ОГЭ

Подходы к оформлению заданий №№21-25 второй части и ошибки, которых можно избежать.

Подготовили:
Балашова Е.В., учитель математики МБУ «Лицей №19»
Одегова С.П., методист МАОУ ДПО ЦИТ

Общие подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем:

решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося.

Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным.

Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение заданий 20–25 удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание.

Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Задание №20 включает в себя следующие разделы:

- Алгебраические выражения
- Уравнения
- Системы уравнений
- Неравенства
- Системы неравенств

Основные проверяемые требования к математической подготовке:

Умение выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом.

Критерии оценивания

Баллы	Содержание критерия
2	Обосновано получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Типичные ошибки при решении неравенств

- Ошибки при нарушении алгоритма решения неравенства
- Невнимательное чтение условия (неправильный выбор интервала)
- Неправильно записанный ответ (скобки)
- Арифметические ошибки с отрицательными числами
- Не введена функция для нахождения нулей функции
- Обязательно написать как найден знак хотя бы для одного интервала.

Задание 20. Решить неравенство

№21

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$

$\cancel{(x-8)(x-8-}\ (x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$x \in (8, 8+\sqrt{3})$

Ответ $x \in (8, 8+\sqrt{3})$

21 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

2 балла

Задание 20. Решить неравенство

$$(x-8)^2<\sqrt{3}\cdot(x-8)$$

$$(x-8)^2-\sqrt{3}(x-8)<0$$

$$(x-8)(x-8\sqrt{3})<0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+8<0\\ x-8-\sqrt{3}>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+8>0\\ x-8-\sqrt{3}<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-8\\ x>8+\sqrt{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x>-8\\ x<8+\sqrt{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x>-8\\ x<8+\sqrt{3}\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-8;\ 8+\sqrt{3})$

Решите неравенство $(x-8)^2<\sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right)<0,$$

откуда $8<x<8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8;\ 8+\sqrt{3}\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

1 балл

Задание 20. Решить уравнение.

1. При решении квадратного уравнения через дискриминант многие учащиеся пишут : $D=2^2-4\cdot1\cdot(-2) = 12= 2\sqrt{3}$ - это недопустимая ошибка при оформлении. Вывод: ноль баллов.

2. При решении уравнений учащиеся часто используют замену $x^2 = t$ и добавляют условие $t > 0$. Это неверно, так как должно быть $t \geq 0$. Вывод: ноль баллов.

3. При решении, например, уравнения $x^2-2x+\sqrt{3-x} = \sqrt{3-x}+8$ учащиеся часто забывают указать ОДЗ ($x\leq3$). Но в конце решения пишут, что полученный корень $x= 4$ не подходит по условию (не прописывая его).За такое решение тоже ставится ноль баллов.

4. Предположим, что при решении ученик получил следующее уравнение $x(x-2)=0$. Недопустимой ошибкой считается следующее оформление $x=0$ и $x=2$. (Правильно: $x=0$ или $x=2$). Вывод: ноль баллов.

Типичные ошибки

- Ошибки при раскрытии скобок, используя формулы сокращенного умножения.
- Отсутствие ОДЗ, либо проверки корней.
- Ошибки при решении квадратных уравнений (желательно всегда писать формулу)
- Извлечение корней квадратного уравнения (потеря корня)
- Использование символики (уравнения объединяют системой и в ответ записывают как для системы, а не уравнения)
- При введении новой переменной забывают вернуться к исходным неизвестным.
- Вычислительные ошибки.
- Отсутствие ответа.

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$x^4=(2x-15)^2$, $(x^2)^2-(2x-15)^2=0$, $(x^2-2x+15)(x^2+2x-15)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x^2-2x+15=0$ или $x^2+2x-15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $x^2-2x+1+14=0$, $(x-1)^2=-14$ не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $x^2+2x+1-16=0$, $(x+1)^2-4^2=0$, $(x+1-4)(x+1+4)=0$, $(x-3)(x+5)=0$

откуда $x-3=0$ или $x+5=0$; $x=3$ или $x=-5$.

Ответ: -5; 3.

2 балла

Задание 20. Решить уравнение

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

0 баллов

Ответ: $x=1,5$, $x=0,8$.

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0;\quad \frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0;$$

$$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0, \text{ если } x\neq 1$$

$$1+3x-3-10(x-1)^2=0;$$

$$-2+3x-10x^2+20x-10=0;$$

$$-10x^2+23x-12=0 \quad |\cdot(-1);$$

$$10x^2-23x+12=0;$$

$$D=b^2-4ac;\ D=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot10}=\frac{72}{20}=3,6;\quad x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6}{20}=-1,3$$

Ответ: $-1,3$; $3,6$

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Решение.

Пусть $(x-1)^2 = t$, $t \geq 0$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \text{ откуда } t = -1 \text{ или } t = 3.$$

$t = -1$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$,

$t = 3$; $(x-1)^2 = 3$; $x - 1 = \sqrt{3}$ или $x - 1 = -\sqrt{3}$; $x = 1 + \sqrt{3}$ или $x = 1 - \sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

№21. $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$(x-1)^4 = t^2$

$(x-1)^2 = t$

$(x-1)^2 = 3$

$x^2 - 2x + 1 = 3$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12 = 2\sqrt{3}$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$(x-1)^2 = -1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt{3}$; $1-\sqrt{3}$.

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно

0 баллов

21) $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета	по т. обр. т. Виета
$t_1+t_2=2$	$t_1=-1$ не удовлетворяет условию
$t_1 t_2=-3$	$t_2=3$

$(x-1)^2=t$ $t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Пример 3. Найдём подбором корни уравнения

$$x^2-x-12=0.$$

▶ Дискриминант $D=1-4\cdot1\cdot(-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1+x_2=1 \text{ и } x_1\cdot x_2=-12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1=-3$ и $x_2=4$. ◁

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

21. $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0.$

Пусть $(x-1)^2=x\geq 0,$

$x^2-2x-3=0;$

$a=1\ b=-2\ c=-3;$

$D=b^2-4ac=4+4\cdot 3\cdot 1=4+12=16=4^2;$

$D>0 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня;

$x_1=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3;$

$x_2=\frac{-b\mp\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Ответ: $x=3;\ -1.$

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно

0 баллов

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

2 балла

$$\frac{1^{\backslash 1}}{x^2}-\frac{1^{\backslash x}}{x}-6^{\backslash x^2}=0$$

$$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \qquad \text{ОДЗ: } x^2 \neq 0,\ x \neq 0$$

$$1-x-6x^2=0 \quad |\cdot(-1)$$

$$6x^2+x-1=0$$

$$D=1-4\cdot(-1)\cdot 6=25=5^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{12}$$

$$x_1=\frac{-1+5}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-1-5}{12}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{3};\ x_2=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2, \; x \neq 0$$

$$-6x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 = 5^2$$

$$x_1 = -0{,}5$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = \frac{1}{3}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно

0 баллов

$$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0.$$

Пусть $(x-1)^2 = x \geq 0$,

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$a = 1$ $b = -2$ $c = -3$;

$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 + 12 = 16 = 4^2$;

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня;

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ответ: $x = 3; -1$.

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно

0 баллов

① $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$

Пусть: $(x-1)^2=t$

Тогда: $t^2-2t-3=0$

$a=1;\ b=-2;\ c=-3$

$D=4+12=16;$

$t_1=\frac{2+4}{2}=3$

$t_2=\frac{2-4}{2}=-1.$

Ответ: $0;\ 2,\ \frac{2+\sqrt{12}}{2};\ \frac{2-\sqrt{12}}{2}$

② 1) $(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=12$

$x_1=\frac{2+\sqrt{12}}{2}$

$x_2=\frac{2-\sqrt{12}}{2}$

2) $(x-1)^2=-1$

$x^2-2x+1-1=0$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0;$

$x=0;\ x=2$

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Можно ли применить критерий «Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно» ???

НЕТ

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно

0 баллов

ОШИБКА????

- **Уточнение** – «ошибка вычислительного характера» или «вычислительная ошибка» – это ошибка, допущенная при **выполнении сложения, вычитания, умножения и деления**. В критериях оценки выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда **единственная вычислительная ошибка** стала причиной того, что неверен ответ.
- К вычислительным ошибкам не относятся **ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.**

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

0 баллов

№: 21

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}^{\,x-1}-10^{\,(x-1)^2}=0$$

О.Д.З.

