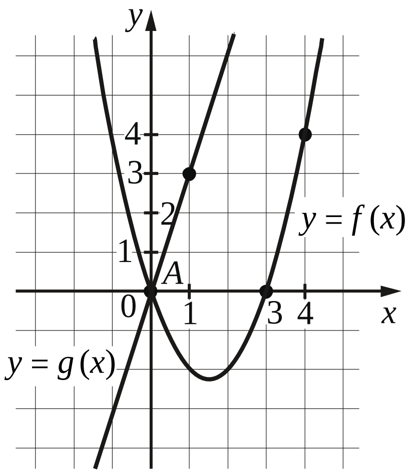
Пример 11.6

На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках *A* и *B*. Найдите абсциссу точки *B*.



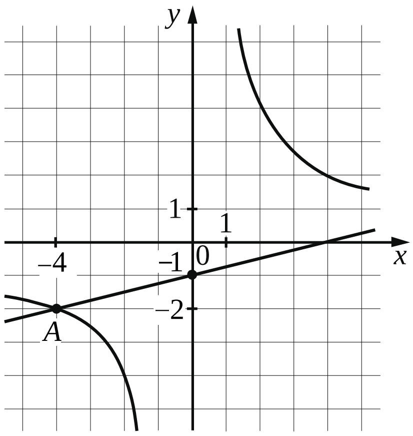
Пример 11.7

На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=kx,$ пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Пример 11.8

На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b,$ пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Задание 12

Задания **линии 12** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, уметь находить точки экстремума функции.

Элементы содержания

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания.
Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции.
Наибольшее и наименьшее значения функции.
Понятие о производной функции, геометрический смысл производной.

Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.
Уравнение касательной к графику функции.
Производные суммы, разности, произведения, частного.
Производные основных элементарных функций.
Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее наименьшее значения; строить графики изученных функций.
Вычислять производные и первообразные элементарных функций.
Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции.
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 12.1

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 19$.

Пример 12.2

Найдите точку максимума функции $y = 7 \cdot \ln(x-9) - 7x + 2$.

Пример 12.3

Найдите точку максимума функции $y = (4-x) \cdot e^{x+4} + 4$.

Пример 12.4

Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;12]$.

Пример 12.5

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9 \cdot \ln(x+11) + 7$ на отрезке $[-10,5;\,0]$.

Пример 12.6

Найдите наибольшее значение функции $y = 10\sin x - \frac{42x}{\pi} - 12$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\,0\right]$.

Рекомендации по выполнению заданий части 2 экзаменационной работы по математике профильного уровня

В части 2 КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня предлагается 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности. Используя демонстрационный вариант, необходимо изучить критерии оценивания этих заданий, особенно требования к полному верному ответу.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 13**, **15** и **16** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности.

Задание 13

В заданиях **линии 13** нужно решить тригонометрическое, или логарифмическое, или показательное уравнение и отобрать корни, принадлежащие числовому отрезку.

Элементы содержания

Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.
Системы линейных неравенств.
Системы неравенств с одной переменной.

Проверяемые умения

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

При подготовке к решению таких задач уделите внимание решению простейших тригонометрических уравнений, приёмам введения новой переменной и разложения на множители. Полезно периодически решать именно простые уравнения типа $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = -\frac{1}{2}$ и т.п., чтобы повторять «табличные значения» тригонометрических функций, совершенствовать технику нахождения корней из числовой серии, принадлежащих указанному промежутку.

