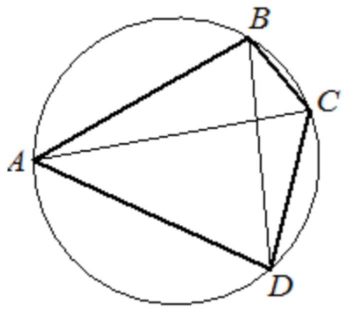
Решения задач ЕГЭ 2024

Содержание

Часть 1

№1.1 *(Дальний восток)*

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $56°$, угол CAD равен $52°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ

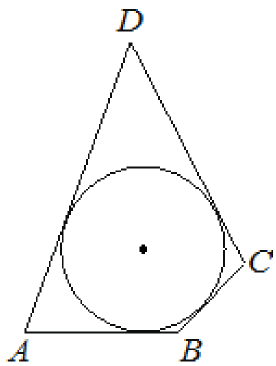
108

Решение

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABD + \angle CAD = 56° + 52° = 108°$$

№1.2 *(Дальний восток)*

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $CD = 9$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ

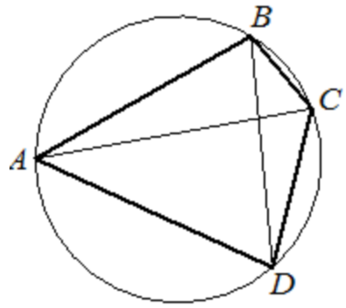
44

Решение

$$AD + BC = AB + CD$$
$$AD + BC = 22$$
$$P = 44$$

№1.3 *(Дальний восток)*

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $47°$, угол ABC равен $60°$. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



Ответ

13

Решение

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 60° - 47° = 13°.$$

№2.1 *(Дальний восток)*

Даны векторы $\vec{a}(17; 0)$ и $\vec{b}(1; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 12\vec{b}$.

Ответ

13

Решение

$\vec{a}(17; 0)$ и $\vec{b}(1; -1)$. Тогда координаты вектора $\vec{a} - 12\vec{b}$ равны $(5; 12)$. Значит, его длина равна

$$\left|\vec{a} - 12\vec{b}\right| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{13^2} = 13.$$

№2.2 *(Дальний восток)*

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Ответ

28

Решение

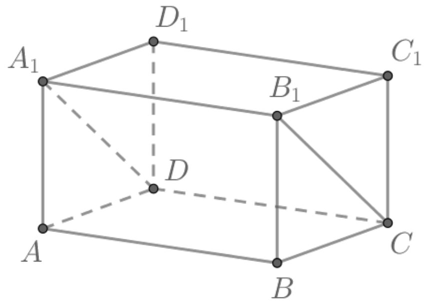
$\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3; 2 - 6) = (4; -4)$.

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (4; -4), \vec{c} = (4; -3),$$

значит
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = 4\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = 16+12 = 28.$$

№3.1 *(Дальний восток)*

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ

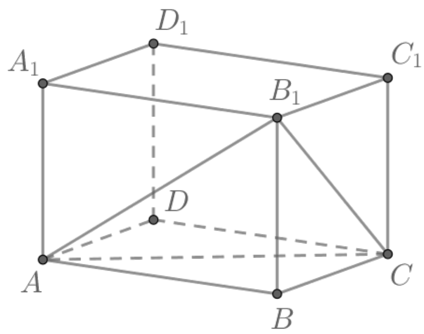
60

Решение

Многогранник, объем которого необходимо найти, является треугольной пирамидой, высота которой равна BB_1, а основание представляет собой прямоугольный треугольник ABC. Следовательно, этот объем равен
$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}\cdot BB_1\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 7 = 63.$$

№3.2 *(Дальний восток)*

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ

63

Решение

Многогранник, объем которого необходимо найти, является треугольной пирамидой, высота которой равна BB_1, а основание представляет собой прямоугольный треугольник ABC. Следовательно, этот объем равен

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 63.$$

№4.1 *(Дальний восток)*

В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 15 из них встречается вопрос по теме «Механика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Механика».

Ответ

0,4

Решение

Мы знаем общее количество билетов и количество билетов по теме «Механика», значит, можем найти количество билетов НЕ по теме «Механика»:

$$25 - 15 = 10.$$

Нас устроит любой попавшийся билет из этих 10:

$$P(\text{Билет НЕ по теме «Механика»}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

№4.2 *(Центр)*

В группе туристов 40 человек. С помощью жребия они выбирают шесть человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д, входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ

№5.1 *(Дальний восток)*

Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,9. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ

0,271

Решение

Найдём вероятность противоположного события, то есть что все лампы перегорят:

$$0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$1 - 0{,}729 = 0{,}271.$$

№5.2 *(Центр)*

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ

№6.1 *(Дальний восток)*

Найдите корень уравнения $\sqrt{4x-23} = 3$.

Ответ

8

Решение

$$4x - 23 = 9$$
$$4x = 32$$
$$x = 8$$

№6.2 *(Дальний восток)*

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81$.

Ответ

0,4

Решение

$$3^{-5x+6} = 3^4$$
$$-5x + 6 = 4$$
$$x = 0{,}4$$

№7.1 *(Дальний восток)*

Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\cos^2\frac{23\pi}{12} - 4\sqrt{3}\sin^2\frac{23\pi}{12}$.