$(x-1)^2\neq 0$

$x-1\neq 0$

$x\neq 1;$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$

$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$

$-10x^2+23x-12=0$

$D=b^2-4ac$, $D=529-480=49=\pm 7^2$

$x_1=\frac{-23+7}{-20}=$ [illegible] $1{,}5$ $x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=0{,}8$

Ответ: [illegible] $1{,}5$; $0{,}8$

0 баллов

№20

$x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$

$x^2-3x+\cancel{\sqrt{6-x}}-\cancel{\sqrt{6-x}}-40=0$

$x^2-3x-40=0$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=-40$

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-40)=9+160=169=13^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{3+13}{2}$

$x_1=8$

$x_2=\frac{3-13}{2}$

$x_2=-5$

Проверка:

$x=8;\ 8^2-3\cdot8-40=0$

$x=-5;\ (-5)^2-3\cdot(-5)-40=0$

Ответ: 8, −5

Задание 20

$x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$

$x^2-3x+\sqrt{6-x}-\sqrt{6-x}-40=0$

$x^2-3x-40=0$

По теореме Виетта $x_1+x_2=3$; $x_1=8$

$x_1x_2=-40$; $x_2=-5$

Ответ: −5; 8

При решении, учащиеся не указывали ОДЗ. Но в конце решения пишут, что полученный корень x= 8 не подходит по условию (не прописывая его).За такое решение тоже ставится ноль баллов.

20. $x^2 - 2x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 35$

$x^2 - 2x + \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} - 35 = 0$

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-35) = 4 + 140 = 144 = 12^2$

$D>0$, 2 корня

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{2-12}{2\cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{2+12}{2\cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$

~~Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = 7$~~

Проверка

$(-5)^2 - 2\cdot(-5) - 35 = 0$ $\quad$ $7^2 - 2\cdot 7 - 35 = 0$

$25 + 10 - 35 = 0$ $\quad$ $49 - 14 - 35 = 0$

1) $(-5)^2 - 2\cdot(-5) + \sqrt{6-(-5)} = \sqrt{6-(-5)} + 35$

$25 + 10 + \sqrt{11} - \sqrt{11} - 35 = 0$

$25 + 10 - 35 = 0$

2) $7^2 - 2\cdot 7 + \sqrt{6-7} = \sqrt{6-7} + 35$

$49 - 14 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} - 35 = 0$

$49 - 14 - 35 = 0$

Нет ответа

0 баллов

Задание 21. Текстовые задачи

Задание тематически сохраняется несколько лет.

Типовые задачи:

- Движение по воде
- На проценты, смеси, сплавы
- На совместную работу
- На движение по прямой

<u>Основные проверяемые требования к математической подготовке:</u>

Уметь решить комплексную задачу, включающую в себя знания из разных тем курса алгебры.

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, строить и исследовать простейшие математические модели.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения задачи верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Задание 21. Решить задачу.

- Нужно запомнить, что при решении любой задачи необходимо либо сделать полное объяснение составления уравнения или заполнить таблицу, обязательно прописывая измерения величин. Просто составленное и решённое уравнение оценивается в ноль баллов.
- При решении задачи с помощью дробно-рационального уравнения обязательно нужно указать ОДЗ. Иначе, ноль баллов.
- При решении задачи с помощью квадратного уравнения обязательно нужно прописать нахождение корней (решить данное уравнение). Иначе, ноль баллов.
- Очень часто, при решении квадратного уравнения, именно в задачах, учащиеся подбирают корни с помощью теоремы Виета, забывая при этом потом проверить, действительно ли эти числа являются корнями данного уравнения. Здесь очень сложное оформление, поэтому не рекомендую использовать эту теорему. Просто решите уравнение через формулы. Иначе, ноль баллов.

Задание 21. Решить задачу

- При решении задач, связанных с нахождением средней скорости, нельзя брать расстояние за единицу (нужно ввести переменную S). Эта ошибка заключается в том, что расстояние измеряется в км, а введённая единица размерности не имеет. Такая замена ведёт к оцениванию в ноль баллов.

Уточнение – «ошибка вычислительного характера» или «вычислительная ошибка» – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения и деления.

В критериях оценки выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Пример1.

22 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52,8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

Возьмём весь путь за 1, тогда:

	S, км	T, ч	V, км/ч
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 36}$	36
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 99}$	99

Найти:

$V_{средн}$ - ?

Решение:

1) Найдем всё время движения:

$$\frac{1^{\,11}}{2\cdot 36}+\frac{1^{\,4}}{2\cdot 99}=\frac{15}{792}=\frac{5}{264}\ (ч)$$

2) $$V_{средн}=\frac{S\,(всё)}{T\,(всё)}=\frac{1}{\frac{5}{264}}=\frac{264}{5}=\frac{528}{10}=52,8\ (км/ч)$$

Ответ: 52,8 км/ч

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера

0 баллов

ИЛИ

22

Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}} = 52,8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

№22

x - весь путь (км)

	S	v	t
I	$\frac{x}{2}$ км	36 км/ч	$\frac{x}{72}$ ч
II	$\frac{x}{2}$ км	99 км/ч	$\frac{x}{198}$ ч

792

$$v_{ср} = \frac{S_{весь}}{t_{весь}} = \frac{x}{\frac{x}{72}+\frac{x}{198}} = \frac{729\cancel{x}}{15\cancel{x}} = 48,6 \text{ км/ч}$$

Ответ 48,6 км/ч

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера

1 балл

Пример полного решения задачи

Расстояние между пристанями A и B равно 108 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов.

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

по течению реки скорость лодки $v+5$ км/ч, время $\frac{108}{v+5}$ ч;

против течения реки скорость лодки $v-5$ км/ч, время $\frac{108}{v-5}$ ч;

время движения лодки 9 ч, тогда получаем уравнение: $\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9$.

$108v-540+108v+540=9v^2-225$ при $v \neq \pm 5$.

$v^2-24v-25=0$, $D=24^2-4\cdot(-25)=676=26^2$, $v=\frac{24-26}{2}$ или $v=\frac{24+26}{2}$;

оба корня $v=-1$ и $v=25$ удовлетворяют условию $v \neq \pm 5$.

Корень $v=-1$ не удовлетворяет условию задачи (скорость – величина положительная), корень $v=25$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 25 км/ч.

ИЛИ

Решение.
Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов.
Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда
по течению реки скорость лодки $v+5$ км/ч, время – $\frac{108}{v+5}$ ч;
против течения реки скорость лодки $v-5$ км/ч, время – $\frac{108}{v-5}$ ч;
время движения лодки 9 ч, тогда получаем уравнение: $\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9$.
По условию лодка движется против течения, следовательно, $v>5$.
$108v-540+108v+540=9v^2-225$.
$v^2-24v-25=0$, $D=24^2-4\cdot(-25)=676=26^2$, $v=\frac{24-26}{2}$ или $v=\frac{24+26}{2}$;
Условию $v>5$ из корней $v=-1$ и $v=25$ удовлетворяет корень $v=25$.
Ответ: 25 км/ч.

Пример 2.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Пусть скорость мотроной лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

против течения реки скорость лодки $v-4$ км/ч, время $\frac{77}{v-4}$ ч;

по течению реки скорость лодки $v+4$ км/ч, время $\frac{77}{v+4}$ ч;

время движения лодки против течения на 2 ч больше времени движения по течению, тогда получаем уравнение: $\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2$.

$77v+308-77v+308=2v^2-32$ при $v\neq\pm4$.

$v^2=324$, $v=-18$ или $v=18$; оба корня $v=-18$ и $v=18$ удовлетворяют условию $v\neq\pm4$.

Корень $v=-18$ не удовлетворяет условию задачи (скорость – величина положительная), корень $v=18$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 18 км/ч.

Задание 21. Решить задачу.

№22 Пусть x – $V_{лодки}$ (км/ч)

тогда $x+4$ – $V_{по\ течению}$ (км/ч)

$x-4$ – $V_{против\ течения}$ (км/ч)

$$\cancel{\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2}$$

$$\cancel{\frac{77(x+4) - 77(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2}$$

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} - 2 = 0$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{(x-4)(x+4)} = 0 \quad \text{О.Д.З.: } x \neq 4,\ x \neq -4$$

$$77x + 308 - 77x + 308 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$-2x^2 + 32 + 616 = 0$$

$$2x^2 = 648$$

$$x^2 = 324$$

$x_1 = 18$ $x_2 = -18$ (не подходит по смыслу)

18 км/ч – $V_{лодки}$

Ответ: 18 км/ч

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

0 баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера

Задание 21. Решить задачу.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22

v	t	S
$x-4$ км/ч	$\frac{77}{x-4}$ ч	77 км
$x+4$ км/ч	$\frac{77}{x+4}$ ч	77 км

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$77(x+4) - 77(x-4) = 2(x^2-16)$$

$$77x + 308 - 77x + 308 = 2x^2 - 32$$

$$616 = 2x^2 - 32 \quad |:2$$

$$308 = x^2 - 16$$

$$324 = x^2$$

$$x = \pm 18$$

Ответ: 18 км/ч

1 балл

Задание 21. Решить задачу.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4$; $x\neq -4$

$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$

$77\cdot 8-2x^2+32=0$

$616-2x^2+32=0$

$2x^2-648=0$

$x^2=324$

$x_1=18$

$x_2=-18$

Ответ: 18

0 баллов

Задание 21. Решить задачу.