Большинство участников экзамена, приступающих к решению этой задачи, верно выполняет преобразования с использованием функций удвоенного аргумента, формул приведения. В результате всех преобразований уравнение приводится к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

Отбор корней с помощью числовой окружности не представляет трудностей, если участник экзамена понимает, где на окружности находятся найденные им серии решений и отрезок (дуга), на котором лежат корни. При отборе корней с помощью тригонометрической окружности на ней должны быть: начало и конец дуги (отмечены и подписаны на окружности); выделение (любым способом) рассматриваемой дуги; корни (отмечены и подписаны на окружности), принадлежащие этой дуге; при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие ей.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

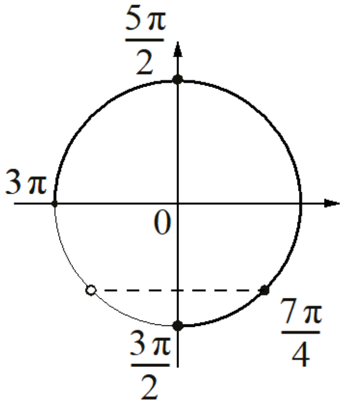
$$2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0;$$

$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x \cdot \left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z};\quad -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 13.1

а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right].$

Пример 13.2

а) Решите уравнение $2\sin^3 x+\sqrt{2}\cos 2x+\sin x=\sqrt{2}.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right].$

Пример 13.3

а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sin(-x)+\cos(-x)-1=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right].$

Пример 13.4

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right].$

Пример 13.5

а) Решите уравнение $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right].$

Пример 13.6

а) Решите уравнение $8^x-3\cdot 2^{x+2}+2^{5-x}=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_4 5;\sqrt{3}\right].$

Задание 15

В заданиях **линии 15** нужно решить рациональное, логарифмическое или показательное неравенства.

Элементы содержания

Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.
Системы неравенств с одной переменной.
Метод интервалов.

Проверяемые умения

Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

В ходе подготовки к решению таких неравенств необходимо основательно повторить метод интервалов, обратить внимание на решение неравенств методом замены переменной и разложением на множители.

Трудности при решении таких неравенств возникают у тех, кто не видит подходящую замену переменных или основы для разложения на множители. При решении неравенств такого типа часто допускаются ошибки не при решении показательных или логарифмических неравенств, а при решении полученных алгебраических неравенств методом интервалов и проведении неравносильных преобразований.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

Решите неравенство $\dfrac{25^{x^2+0,5}+5^{x^2+1}}{5^{x+1}-5}\le 25\cdot\dfrac{5^{x^2}+1}{5^x-1}$.

Решение.

Последовательно преобразуем заданное неравенство:

$$\frac{5\cdot\left(25^{x^2}+5^{x^2}\right)}{5\cdot\left(5^x-1\right)}\le 25\cdot\frac{5^{x^2}+1}{5^x-1},\quad \frac{25^{x^2}+5^{x^2}}{5^x-1}-\frac{25\cdot\left(5^{x^2}+1\right)}{5^x-1}\le 0,$$

$$\frac{\left(5^{x^2}+1\right)\cdot\left(5^{x^2}-25\right)}{5^x-1}\le 0,\qquad \frac{5^{x^2}-25}{5^x-1}\le 0,\qquad \frac{5^{x^2}-5^2}{5^x-5^0}\le 0,\qquad \frac{(5-1)\cdot\left(x^2-2\right)}{(5-1)\cdot(x-0)}\le 0,$$

$$\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x}\le 0, \text{ откуда } x\le-\sqrt{2},\ 0<x\le\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\,\right]\cup\left(0;\sqrt{2}\,\right]$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 15.1

Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot5^x\right)^2+8\cdot5^x<2\cdot25^x+15$.

Пример 15.2

Решите неравенство $3^x+\dfrac{243}{3^x-36}\ge 0$.

Пример 15.3

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5$.

Пример 15.4

Решите неравенство $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\ge\log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right)$.

Пример 15.5

Решите неравенство $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)}\ge\frac{2}{\log_8 x}+\frac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}$.

Пример 15.6

Решите неравенство $\frac{8^{x+\frac{2}{3}}-9\cdot 4^{x+\frac{1}{2}}+13\cdot 2^x}{4^{x+\frac{1}{2}}-9\cdot 2^x+4}\le 2^{x+1}-\frac{1}{2^x-2}+\frac{3}{2^{x+1}-1}$.

Задание 16

Задания **линии 16** проверяют сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этих заданий нужно уметь решать текстовую задачу с экономическим содержанием.