Ответ

6

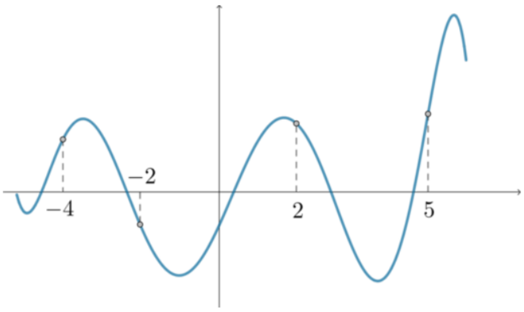
Решение

По формуле косинуса двойного угла $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Тогда

$$4\sqrt{3}\cos^2\frac{23\pi}{12} - 4\sqrt{3}\sin^2\frac{23\pi}{12} = 4\sqrt{3}\cos\frac{23\pi}{6} = 4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

№8.1 *(Дальний восток)*

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4;\ -2;\ 2;\ 5$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ

5

Решение

На промежутках возрастания функции производная положительна, на промежутках убывания — отрицательна, следовательно, нужно сравнить значение производной в точках на промежутках возрастания — в точках $x = -4$ и $x = 5$.

Значение производной в $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке x_0, следовательно, среди положительных значений оно больше в той точке, где угол наклона касательной больше. Если провести касательные к данному графику в точках $x = -4$ и $x = 5$, то угол наклона касательной в точке $x = 5$ будет больше, следовательно, и значение производной в этой точке будет больше.

№9.1 *(Дальний восток)*

Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 112 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ

7

Решение

Найдём, за какое время t, прошедшее от момента начала торможения, автомобиль пройдёт 112 метров:

$$30t - 2t^2 = 112 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 15t + 56 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &t = 7, \\ &t = 8. \end{aligned}\right.$$

Так как через $t = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ секунд автомобиль остановится, то 112 метров он пройдёт через 7 секунд после начала торможения.

№10.1 *(Дальний восток)*

Один маляр может покрасить забор за 45 часов, а второй маляр тот же забор — за 36 часов. За сколько часов маляры покрасят такой же забор, работая вместе?

Ответ

20

Решение

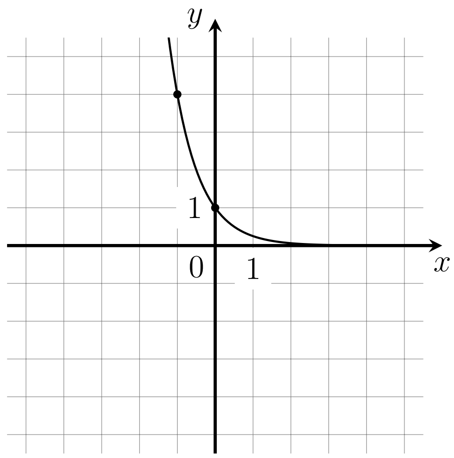
За час первый маляр красит $\frac{1}{45}$ забора, а второй маляр красит $\frac{1}{36}$ забора.

Вместе за час они красят $\frac{1}{45} + \frac{1}{36} = \frac{1}{20}$ забора.

Таким образом, для покраски забора малярам понадобится $1 : \frac{1}{20} = 20$ часов.

№11.1 *(Дальний восток)*

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-2)$.



Ответ

16

Решение

Найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(-1; 4)$, через которую проходит график:

$$f(-1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

Значит, мы восстановили уравнение функции, оно имеет вид

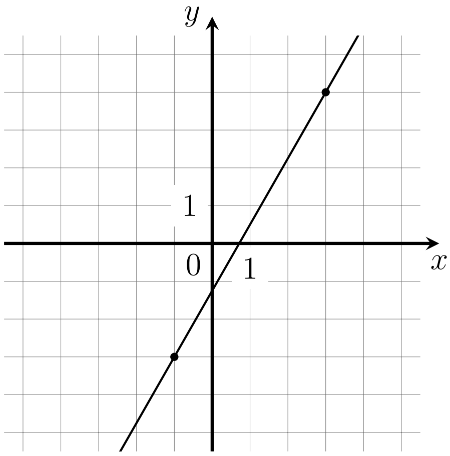
$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Тогда имеем:

$$f(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

№11.2 *(Дальний восток)*

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором выполнено $f(x) = -13{,}5$.



Ответ

-7

Решение

Определим коэффициенты k и b. Найдём k как тангенс угла наклона прямой:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Чтобы найти b, подставим одну из точек прямой в уравнение с уже найденным коэффициентом k. Подставим точку $(3; 4)$:

$$4 = 1{,}75 \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 5{,}25 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -1{,}25$$

Значит, функция имеет вид

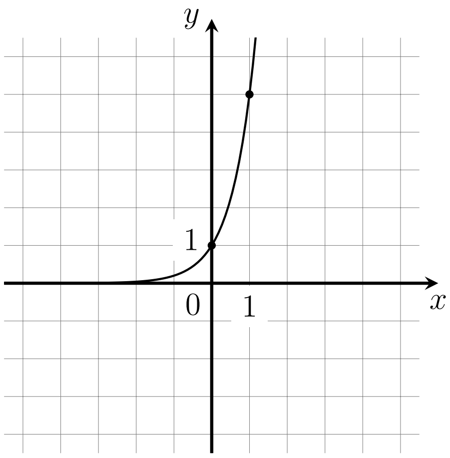
$$f(x) = 1{,}75x - 1{,}25$$

Имеем уравнение на x :

$$f(x) = -13{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}75x - 1{,}25 = -13{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = -54 \quad \Leftrightarrow \quad x = -7$$

№11.3 *(Дальний восток)*

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(2)$.