№ 22

$S = 77$

$t_{по\ теч}$ на 2 ч $< t_{против\ теч}$

$V_{теч} = 4$ км/ч

$V_л - ?$

Решение:

Пусть $x - V_л$, тогда $x+4 = V_{по\ теч}$, $x-4 = V_{против\ теч}$

$$\frac{77}{x+4} + 2 = \frac{77}{x-4} \quad \Big| \cdot (x+4)(x-4)$$

$$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$$

$$2x^2 - 648 = 0$$

$$x^2 - 324 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{324}$$

$x_1 = 18$ $\quad x_2 = -18$ не подходит по условию

Ответ 18 км/ч

0 баллов

Задание 21. Решить задачу.

Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

№ 21.

	S	V
1	240	x+20
2	240	x

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = +1$$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 - 20x}{x^2+20x} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 20x + 4800}{x^2+20x} = 0 \quad | \cdot (x^2+20x); \quad ОДЗ: x \neq 0;\ x \neq 20$$

$$-x^2 - 20x + 4800 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot (-1) \cdot 4800 = 400 + 19200 = 19600 = 140^2$$

$$x_1 = \frac{20+140}{-2} = \frac{160}{-2} = -80 \text{ (не удов. усл. зад.)}$$

$$x_2 = \frac{20-140}{-2} = \frac{-120}{-2} = +60$$

~~Ответ~~ $V_1 = 80$ км/ч   Ответ: $V_1 = 80$ км/ч

0 баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера

Задание 21. Решить задачу.

Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.
Ответ: 80 км/ч.

№22

	Скор.	Время	Расстояние
I автом	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$\frac{240}{x-20} - \frac{240}{x} = 1$ $\qquad$ $\frac{240x - 240x - 240\cdot 20}{x(x-20)} = 1$

$x^2 - 20x = 4800$

$x^2 - 20x - 4800 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -60 \text{ (не удв.)} \\ x_2 = 80 \end{array}\right.$

Ответ: 80 км/ч

0 баллов

Задание 22. Построить график функции

<u>Основные проверяемые требования к математической подготовке:</u>

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели.

Критерии оценивания

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев. Перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя: масштаб, содержательная таблица значений или объяснение построения, **выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами**.

22 Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

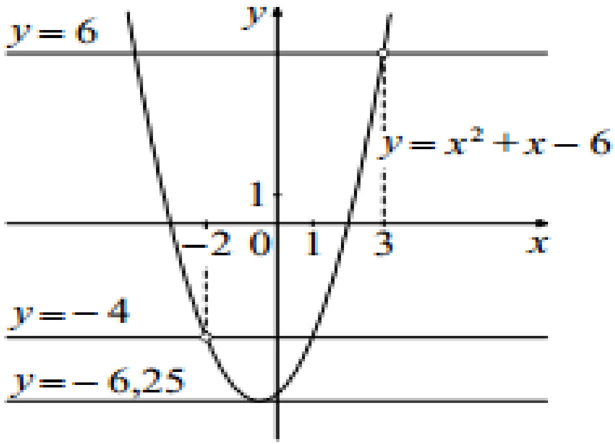
$$x^4-13x^2+36=\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

При $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид:

$y=x^2+x-6$; её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2;-4)$ и $(3;6)$.

Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$.

Поэтому $c=-6,25$, $c=-4$ или $c=6$.



Ответ: $c=-6,25$; $c=-4$; $c=6$.

Задание 22. Построить график функции

1. **ВАЖНО!!!** При построении графика функции обязательно должны быть прорисованы хотя бы пять контрольных точек (кроме линейной функции), чтобы был виден четкий характер рисунка. Иначе, ноль баллов.

2. Самая распространённая и недопустимая ошибка. Слева или справа график обрывается заштрихованной точкой, а в области определения ограничения нет. Такой график также будет оценён в ноль баллов.

3. И самое главное. Нельзя забывать про область определения. Выколотые точки – это главные точки графика. Иначе, ноль баллов.

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

Разложим числитель дроби на множители: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Пусть $x^2 = k$, $k \geq 0$, тогда $k^2 - 13k + 36 = 0$

D= $b^2 - 4ac$ =169 – 144=25>0, 2 корня

$k_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{13+5}{2} = 9$, $x^2 = 9$, или $x^2 = 4$,

$k_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{13-5}{2} = 4$, $x = 3$, $x = 2$,

$x = -3$; $x = -2$;

Функция принимает вид: $y = \frac{(x-3)(x+3)(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = (x+3)(x-2) == x^2 + x - 6$, при условии, что $x \neq -2$ и $x \neq 3$.

График – парабола, a=1> 0 – ветви направлены вверх;

вершина $m = \frac{-b}{2a} = -0{,}5$; $n = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) - 6 = -6{,}25$;

точки пересечения с: Ox: $y=0$, тогда $x^2 + x - 6 = 0$,

$x_1 = -2$, (–2;0) выколотая точка,

$x_2 = 3$, (3;0) выколотая точка,

Oy: $x=0$, тогда $y=-6$ (0; –6).

Построим график функции (рис. 1)

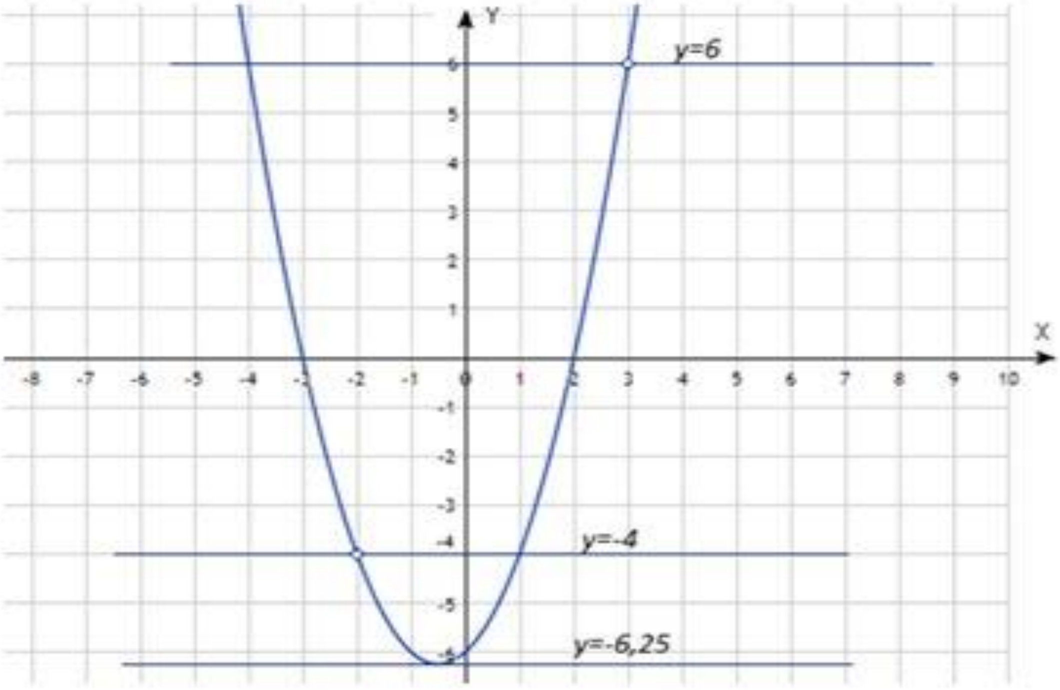


Рис 1. График функции $y = x^2 + x - 6$

Прямая $y=c$, параллельна Ox, имеет с графиком ровно одну общую точку при $c=-6{,}25$; $c=-4$; $c=6$.

При $c<-6{,}25$ общих точек нет.

При $c \in (-6{,}25; -4) \cup (-4;6) \cup (6; +\infty)$ – две общие точки.

Ответ: при $c=-6{,}25$; $c=-4$; $c=6$.

Постройте график функции $y=\frac{(x^2-x)|x|}{x-1}$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение:

Разложим числитель дроби на множители:

$y=\frac{(x^2-x)|x|}{x-1}=\frac{x(x-1)|x|}{x-1}=x|x|$, при $x-1\neq0$, где $x\neq1$.