Элементы содержания

Квадратные уравнения.

Рациональные уравнения.

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Решать рациональные уравнения, их системы.

Решать рациональные неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Для успешного решения таких задач необходимо внимательно анализировать условие задачи, составлять математическую модель, исследовать её и интерпретировать полученный результат.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2030 года долг должен составить 600 тыс. рублей;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2360 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита равна A тыс. рублей.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$A;\ 0{,}8A+120;\ 0{,}6A+240;\ 0{,}4A+360;\ 0{,}2A+480;\ 600;\ 480;\ 360;\ 240;\ 120;\ 0.$$

В январе каждого года долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$1{,}2A;\ 0{,}96A+144;\ 0{,}72A+288;\ 0{,}48A+432;\ 0{,}24A+576;\ 720;\ 576;\ 432;\ 288;\ 144.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}4A-120;\ 0{,}36A-96;\ 0{,}32A-72;\ 0{,}28A-48;\ 0{,}24A-24;\ 240;\ 216;\ 192;\ 168;\ 144.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5\left(0{,}32A-72\right)+5\cdot 192=1{,}6A+600.$$

Получаем: $1{,}6A+600=2360$, откуда $A=1100$.

Планируется взять кредит в размере 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1100 тыс. рублей.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 16.1

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

<u>Пример 16.2</u>
15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1200 тыс. рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с февраля по ноябрь 2025 года включительно) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 ноября 2025 года долг составит 400 тыс. рублей;
- 15 декабря 2025 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

<u>Пример 16.3</u>
В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годов должны быть по 300 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 года будет равен 417,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

<u>Пример 16.4</u>
В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 292 820 рублей?

Пример 16.5

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

Геометрия

Задания **линий 14** и **17** относятся к геометрическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности. Эти задания верно решают в основном те участники экзамена, которые претендует на высокий балл. Рекомендуем начинать повторение с разбора простейших задач курса стереометрии и планиметрии по тем учебникам, по которым Вы изучали соответствующий курс в школе, затем добиться уверенного решения геометрических задач части 1, и уже потом переходить к решению задач 14 и 17. Большим подспорьем для Вас в совершенствовании техники решения таких задач, несомненно, будет Гиперматика.

Задание 14.

Задания **линии 14** проверяют сформированность наглядных представлений об изученных стереометрических фигурах, а также умения строить сечения, проводить доказательства, пользуясь изученными фактами о взаимном расположении прямых и плоскостей, находить геометрические величины, пользуясь теоремами об объёмах и площадях поверхности геометрических тел.

Задание состоит из двух пунктов. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Элементы содержания

Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма.

Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Шар и сфера, их сечения.

Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.

Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями.
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы.
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

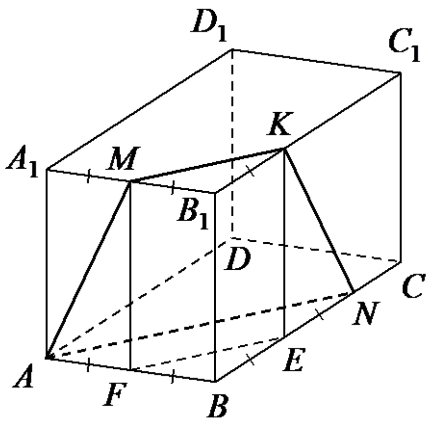
Проверяемые умения

Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов), использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом $60°$ при вершине A. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.
а) Докажите, что точка M — середина ребра A_1B_1.
б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K : KC_1 = 2:3$.

Решение.
а) Пусть отрезки MF и KE — высоты призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK, а значит, параллелен отрезку AN и равен его половине. Следовательно, FE — средняя линия в треугольнике ABN.