Ответ

25

Решение

Найдем основание a, подставив в уравнение функции точку $(1; 5)$, через которую проходит график:

$$f(1) = 5$$

$$a^1 = 5$$

$$a = 5$$

Значит, мы восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = 5^x.$$

Тогда

$$f(2) = 5^2 = 25.$$

№12.1 *(Дальний восток)*

Найдите точку максимума функции $y = 15 + 24x - 2 \cdot x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ

64

Решение

$$y' = 24 - 3\sqrt{x}$$

Тогда решим уравнение

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 - 3\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 64.$$

№12.2 *(Дальний восток)*

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 9) - 10x + 12$.

Ответ

9,1

Решение

Заметим, что данная функция определена при $x > 9$, поэтому далее будем рассматривать ее на промежутке $(9; +\infty)$.

Вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{1}{x-9} - 10$$

Далее найдем нули производной:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-9} - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9{,}1$$

Единственная критическая точка — это $x = 9{,}1$, в этой точке производная меняет знак. Для того чтобы определить, является ли $x = 9{,}1$ точкой максимума, нужно определить знаки производной при $x < 9{,}1$ и $x > 9{,}1$.

Если $x > 9{,}1$, то $f'(x) < 0$, если $x < 9{,}1$, то $f'(x) > 0$. Значит, точка $x = 9{,}1$ является точкой максимума, так как в ней производная меняет знак с «+» на «−» при проходе слева направо.

№13. Уравнение

№13.1 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x - \sin(x-\pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $4\pi;\ \frac{14\pi}{3};\ 5\pi$.

Решение

а)

$$\sin 2x - \sin(x-\pi) = 0$$

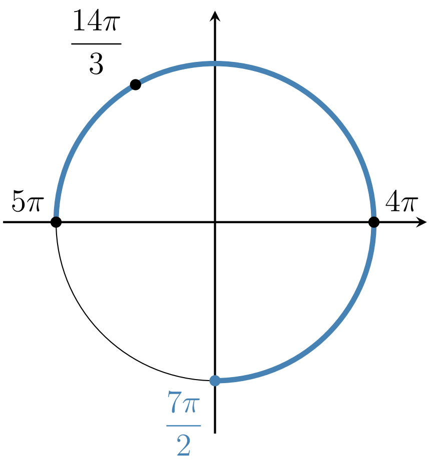
$$2\sin x\cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x\,(2\cos x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &\cos x = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ лежат точки $4\pi;\ \frac{14\pi}{3};\ 5\pi$.

№13.2 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[?; ?]$.

Ответ

а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Решение

а)

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - 6 = 0$$

$$\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)\left(\cos x - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

№13.3 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pi k;\ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-3\pi;\ -2\pi; -\dfrac{11\pi}{4}$.

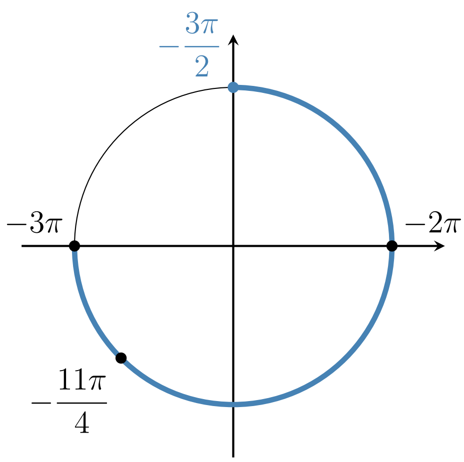
Решение

а)

$$-\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$$

$$-2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x$$
$$-2\sin x\cos x-\sqrt{2}\sin x=0$$
$$-\sin x(2\cos x+\sqrt{2})=0$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки $-3\pi;\ -2\pi; -\dfrac{11\pi}{4}$.

№13.4 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pi k; -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $-\pi; -\dfrac{5\pi}{4}; -2\pi$

Решение

а)

$$\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$$

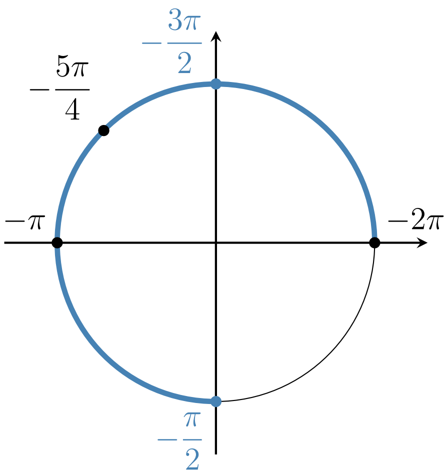
$$2\sin x(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x = 0, \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = -\cos x, \mid : \cos x (\text{т.к. } \cos x = 0 \text{ не явл. решением}) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберём корни с помощью тригонометрической окружности на промежутке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.