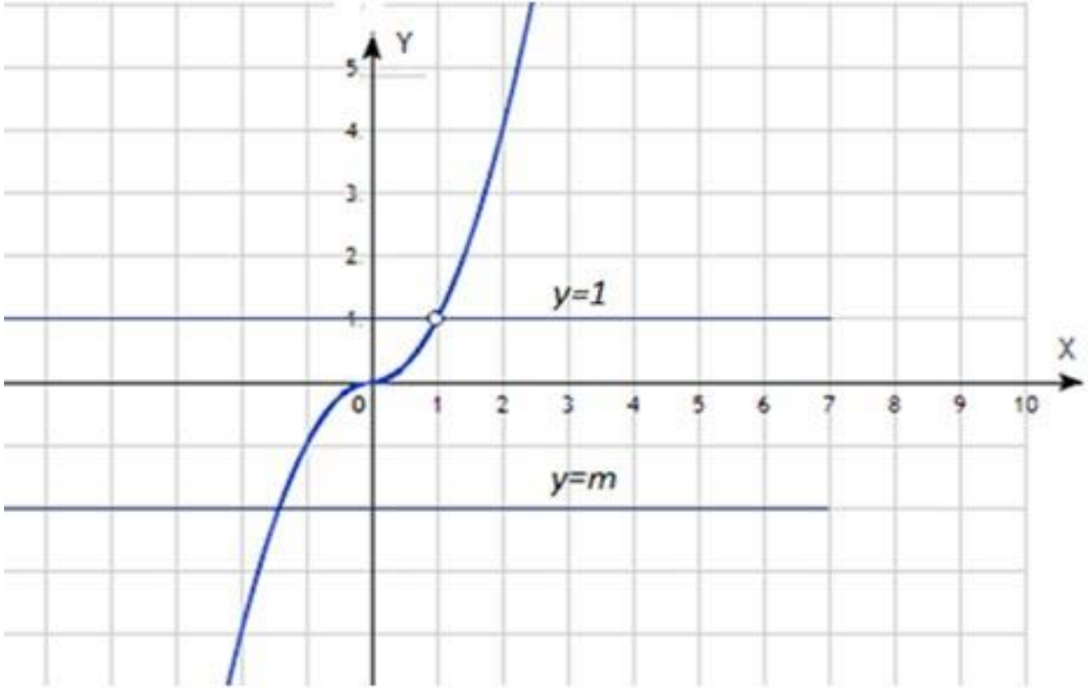
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

$y=x^2$, парабола,

$a=1>0$ – ветви вверх

$y=-x^2$, парабола,

$a=1<0$ – ветви вниз



Прямая y=m, параллельная Ox, при m<1 и m>1 имеет с графиком функции ровно одну общую точку; при m=1 – ни одной общей точки.

Ответ: при m=1.

Типичные ошибки

- Не показывают нахождение значений параметра m графическим способом (**не чертят прямые, заданные уравнением y=m, или не описывают их построение**).
- Отсутствуют деления на координатных осях, в результате чего график построен схематично и не проходит через точки, взятые в таблице значений.
- Запись не соответствует построению, например, пишут: построим параболу, а строят ее часть и т.д..
- Путают линейную функцию с функцией прямой пропорциональной зависимости.
- Отсутствие таблиц значений для построения графиков, либо значения переменной(ых) найдены с ошибкой.
- Построение части графика функции, не являющейся линейной, по двум точкам и наоборот, построение части графика линейной функции по трем и более точкам;

График линейной функции строить только по 2 точкам
Если в таблице 3 точки и отмечены на плоскости 3 точки то -1б
Если в таблице 3 точки, а отмечено в плоскости 2 , то не снимается балл
Если в таблице 2 точки а на графике 3, то не снимаем балл

График квадратичной функции допускается 3 и более точки, включая вершину параболы.

График обратной пропорциональной зависимости минимум 3 точки, если меньше, то 0 баллов.

Отсутствие таблицы - 0 баллов
За отсутствие един. отрезка – 0 баллов

За отсутствие подп. осей не снимается балл.

Нет построенной выколотой точки – 0 баллов.

Пример

Постройте график функции $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких

значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

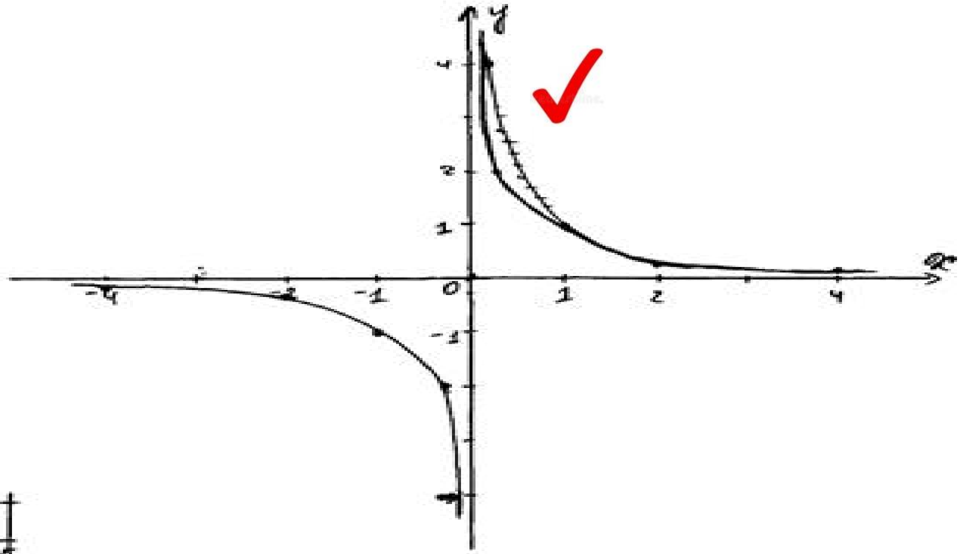
23) $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$

1) $9x^2 + x \neq 0$

$x(9x+1) \neq 0$

$\boxed{x \neq 0}$ $\quad 9x \neq -1$

$\boxed{x \neq -\frac{1}{9}}$



2) $y = \frac{\cancel{(9x+1)}}{x\cancel{(9x+1)}}$

$y = \frac{1}{x}$

x	1	2	-1	-2	4	-4
y	1	0,5	-1	-0,5	0,25	-0,25

3) $\frac{kx}{1} = \frac{1}{x}$

$kx^2 = 1$ Если $y = 1$, а $x^2 = \left(-\frac{1}{9}\right)^2$, то:

$k \times \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = 1$

$k \times \frac{1}{81} = 1$

$\frac{k}{81} = \frac{1}{1}$

$k = 81$ Ответ: при $k = 81$

0 баллов

№ 23

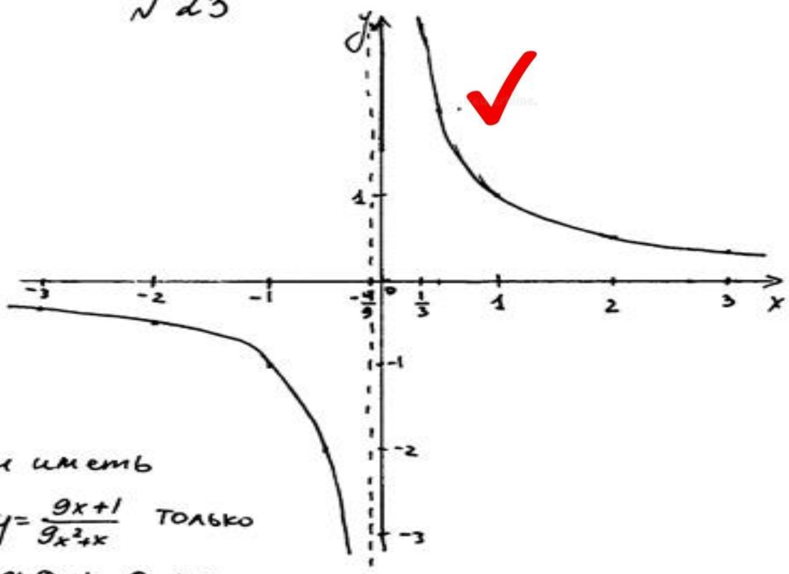
$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \frac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \frac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечение график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$. Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \mid \cdot (-9)$

$k = 81.$

Ответ: 81.

0 баллов

23. $y = \frac{9x+1}{9x^2+x} = \frac{\cancel{9x+1}\ 1}{x(\cancel{9x+1})} = \frac{1}{x}$.

Графиком данной функции является гипербола.