Таким образом, точки F и E — середины отрезков AB и BN соответственно, а точка M — середина отрезка A_1B_1.
б) Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$. Тогда треугольник ABN равнобедренный с углом $120°$ при вершине B и основанием $AN = 2$. По теореме косинусов найдём боковые стороны:
$$AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos 120° = AN^2;$$

$3AB^2=4$; $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $AF=B_1K=\frac{2}{5}B_1C_1=\frac{2}{5}AD$ и $AB=2AF$, отрезок $AD=\frac{5}{4}AB=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Таким образом, объём призмы равен:

$5=AA_1\cdot AB\cdot AD\cdot\sin 60°=AA_1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=AA_1\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}$,

откуда $AA_1=2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 14.1

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC=90°$, $\angle ADC=60°$.

Пример 14.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 14, высота SH равна 24. Точка K — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости SAB.

Пример 14.3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N=6$.

Задание 17

Задание 17 – планиметрическая задача, проверяющая умения пользоваться изученными геометрическими фактами и теоремами, исследовать геометрические конфигурации на плоскости.

Планиметрические задачи традиционно входили в состав вступительных испытаний технических и математических специальностей вузов. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Элементы содержания

Треугольник.
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат.
Трапеция.
Окружность и круг.
Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.
Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.
Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.
Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.

Проверяемые умения

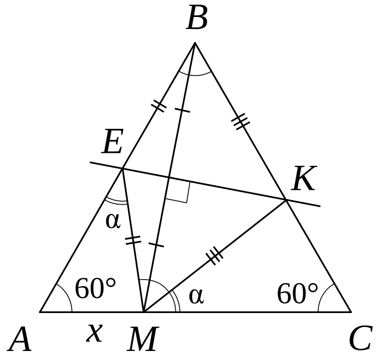
Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.
а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны.
б) Найдите отношение $AM : MC$, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.

Решение.

а) Треугольники MEB и MKB равнобедренные. Значит, $\angle EMB = \angle EBM$, $\angle KMB = \angle KBM$. Следовательно, $\angle EMK = \angle EBK = 60°$.
Пусть $\angle AEM = \alpha$. Тогда:
$\angle EMA = 180° - \angle EAM - \alpha = 120° - \alpha$;
$\angle KMC = 180° - \angle EMA - \angle EMK =$
$= 180° - (120° - \alpha) - 60° = \alpha$.



Следовательно, треугольники AEM и CMK подобны по двум углам.

б) Пусть $AM = x$, $AB = BC = AC = a$. Тогда $MC = a - x$.

Отношение площадей подобных треугольников AEM и CMK равно $\frac{4}{9}$ и равно квадрату коэффициента подобия. Значит, отношение их периметров равно $\frac{2}{3}$. Запишем это равенство: $AM + AE + EM = \frac{2}{3}(CM + CK + MK)$;

$x + AE + EB = \frac{2}{3}(a - x + CK + KB)$; $x + a = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}x$; $\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}a$; $x = \frac{1}{5}a$,

то есть $AM = \frac{1}{5}AC$, откуда $AM : MC = 1:4$.

Ответ: б) $1:4$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 17.1

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1:2$.

Пример 17.2

Трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

Пример 17.3

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60°$.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 18** и **19** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом высокого уровня сложности.

Задание 18

В заданиях **линии 18** нужно уметь проводить исследования количества решений уравнения, неравенства или их систем.

Элементы содержания

Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.
Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.
Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.
Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем.
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.
Системы неравенств с одной переменной.
Равносильность неравенств, систем неравенств.
Использование свойств и графиков функций при решении неравенств.
Метод интервалов.
Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.
Линейная функция, её график.
Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график.
Квадратичная функция, её график.
Степенная функция с натуральным показателем, её график.
Тригонометрические функции, их графики.
Показательная функция, её график.
Логарифмическая функция, её график.
Применение производной к исследованию функций и построению графиков.
Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Проверяемые умения

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.

Вычислять производные элементарных функций.

Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее наименьшее значения функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

Найдите все значения a, при каждом из которых, уравнение $12+10\log_{49}\sin x = a^2 - a - a\log_7 \sin x$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Преобразуем уравнение. $(5+a)\log_7 \sin x = (a+3)(a-4)$.