Следовательно, на отрезке $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\pi$; -2π; $-\dfrac{5\pi}{4}$.

№13.5 *(Центр)*

а) Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos(\pi - x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{8\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$.

Решение

а)

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos(\pi - x) = 0$$

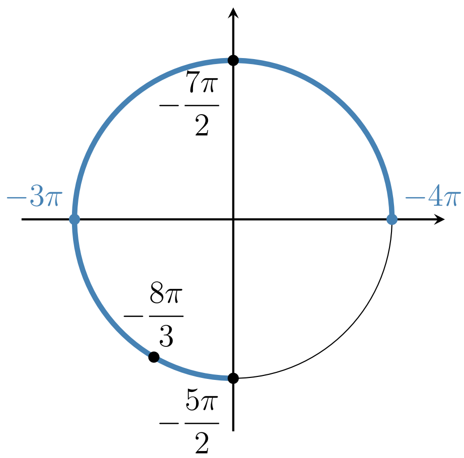
$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\cos x = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{8\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$.

№13.6 *(Центр)*

а) Решите уравнение $2\sin x + \cos^2 x = 2\sin^3 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ

а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{2};\ \frac{23\pi}{6};\ \frac{9\pi}{2}$.

Решение

а)

$$2\sin x + \cos^2 x = 2\sin^3 x$$

$$2\sin x + 1 - \sin^2 x = 2\sin^3 x$$

$$2\sin^3 x + \sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x(2\sin x + 1) - (2\sin x + 1) = 0$$

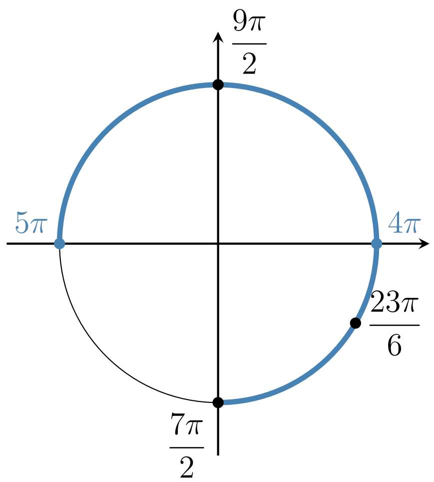
$$(2\sin x + 1)(\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin^2 x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ лежат точки $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{2}$.

№14. Стереометрия

№14.1 *(Дальний восток)*

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ стороны основания ABC равны 12, а боковые рёбра — 25. На рёбрах AB, AC, и SA отмечены точки F, E и K соответственно. Известно, что $AE = AF = 10$, $AK = 15$.

а) Докажите, что объём пирамиды $KAEF$ составляет $\dfrac{5}{12}$ от объёма пирамиды $SABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KEF.

Ответ

б) $10\sqrt{57}$

Решение

а) $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, тогда AEF равносторонний и $FE = 10$. Заметим, что

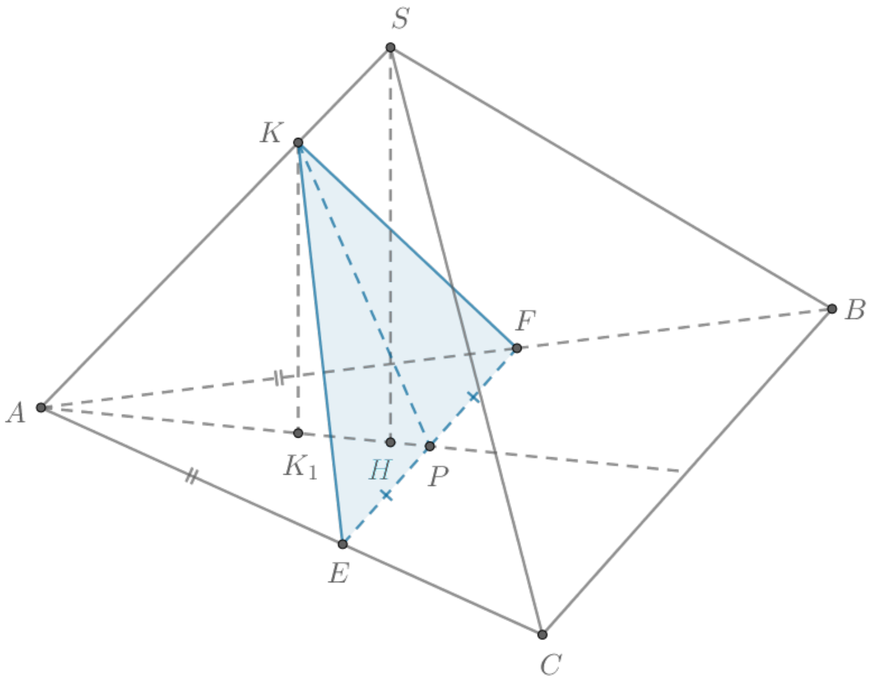
$$\frac{FE}{BC} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{25}{36}.$$

$\triangle AKK_1 \sim \triangle ASH$, следовательно,

$$\frac{KK_1}{SH} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Тогда

$$\frac{V_{KAEF}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{AEF} \cdot KK_1}{\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH} = \frac{5}{12}.$$



б) Найдём $\cos \angle KAE = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{AS} = \dfrac{6}{25}$.