ОДЗ: Построим график функции

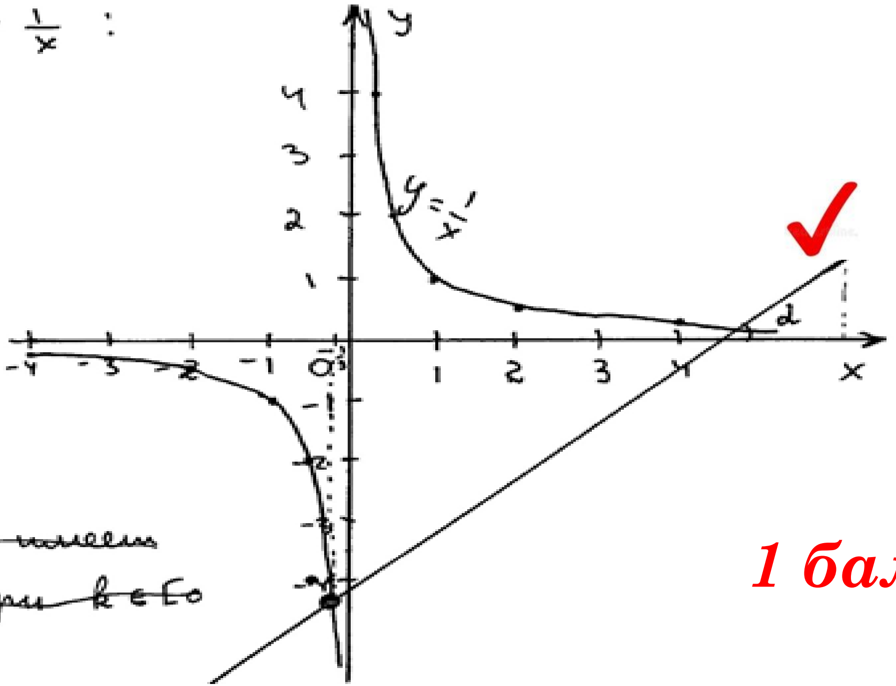
$9x^2 + x \neq 0$. $y = \frac{1}{x}$:

$x(9x+1) \neq 0$

$x \neq 0 \quad 9x \neq -1$

$x \neq -\frac{1}{9}$.

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	1	0,5	0,25	-1	-0,5	-0,25



~~[illegible]~~

~~$y = kx$ прямая $y = kx$ имеет~~

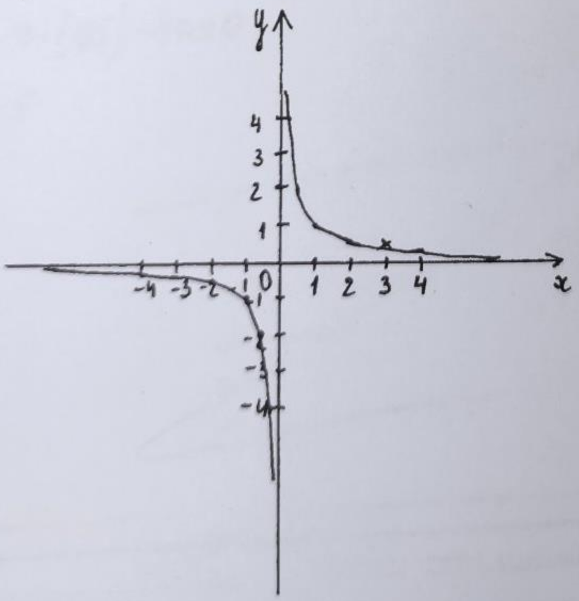
~~одну общую точку при $k \in [0$~~

1 балл

Задание 22

$$y = \frac{4x-5}{4x^2-5x} = \frac{4x-5}{x(4x-5)} = \frac{1}{x}$$

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	$0,25$	$0,5$	1	2	4
y	$-0,25$	$-0,5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0,5$	$0,25$



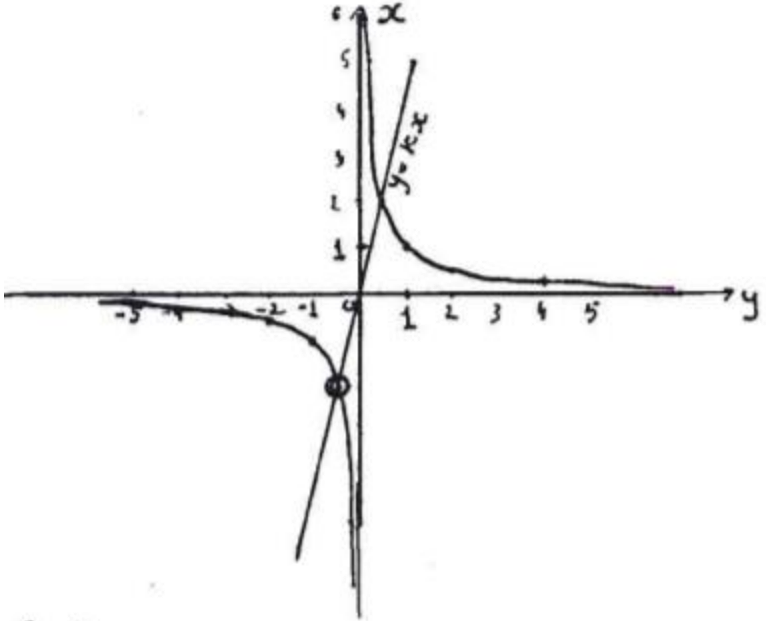
$y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k \in (-\infty; 0) \cup ($

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

0 баллов

$y = \frac{4x-5}{4x^2-5x} = \frac{(4x-5)}{x(4x-5)} = \frac{1}{x}$ | ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq -0{,}5$ ✓

x	-5	-4	-2	-1	-0,5	-0,2	0,2	0,5	1	2	4	5
y	-0,2	-0,25	-0,5	-1	-2	-5	5	2	1	0,5	0,25	0,2



Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при значении $k=4$.

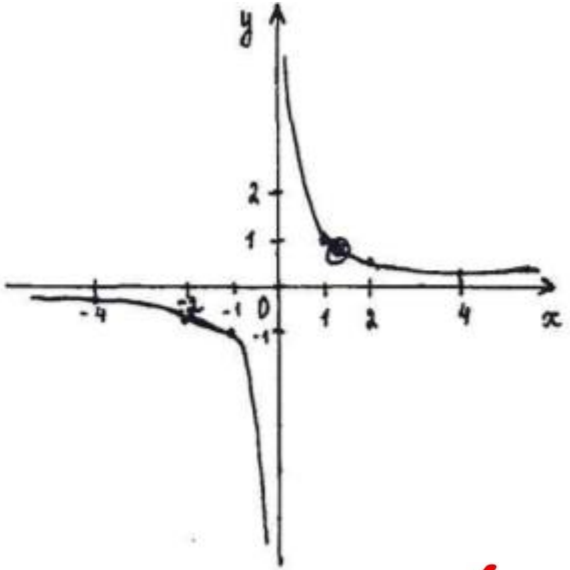
0 баллов

22. $y = \dfrac{4x-5}{4x^2-5x}$; $x \neq 0$; $x \neq \frac{5}{4}$

$\dfrac{4x-5}{4x^2-5x} = \dfrac{4x-5}{x(4x-5)} = \dfrac{1}{x}$

$y = \dfrac{1}{x}$; $x \neq 0$

x	-4	-2	-1	1	2	4	$\frac{5}{4}$
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$



Прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно 1 общую точку при $k \in (-\infty; 0] \cup [0; \frac{4}{5}) \cup (\frac{4}{5}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0; \frac{4}{5}) \cup (\frac{4}{5}; +\infty)$

1 балл

Пример

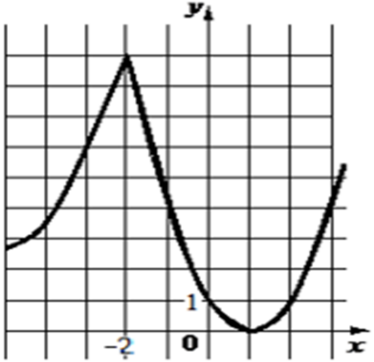
23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\ge -2$.



Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=0$ и при $m\ge 9$.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

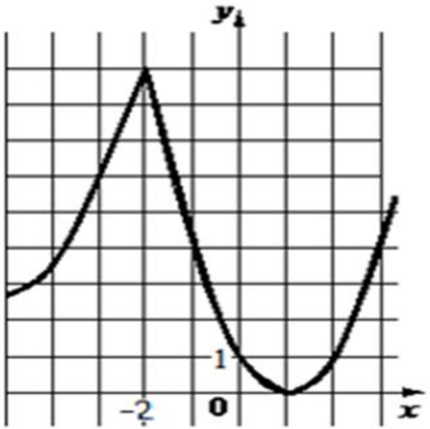
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	-1	-2	-3	-6	-9	-18
y	18	**9**	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