Если $a=-5$, то $0=18$. Полученное равенство неверно, уравнение корней не имеет.

Если $a\neq -5$, то $\log_7 \sin x = \dfrac{(a+3)(a-4)}{a+5}$. Так как в данном случае $0<\sin x\leq 1$, то для всех значений x верно неравенство $\log_7 \sin x \leq 0$, следовательно, искомые значения a удовлетворяют неравенству $\dfrac{(a+3)(a-4)}{a+5}\leq 0$. Откуда получаем, что $a<-5$, $-3\leq a\leq 4$.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup[-3;4]$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

<u>Пример 18.1</u>

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-a^2\right| = |x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a}$ имеет ровно два различных корня.

<u>Пример 18.2</u>

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2+a^2-6x-4a\right| = 2x+2a$ имеет четыре различных корня.

Пример 18.3

Найдите все значения $a,$ при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Пример 18.4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2-ax-2x^2-6a+3x+9|x|=0$$

имеет четыре различных корня.

Задание 19

Задания **линии 19** проверяют способность находить пути решения, комбинируя известные методы и алгоритмы. Их особенность состоит в том, что практически все задания этой линии апеллируют к целочисленной арифметике, причём к фактам, известным из курса математики 5–7 классов. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас подтверждения или опровержения гипотез. При этом первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена. Важно, что для выполнения первого пункта не требуется специальных знаний: достаточно сообразительности и терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию.

Элементы содержания

Целые числа.

Дроби, проценты, рациональные числа.

Преобразования выражений, включающих арифметические операции.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

В коробке у портного лежат красные, синие и белые пуговицы. Если он возьмёт горсть из 10 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна красная. Если он возьмёт горсть из 15 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна синяя. Если же он возьмёт горсть из 20 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна белая.

а) Может ли в коробке лежать 50 пуговиц?

б) Какое наибольшее количество пуговиц может лежать в коробке?

в) Какой наибольшей может быть стоимость всех пуговиц, лежащих у портного в коробке, если красная пуговица стоит 20 рублей, синяя — 50 рублей, белая — 100 рублей?

Решение.

Обозначим a – число красных пуговиц, b – число синих пуговиц, c – число белых пуговиц, лежащих в коробке. Из условия следуют неравенства: $b+c\le 9,\ a+c\le 14,\ a+b\le 19.$

а) Из неравенств следует, что $a+b+c\le 21.$ Значит, общее количество пуговиц в коробке не превосходит 21 и не может быть 50.

б) Так как $a+b+c\le 21,$ то приведём пример, когда число пуговиц ровно 21:

$$\begin{cases} b+c=9, \\ a+c=14, \\ a+b=19; \end{cases} \quad \begin{cases} a=12, \\ b=7, \\ c=2. \end{cases}$$

в) Стоимость всех пуговиц будет равна $20a+50b+100c.$ Так как из коробки можно взять 20 пуговиц, то их не меньше 20, кроме того, по доказанному в пункте б их не больше 21.

Если пуговиц 21, то набрать их можно единственным способом и стоимость будет равна: $20\cdot 12+50\cdot 7+100\cdot 2=240+350+200=790.$

Если пуговиц 20, то наименьшее число красных пуговиц 11 (иначе, если взять горсть только из 10 красных пуговиц, останется ещё одна горсть из 10 пуговиц, в которой красной нет), а наименьшее число синих пуговиц — 6. Тогда наибольшее возможное число белых пуговиц — 3 (самых дорогих). Стоимость будет равна: $20\cdot 11+50\cdot 6+100\cdot 3=220+300+300=820.$

Ответ: а) нет; б) 21; в) 820.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

<u>Пример 19.1</u>

Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?

б) Может ли это отношение быть равным 84?

в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

Пример 19.2

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

Пример 19.3

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

На экзамене по математике разрешается пользоваться только теми справочными материалами, которые находятся в работе (четыре тригонометрические формулы, идущие сразу после инструкции по выполнению работы). При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой. Калькулятор на экзамене не используется.

Желаем успеха на экзамене!