По теореме косинусов для $\triangle AKE: KE^2 = 253 \quad\Rightarrow\quad KE = \sqrt{253}$.

Так как $\triangle KAE = \triangle KAF$, то $KF = KE = \sqrt{253}$. $AE = 10$ из пункта а).

Пусть P — середина EF. Тогда $EP = PF = 5$.

Найдём KP по теореме Пифагора из $\triangle KPE$: $KP = 2\sqrt{57}$. Тогда $S_{KFE} = \dfrac{1}{2}KP{\cdot}FE = 10\sqrt{57}$.

№14.2 *(Дальний восток)*

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$, точка M — середина ребра SC, точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 2 : 1$, $AB = 6$ и $SO = 3\sqrt{7}$.

а) Докажите, что плоскость (OMK) параллельна прямой SA.

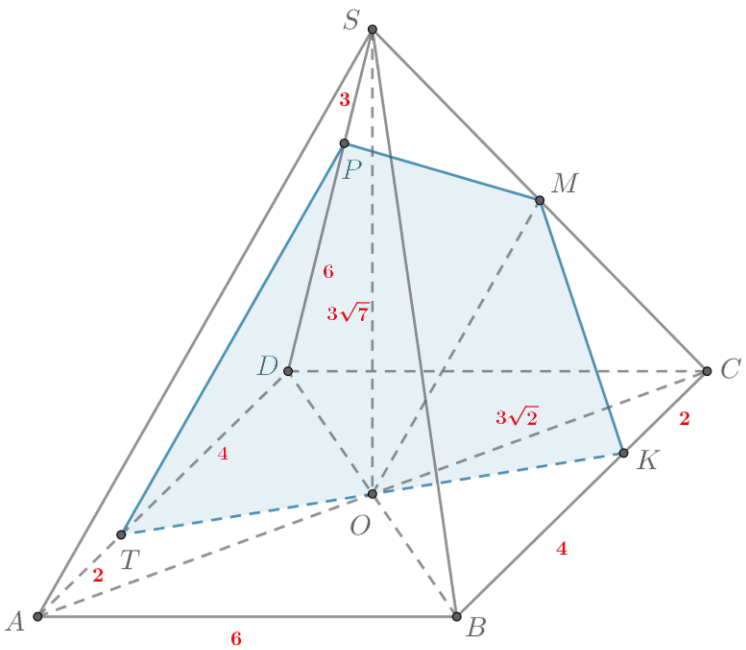
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость (OMK) пересечёт грань SAD.

Ответ

6

Решение

а)Так как O — центр основания $ABCD$, то O — середина диагонали AC. Тогда MO — средняя линия треугольника ASC и $SA \parallel MO$. Следовательно, $SA \parallel$ плоскости (MOK).



б) Пусть прямая KO пересекает ребро AD в точке T. Так как $ABCD$ — квадрат, то $AT = CK = 2$ и $TD = BK = 4$. Чтобы построить сечение пирамиды плоскостью (MOK), через точку T проведём прямую параллельно AS. Пусть эта прямая пересекает ребро SD в точке P. Тогда $TPMK$ — это сечение пирамиды плоскостью (MOK) и нам нужно найти отрезок TP.

Диагонали основания AC и BD равны $6\sqrt{2}$, $SO = 3\sqrt{7}$. Найдём боковое ребро пирамиды по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC, получим $SA = SB = SC = SD = 9$. В равнобедренном треугольнике SAD: $SA = SD = 9, AD = 6$. Так как $AT = 2, TD = 4$ и $TP \parallel AS$, то получаем, что $SP : PD = 1 : 2$ и $SP = 3, PD = 6$.

Далее имеем $\cos\angle ADS = \dfrac{\frac{1}{2}AD}{SD} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. По теореме косинусов для $\triangle PTD$:

$$PT^2 = PD^2 + DT^2 - 2 \cdot PD \cdot DT \cos\angle PDT$$

$$PT^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 36$$

$$PT = 6$$

№15. Неравенство

№15.1 *(Дальний восток)*
Решите неравенство:

$$\frac{49^x - 6 \cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leqslant 7^x + 5.$$

Ответ
$(-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$

Решение
Пусть $t = 7^x$. Неравенство примет вид:

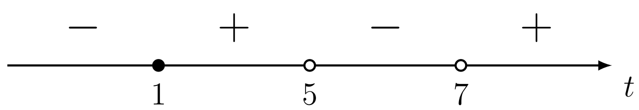
$$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} \leqslant t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 3)(t - 7) + (6t - 39)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 7)}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

$$\frac{t^3 - 7t^2 - 6t^2 + 42t + 3t - 21 + 6t^2 - 30t - 39t + 195 - t^3 + 7t^2 + 25t - 175}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$$

$$\frac{t - 1}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{aligned} &t \leqslant 1 \\ &5 < t < 7 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &7^x \leqslant 1 \\ &5 < 7^x < 7 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x \leqslant 0 \\ &\log_7 5 < x < 1. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, получим ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$.