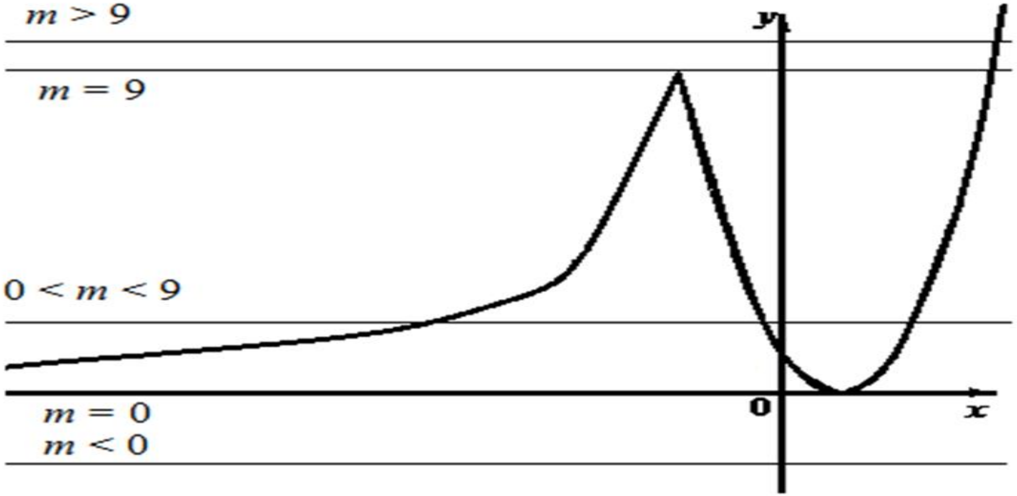
Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	**9**	4	1	0	1	4	9



Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

(23) $y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geqslant -2) \\ -\dfrac{18}{x} & (x<-2) \end{cases}$

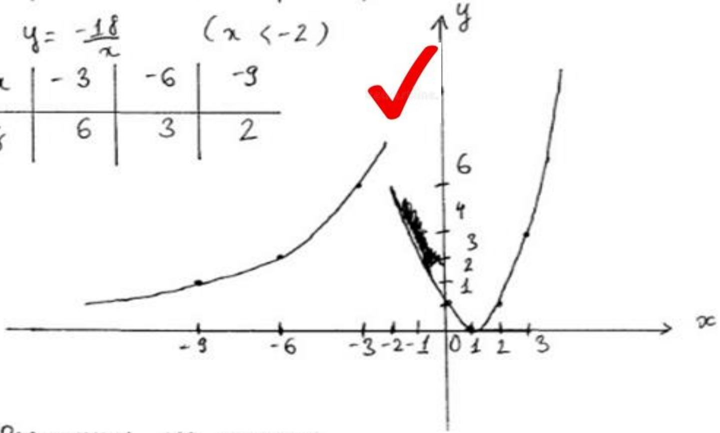
$y=x^2-2x+1 \quad (x\geqslant 2)$

$x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

x	−1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

$y=-\dfrac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	−3	−6	−9
y	6	3	2



Расмотрим на график.

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки

$x=-2 \Rightarrow m=y=9$

Ответ: 9

0 баллов

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} & ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

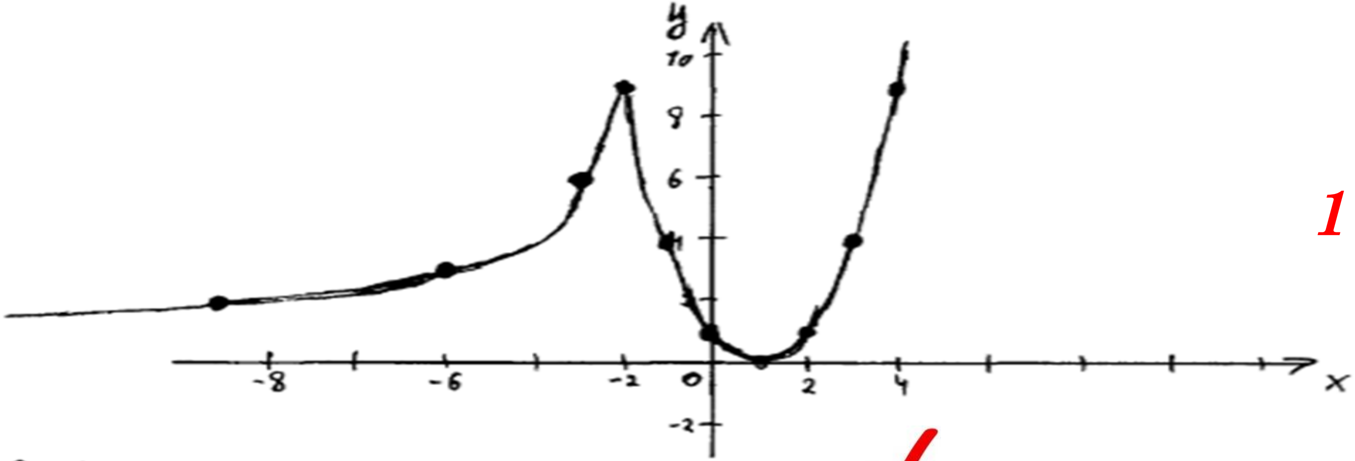
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2 - 2x + 1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



1 балл

Ответ: при $m = 0$ и $m \in [9; +\infty)$ ✓

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{при } x \geq -2 \quad (1)\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{при } x<-2 \quad (2)\end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$y_0 = (1)^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$(1; 0)$ — вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y = -\frac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9

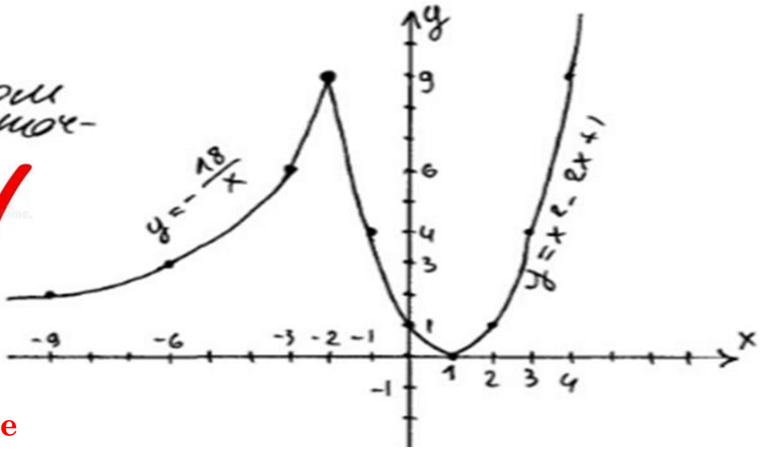
1 балл

$y = m$

m — ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ — m



Не показывают нахождение значений параметра m графическим способом (**не чертят прямые, заданные уравнением y=m, или не описывают их построение**).

Задания 23-25. Геометрические задачи.

Зачастую учащимся снижают один балл за неполные объяснения. Перечислим некоторые пункты, на которые следует обратить внимание.

- При нахождении накрест лежащих, односторонних или соответственных углов указывать названия параллельных прямых и секущей.
- Писать полностью равнобедренный или равносторонний треугольник, или сокращать так, чтобы было понятно.
- Обязательно указывать прямоугольный треугольник для применения теоремы Пифагора или равнобедренный треугольник при использовании свойств равнобедренного треугольника.
- Если вы используете какое-то (например, непрописанное в учебнике) геометрическое утверждение, то полностью его сформулируйте. Например: Биссектриса угла в параллелограмме отсекает от него равнобедренный треугольник.

- И наличие любого неверного утверждения в решении или доказательстве геометрической задачи ведёт к оцениванию в ноль баллов.

Основные проверяемые требования к математической подготовке:

- **23.** Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами
- **24.** Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения
- **25 .** Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

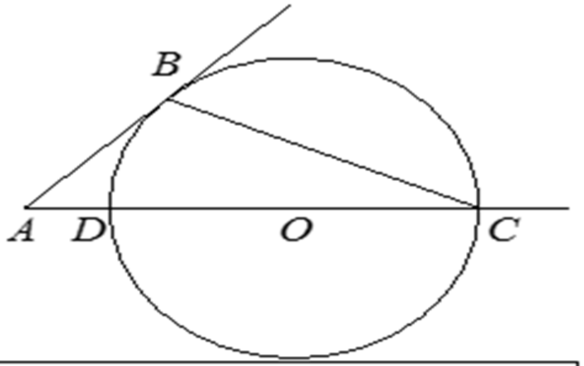
24 Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3{,}6)$, откуда

$x = 10$.

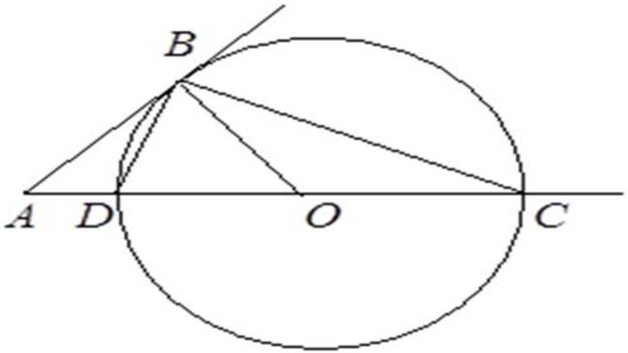


Ответ: 10.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB=8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.
Треугольник BOC равнобедренный, тогда $\angle OCB = \angle OBC$.
Треугольник BOD равнобедренный, тогда $\angle ODB = \angle OBD$.
Прямая AB касается окружности в точке B, следовательно, радиус OB перпендикулярен AB.
Получаем:
$\angle ABD = 90° - \angle DBO = 90° - \angle BDC = \angle BCD$.
Треугольники ABD и ACB, имеющие общий угол BAC и равные углы ABD и BCD, подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$.



