

Задачи на оптимизацию: пенсионный фонд

Пример 1. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение:

В конце года t — t^2 тыс. руб,
 $(t + 1)$ — $(t + 1)^2$ тыс. руб.

Пусть y — прибыль в % по сравнению с предыдущим годом.

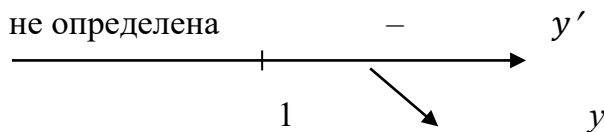
$$y = \frac{(t + 1)^2 - t^2}{t^2} \cdot 100\% = \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2}{t^2} \cdot 100\% = \frac{2t + 1}{t^2} \cdot 100\%.$$

Исследуем функцию $y = \frac{2t+1}{t^2} \cdot 100\%$ при $t \geq 1$ на монотонность.

$$y' = \frac{2t^2 - 2t(2t + 1)}{t^4} \cdot 100\% = \frac{2t^2 - 4t^2 - 2t}{t^4} \cdot 100\% = \frac{-2t^2 - 2t}{t^4} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{-2t - 2}{t^3} \cdot 100\%$$

$$y' = 0 \text{ при } -2t - 2 = 0, \quad t = -1.$$



Функция $y = \frac{2t+1}{t^2} \cdot 100\%$ убывает при $t \in [1; +\infty)$. Значит, прибыль в процентах уменьшается с каждым годом.

Сравним прибыль в % со ставкой банка:

$$\frac{2t+1}{t^2} \cdot 100\% \leq 25\% \quad | \cdot t^2 > 0$$

$$4(2t + 1) \leq t^2$$

$$-t^2 + 8t + 4 \leq 0$$

$$t^2 - 8t - 4 \geq 0$$

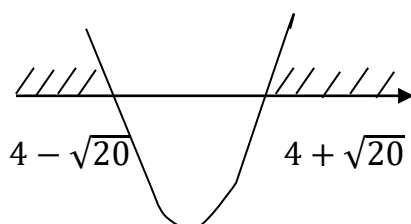
$$h(t) = t^2 - 8t - 4$$

$$h(t) = 0$$

$$t^2 - 8t - 4 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$t = 4 \pm \sqrt{20}$$



$$\begin{cases} t \leq 4 - \sqrt{20}, \\ t \geq 4 + \sqrt{20}, \\ t \geq 1. \end{cases} \quad t \in [4 + \sqrt{20}; +\infty).$$

$$4 < \sqrt{20} < 5, \quad 8 < 4 + \sqrt{20} < 9$$

Следовательно, чтобы получить максимальную прибыль надо продать акции в конце 9-го года.

Ответ: 9.

Пример 2. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят 10*t* тыс. рублей в конце года *t* (*t* = 1; 2; ...). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение:

В конце года *t* ценные бумаги стоят 10*t* тыс. руб,
 (т + 1) – 10(т + 1) тыс. руб.

Пусть *y* – прибыль в % по сравнению с предыдущим годом.

$$y = \frac{10(t+1) - 10t}{10t} \cdot 100\% = \frac{10t + 10 - 10t}{10t} \cdot 100\% = \frac{10}{10t} \cdot 100\% = \frac{1}{t} \cdot 100\%,$$

$$t \geq 1.$$

$$y' = -\frac{1}{t^2} \cdot 100\% < 0.$$

Функция $y = \frac{1}{t} \cdot 100\%$ убывает при $t \geq 1$. Значит, прибыль в % уменьшается с каждым годом.

Сравним прибыль с процентной ставкой банка:

$$\frac{1}{t} \cdot 100\% \leq 24\% \quad | \cdot t > 0$$

$$100 \leq 24t$$

$$6t \geq 25$$

$$t \geq 4\frac{1}{6}$$

Значит, в конце 5-го года следует продать ценные бумаги.

Ответ: 5.

Пример 3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года *t* (*t* = 1; 2; 3; ...). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты

показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение:

В конце года t ценные бумаги стоят t^2 тыс. руб,
 $(t + 1)$ — $(t + 1)^2$ тыс. руб.

Пусть y — прибыль в % по сравнению с предыдущим годом.

$$y = \frac{(t + 1)^2 - t^2}{t^2} \cdot 100\% = \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2}{t^2} \cdot 100\% = \frac{2t + 1}{t^2} \cdot 100\% = \\ = \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \cdot 100\%,$$

При $t \in [1; 25]$ функция убывает.

В конце 20 года прибыль 20^2 тыс. руб = 400 тыс. руб

21 года — 21^2 тыс. руб = 441 тыс. руб

22 года — 21^2 тыс. руб = 441 тыс. руб

$$\begin{cases} 400(r + 10) < 441, & \text{после 20 года} \\ 441(r + 1) > 484. & \text{после 21 года} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400r + 400 < 441, \\ 441r + 441 > 484. \end{cases} \quad \begin{cases} r < \frac{41}{400}, \\ r > \frac{43}{441}. \end{cases} \quad r \in \left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 30 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 20% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Ответ: 11.

2. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; 3; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответ: $\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{10}\right)$.