№15.2 *(Дальний восток)*

Решите неравенство:

$$\frac{9^x - 6\cdot 3^x + 4}{3^x - 5} + \frac{6\cdot 3^x - 51}{3^x - 9} \leqslant 3^x + 5.$$

Ответ

$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Решение

Пусть $t = 3^x$. Неравенство примет вид:

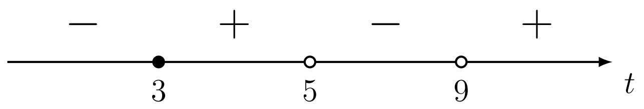
$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leqslant t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4)(t - 9) + (6t - 51)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 9)}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

$$\frac{t^3 - 15t^2 + 58t - 36 + 6t^2 - 81t + 255 - t^3 + 9t^2 + 25t - 225}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0$$

$$\frac{2(t - 3)}{(t - 5)(t - 9)} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} t \leqslant 3 \\ 5 < t < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \leqslant 3^1 \\ 3^{\log_3 5} < 3^x < 3^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1 \\ \log_3 5 < x < 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, получим ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$.

№15.3 *(Сибирь)*

Решите неравенство

$$3^x - 8 - \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3 - 19}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leqslant \frac{1}{3^x - 3}.$$

Ответ

$(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2]$

Решение

Пусть $t = 3^x > 0$. Тогда имеем

$$t - 8 - \frac{6t - 19}{t^2 - 5t + 6} \leqslant \frac{1}{t - 3}$$

$$\frac{(t-8)(t-2)(t-3) - (6t-19) - (t-2)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-3)\left((t-8)(t-2) - 7\right)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-3)\left(t^2 - 10t + 9\right)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

$$\frac{(t-3)(t-1)(t-9)}{(t-2)(t-3)} \leqslant 0$$

Если $t \neq 3$, то $x \neq 1$. Тогда поделим на $(t-3)$ числитель и знаменатель:

$$\frac{(t-1)(t-9)}{t-2} \leqslant 0$$

Значит, $t \in (-\infty; 1] \cup (2; 9] \backslash \{3\}$

$$\left[\begin{aligned} &3^x \leqslant 1 \\ &\begin{cases} 3^x > 2 \\ 3^x \leqslant 9 \\ 3^x \neq 3 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x \leqslant 0 \\ &\begin{cases} x > \log_3 2 \\ x \leqslant 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2]$$

№15.4 *(Центр)*

Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1} \geqslant \frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

Ответ

$(-\infty;0)\cup\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Решение

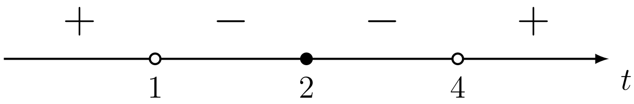
Преобразуем левую часть, домножив числитель и знаменатель на 4:

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}=\frac{8\cdot 8^{x-1}}{8\cdot 8^{x-1}-4}=\frac{8^x}{8^x-4}.$$

Положим $t=8^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\begin{gathered}\frac{t}{t-4}\geqslant\frac{3}{t-1}+\frac{8}{t^2-5t+4}\\ \frac{t(t-1)-3(t-4)-8}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0\\ \frac{t^2-4t+4}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0\\ \frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)}\geqslant 0.\end{gathered}$$

Решим методом интервалов:



Тогда решением неравенства будет совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}t<1\\ t=2\\ t>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8^x<8^0\\ 8^x=8^{\frac{1}{3}}\\ 8^x>8^{\frac{2}{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right).$$

№15.5 *(Центр)*

Решите неравенство:

$$\frac{3^x-9}{3^x+9}+\frac{3^x+9}{3^x-9}\geqslant\frac{12\cdot 3^x+144}{(3^x-9)(3^x+9)}.$$

Ответ

$\{1\}\cup(2;+\infty)$

Решение

Пусть $t=3^x$. Получим неравенство:

$$\frac{t-9}{t+9}+\frac{t+9}{t-9}\geqslant\frac{12\cdot t+144}{(t-9)(t+9)}$$

$$\frac{(t-9)^2+(t+9)^2-(12t+144)}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$

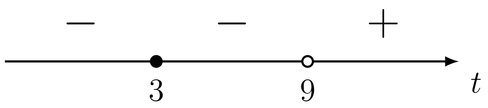
$$\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$$

$$\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0.$$

Заметим, что $t=3^x>0$, поэтому домножим обе части неравенства на заведомо положительно выражение $t+9$ и поделим на 2, получим:

$$\frac{(t-3)^2}{(t-9)}\geqslant 0.$$

По методу интервалов получим:



$$\left[\begin{aligned}&t=3\\&t>9\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&3^x=3^1\\&3^x>3^2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=1\\&x>2\end{aligned}\right.$$

Получим $x\in\{1\}\cup(2;+\infty)$.

№16. Экономическая

№16.1 *(Дальний восток)*

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 419 375 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ

648 000

Решение

Составим таблицу, обозначив за $S = 419375$ руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления процентов	Долг в руб. после начисления процентов	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x.$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$x(k^3 + k^2 + k + 1) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$x = Sk^4\frac{k-1}{k^4-1} = 419375 \cdot 1{,}2^4 \cdot \frac{0{,}2}{1{,}2^4 - 1} = 419375 \cdot 2{,}0736 \cdot \frac{0{,}2}{1{,}0736} = 162000.$$

Заметим, что за четыре года банку выплачено $4x$ рублей, значит, сумма выплат составила 648 000 рублей.