Пусть $AC = x$, получаем: $AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3,6)$;
$x^2 - 3,6x - 64 = 0$, $x = 10$ или $x = -6,4$. Условию задачи удовлетворяет $x = 10$, $AC = 10$.
Ответ: 10.

2 балла

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB=8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Прямая AB касается окружности, следовательно, радиус OB, равный 1,8, перпендикулярен AB.

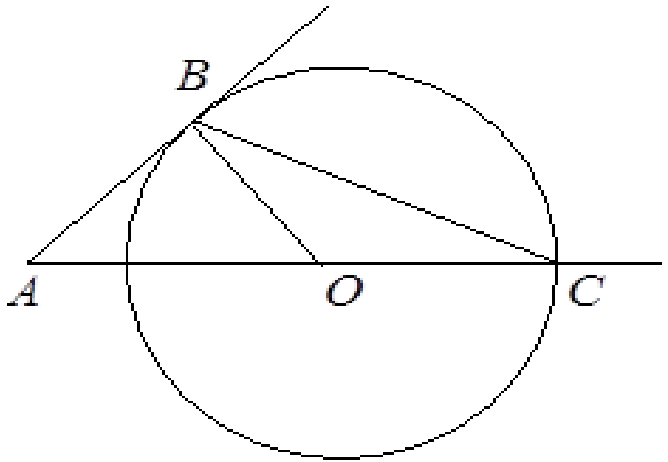
Треугольник AOB прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AO^2 = AB^2 + OB^2$; $AO^2 = 8^2 + 1{,}8^2$;

$AO^2 = 67{,}24$; $AO = 8{,}2$.

$AC = AO + OC$, где OC – радиус, тогда $AC = 8{,}2 + 1{,}8 = 10$.

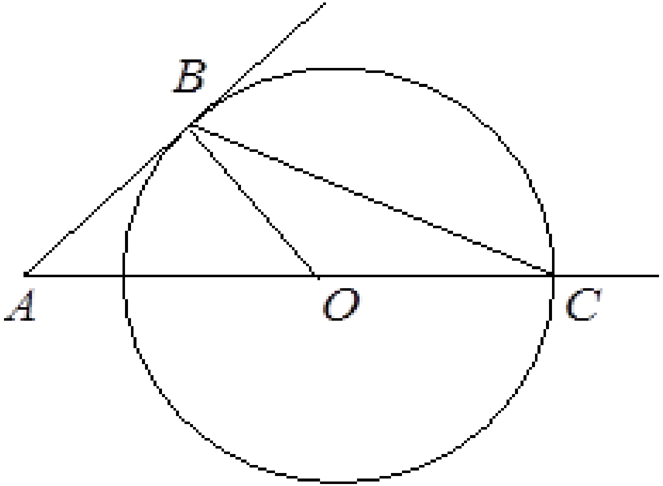
Ответ: 10.



2 балла

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение



Треугольник AOB ? прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AO^2 = AB^2 + OB^2$; $AO^2 = 8^2 + 1{,}8^2$;

$AO^2 = 67{,}24$; $AO = 8{,}2$.

$AC = AO + OC$, где OC – радиус, тогда

$AC = 8{,}2 + 1{,}8 = 10$.

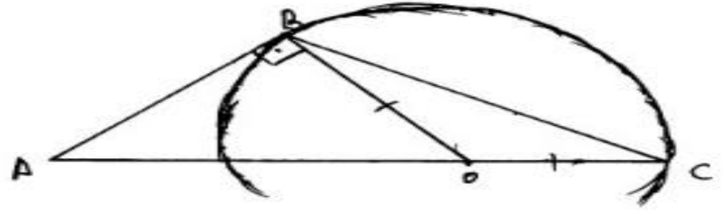
Ответ: 10.

1 балл

Дано:
т. $O \in AC$
$d = 3,6$
$AB = 8$

$AC - ?$

№ 24.



Решение:

т.к. окружность проходит через т. B и т. C, то OB и OC – радиусы => $OB = OC = \frac{d}{2} = 1,8$

т.к. окружность касается прямой AB в т. B => AB – касательная к окружности => $OB \perp AB$

По теореме Пифагора находим в ~~[illegible]~~ прямоугольном треугольнике ABO гипотенузу AO.

$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2}$

$AO = \sqrt{8^2 + 1,8^2} = 8,2$

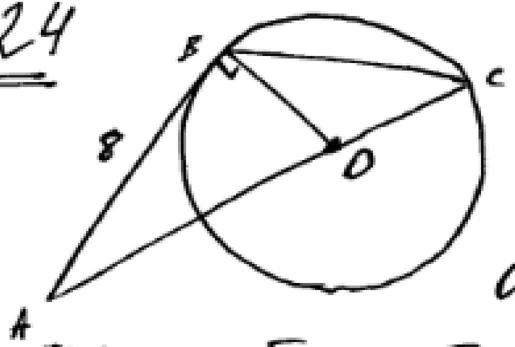
$AC = AO + OC$ (по св-ву отрезков)

$AC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: $AC = 10$.

2 балла

№ 24



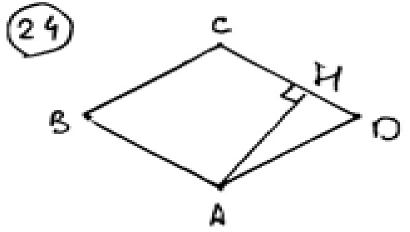
D= 3.6

Пусть O – центр окружности.
Тогда ∠OBA = 90° ~~т.к.~~, так как
OB – отрезок проходящий через центр
окружности и точку касания. Значит OB – радиус
Значит $OB = \frac{1}{2}D = 3,6 : 2 = 1,8$. Также радиусом явля-
ется OC = 1,8. AO – гипотенуза △ ABO, значит AO =
$= 1,8^2 + 8^2 = 64 + 3,24 = 67,24$. Значит AC = 67,24 + 1,8 =
= 68,04, так как AO + OC = AC. Ответ: 68,04.

0 баллов

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 2 и 24, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Дано:

ABCD - ромб

AH - высота

CH = 2

DH = 24

AH - ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны $CD = AD = CH + DH$

$AD = 26$

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на $\triangle AHD$)

$AH = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

1 балл

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.

№24.

Дано:
ABCD-ромб
AH-высота
DH = 24
CH = 2

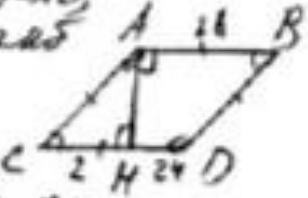
Найти: AH=?

Решение:

CD=CA=BD=AB, т.к. ABCD-ромб

⇓

CH+HD=26



CD=AB=AC=BD=26, ~~т.к~~

~~Ответ~~ (по теор. Пифагора

$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$

$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$

Ответ. $4\sqrt{42}$.

0 баллов

Типичные ошибки

- Чертеж не соответствует условию задачи.
- Допускают ошибки в чертежах, обозначение разных углов одинаковыми дугами, «пустые» чертежи.
- Отсутствие чертежа при решении геометрической задачи, отсутствие дано или его части.
- На чертеже неверно определяют центр описанной окружности.
- Не записывают обоснования к действиям геометрической задачи, отсутствуют ссылки на свойства, признаки, теоремы.
- Допускают ошибки в пояснениях, например, используют признак равностороннего треугольника, а записывают по определению.

№23 Дано:

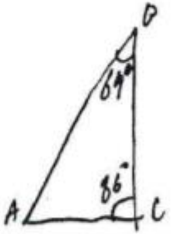
$\angle B = 64^\circ$

$\angle C = 86^\circ$

$R = 13$

Найти:

BC - ?



1) $BC = 2R = 13 \cdot 2 = 26$

Ответ: $BC = 26$

0 баллов

23 Дано:

$\triangle ABC$ - треуг.

$\angle B = 71^\circ$

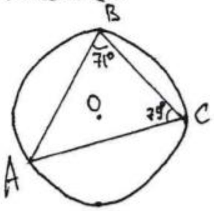
$\angle C = 79^\circ$

$R = 8$

Окруж. с ц. O

BC - ?

Решение:



$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 71^\circ - 79^\circ = 30^\circ$

$\frac{BC}{\sin A} = 2R$

$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = 2R$

$\frac{BC}{0,5} = 2R$

$BC = 2R \cdot 0,5 = 2 \cdot 8 \cdot 0,5 = 16 \cdot 0,5 = 8$

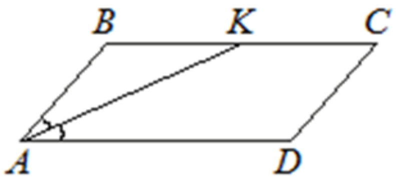
Ответ: $BC = 8$.

1 балл

24 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=12$, $CK=16$.

Решение.

Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK, AK — биссектриса угла BAD.



Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

По формуле периметра параллелограмма находим:

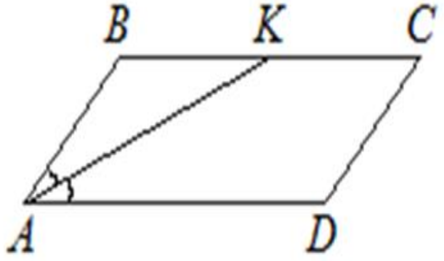
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

Ответ: 80.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.



Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK.

AK — биссектриса угла BAD.

Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.

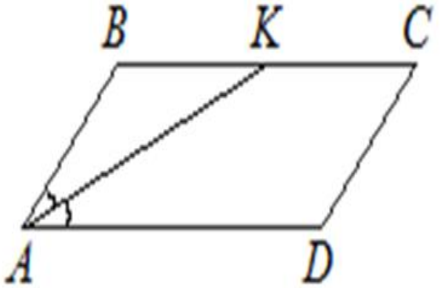
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

Ответ: 80.

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.

Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. AK — биссектриса угла BAD. Следовательно, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

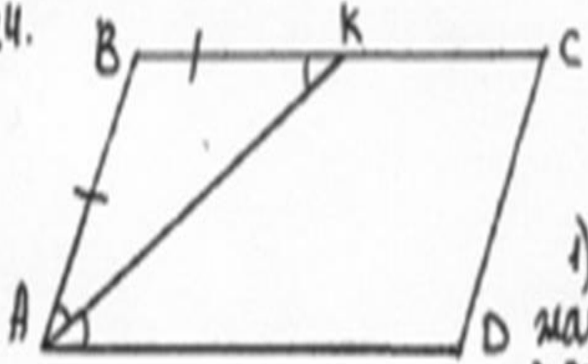


В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

Ответ: 80.

24.



Дано: AK - биссектриса; $BK = 4$; $CK = 19$

Найти: P_{ABCD} ?

Решение:

1) $\angle BAK = \angle KAD = \angle BKA$ - т.к. биссектриса AK и накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$.

2) Тогда $\triangle ABK$ - равнобедр. Значит $AB = BK = 4$.

3) $BC = AD = BK + KC = 4 + 19 = 23$

4) $P = AB + BC + CD + AD = 4 + 23 + 4 + 23 = 54$

Ответ: $P_{ABCD} = 54$

№25.

Дано:

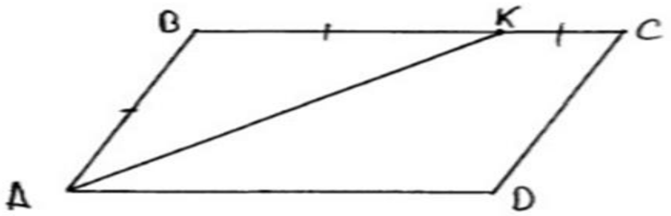
ABCD-параллелограмм

$BC = 2AB$

K – середина BC

Доказать:

AK – биссектриса угла BAD



Доказательство:

т.к. K – середина BC, то $BK = KC$ =>

$BK = \frac{1}{2}BC = AB$ => $\triangle ABK$ - равнобедренный

$\angle BAK = \angle BKA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)

Рассмотрим углы BKA и KAD:

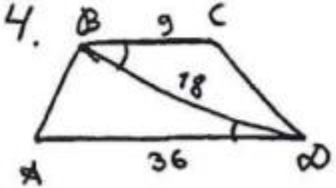
$\angle BKA = \angle KAD$ (как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK).

$\angle BAK = \angle BKA = \angle KAD$ =>

$\angle BAK = \angle KAD$ => AK - биссектриса $\angle BAD$ (по признаку)

ч.т.д.

24.



Дано: $ABCD$ - трапеция, $BC = 9$, $AD = 36$,

$BD = 18$

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

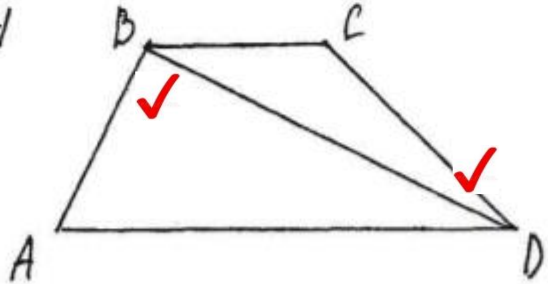
Доказательство: $\angle BDA = \angle CBD$

$$\left.\begin{array}{l} \angle BDA = \angle CBD \\ \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BDA \sim \triangle CBD \text{ (по II приз)}$$

ч.т.д.

0 баллов

№24



Дано: ABCD – трапеция, BC = 9, AD = 36, BD = 18

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Доказательство.

1) Рассмотр. $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$

а) $\angle BDA = \angle CBD$

б) $\angle ABD = \angle DCB$ | – как накрест лежащие при пересечении $BC \parallel AD$ сек. BD

в) BD – общ.

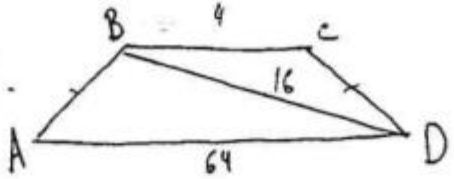
г) $\triangle CBD \sim \triangle BDA$, ч.т.д. – по 2 углам

Ответ: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

0 баллов

0 баллов

24.



Дано:

ABCD - трапеция

BC = 4, AD = 64

BD - 16

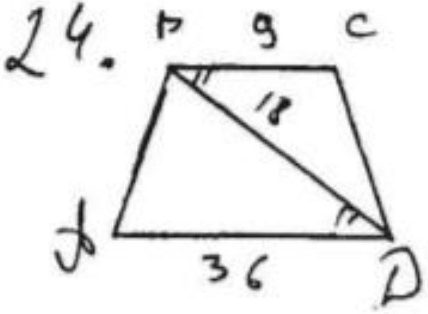
Доказать

$\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Док-во.

AD ∥ BC, значит прямая BD по свойству параллельности прямых отдаёт ∠CBD = ∠BDA. Сторона AB = CD. Значит $\triangle CBD \sim \triangle BDA$ по двум сторонам и углу между ними ✓

24.



Дано:

ABCD - трап.

BC = 9, BD = 18,

AD = 36

Док-ть $\triangle BCD \sim \triangle AB$

Док-во.

$\angle CBD = \angle ADB$, накр. леж.

$\frac{AD}{DB} = \frac{BD}{CB} = 2 = k \Rightarrow$

$\triangle BCD \sim ABD$.

? баллов

Типичные ошибки

- Ошибки при выполнении чертежа: изображение трапеции вместо параллелограмма.
- Применение свойств несуществующей средней линии параллелограмма;
- Путают признаки равенства треугольников с признаками подобия треугольников.
- Используют не существующий признак равенства треугольников по трем углам, либо признак формулируют неверно, например, по двум углам и стороне между ними.
- При доказательстве равенства элементов записывают неграмотные обоснования.
- Не указывают признак по которому доказывают равенство треугольников; - Производят подмену геометрических понятий: путают отрезок и прямую.
- Не указаны параллельные прямые при которых накрест лежащие углы равны, либо секущая при которой накрест лежащие углы образованы, либо неверное указание пары накрест лежащих углов (нет обоснования параллельности прямых).

Типичные ошибки

- Обозначают накрест лежащие углы одной заглавной буквой.
- Необоснованный вывод равенства двух отрезков, имеющих общую точку, которая является так же точкой пересечения диагоналей параллелограмма (частный случай переносится на решение общей задачи).
- Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют центром или серединой параллелограмма.
- Применяют ошибочное утверждение о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма равноудалена от сторон параллелограмма.
- Из доказательства равенства определенной пары треугольников делают вывод о равенстве отрезков, не являющихся элементами этих треугольников.
- Применяют факты, которые требуют доказательства, без таковых.
- Путают названия углов, например, вместо накрест лежащего смежный, или вместо вертикальных смежный, или вместо вертикальных односторонние.
- Ошибки в использовании свойств параллелограмма.

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ФИПИ

Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего образования

Тема 2. Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 20 и 21)

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н., ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

4 февраля 2021 года

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2021 года

МАТЕМАТИКА

Москва
2021

Спасибо за внимание!