№16.2 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответ

1 029 000

Решение

Составим таблицу, обозначив за $S = 545000$ руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{40}{100} = 1{,}4$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления процентов	Долг в руб. после начисления процентов	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x.$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$x(k^2 + k + 1) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k - 1}{k^3 - 1} = 545000 \cdot 1{,}4^3 \cdot \frac{0{,}4}{1{,}4^3 - 1} = 545000 \cdot 2{,}744 \cdot \frac{0{,}4}{1{,}744} = 343000.$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, значит, сумма, выплаченная банку, составила 1 029 000 рублей.

№16.3 *(Дальний восток)*

В июле 2026 года планируется взять кредит на 3 года в размере 800 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

— в январе 2027 и 2028 годов долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2029 года долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Платежи в 2027, 2028 и 2029 годах должны быть равными; к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

Ответ

990 000 рублей

Решение

Составим таблицу, обозначив за $S = 800000$ руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж. В первые два года долг увеличивался в $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ раза, а в третий — в $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$ раза.

Год	Долг в руб. до начисления процентов	Долг в руб. после начисления процентов	Платёж в руб.
1	S	$1{,}1S$	x
2	$1{,}1S - x$	$1{,}1^2S - 1{,}1x$	x
3	$1{,}1^2S - 2{,}1x$	$1{,}2(1{,}1^2S - 2{,}1x)$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$1{,}2(1{,}1^2S - 2{,}1x) = x$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$1{,}2 \cdot 1{,}1^2S = x + 1{,}2 \cdot 2{,}1x$$

$$3{,}52x = 1{,}2 \cdot 1{,}1^2S$$

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}1^2 \cdot 800000}{3{,}52} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 80000}{32} = 330000.$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, значит, сумма, выплаченная банку, составила 990 000 рублей.

№16.4 *(Сибирь)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 177 120 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ

300 000

Решение

Составим таблицу, обозначив за $S = 177120$ руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{25}{100} = \dfrac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления процентов	Долг в руб. после начисления процентов	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x

Так как в конце четвертого года кредит погашен, то

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = x.$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$x(k^3 + k^2 + k + 1) = k^4S$$

$$x\frac{k^4 - 1}{k - 1} = k^4S$$

$$x = Sk^4\frac{k-1}{k^4-1} = 177120 \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5^4}{4^4} - 1} = 177120 \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot \frac{4^3}{5^4 - 4^4} = 177120 \cdot \frac{5^4}{4} \cdot \frac{1}{369} = 75000.$$

Заметим, что за четыре банку выплачено $4x$ рублей, значит, сумма выплат составила 300 000 рублей.

№16.5 *(Центр)*

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в кредит в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после погашения на 65 500 рублей больше суммы кредита?

Ответ

122 000

Решение

Составим таблицу, обозначив за S руб. сумму кредита, за x руб. — ежегодный платеж, а за $k = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$ — во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов.

Год	Долг в руб. до начисления процентов	Долг в руб. после начисления процентов	Платёж в руб.
1	S	kS	x
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x

Так как в конце третьего года кредит будет погашен, то

$$k^3S - k^2x - kx = x.$$

Это уравнение преобразуется в уравнение вида:

$$x(k^2 + k + 1) = k^3S$$

$$x\frac{k^3 - 1}{k - 1} = k^3S$$

$$x = Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}.$$

$$3x = 3Sk^3\frac{k-1}{k^3-1}.$$

Заметим, что за три года банку заплатили $3x$ рублей, тогда $3x = S + 65500$. Подставим это в выражение для $3x$:

$$S + 65500 = 3S\frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1} = 3S \cdot \frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^3 - 4^3} = \frac{375}{244}S$$

$$\frac{131}{244}S = 65500 \Leftrightarrow S = \frac{65500 \cdot 244}{131} = 122000.$$

№17. Планиметрия

№17.1 *(Дальний восток)*

$ABCDE$ — вписанный пятиугольник. M — точка пересечения диагоналей BE и AD. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

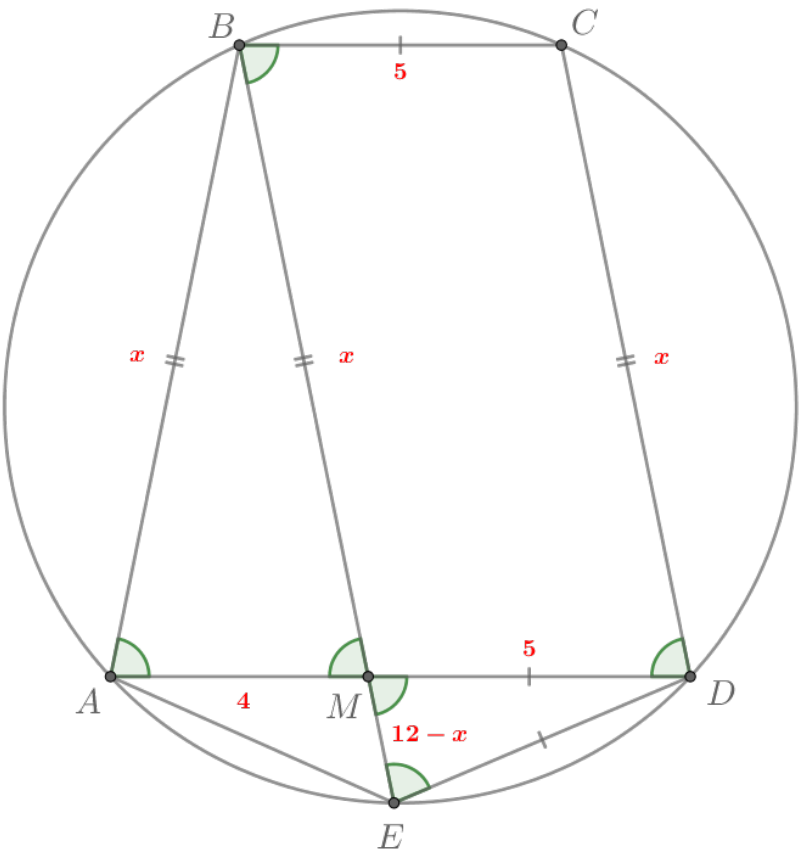
Ответ

б) 10

Решение

а) Так как $BCDM$ — параллелограмм, то $CD \parallel BM$.

Тогда $EBCD$ — трапеция, вокруг которой описана окружность $\quad\Rightarrow\quad$ $EBCD$ — равнобедренная трапеция $\quad\Rightarrow\quad$ $DE = BC$.



б) Аналогично пункту а) получаем, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция и $AB = CD$.

Так как $DM = BC = 5$, то $AM = AD - DM = 9 - 5 = 4$.

Пусть $AB = BM = CD = x$. Так как по свойству пересекающихся хорд $AM \cdot MD = BM \cdot ME$, то получаем уравнение:

$$4 \cdot 5 = x \cdot (12 - x) \quad\Rightarrow\quad x = 2,\ x = 10.$$

Заметим, что если $x = 2$, то $ME = 10$. В $\triangle MDE$ стороны будут равны 5, 5 и 10, что невозможно по неравенству треугольника. Тогда получаем $AB = x = 10$.

№17.2 *(Дальний восток)*

O — центр вписанной окружности треугольника ABC. BO вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а $\angle ABC = 60°$.

Ответ

б) $16\sqrt{3}$

Решение

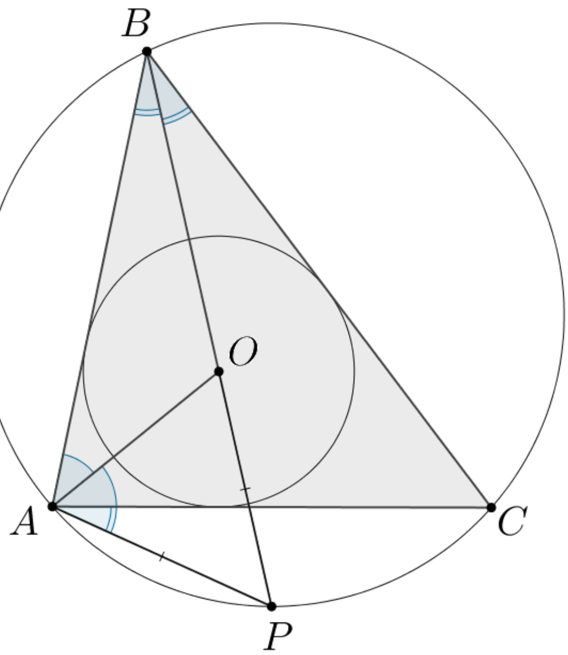
а) Так как O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, то AO и BO — биссектрисы. Введем обозначения: $\angle BAO = \alpha$, $\angle ABO = \beta$. Следовательно, по теореме о внешнем угле имеем:

$$\angle AOP = \alpha + \beta$$

Углы $\beta = \angle CBP = \angle CAP$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно,

$$\angle PAO = \alpha + \beta = \angle AOP$$

Что и требовалось доказать.



б) Так как $ABCP$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle APC = 180° - \angle ABC = 180° - 60° = 120°$.

Так как BP — биссектриса угла ABC, то $\angle ABP = \angle PBC = 30°$. По теореме синусов для треугольника APC, у которого описанная окружность совпадает с описанной окружностью треугольника ABC, найдём $PC = AP = 2R\sin\angle ACP = 2R\sin\angle ABP = 2\cdot 8\cdot\dfrac{1}{2} = 8$. Тогда $S_{APC} = \dfrac{1}{2}AP\cdot PC\sin\angle APC = \dfrac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$.

№17.3 *(Центр)*

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 6$.

Ответ

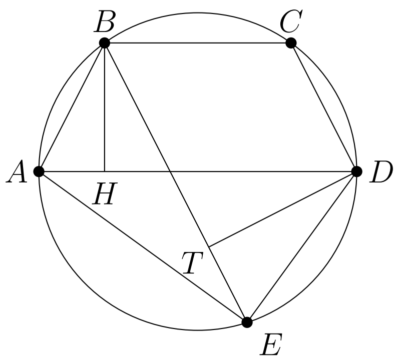
б) $\dfrac{17}{3}$

Решение

а) $\angle ABC = \dfrac{1}{2}(\smile AE + \smile ED + \smile DC)$ по свойству вписанных углов. Аналогично, $\angle EDC = \dfrac{1}{2}(\smile EA + \smile AB + \smile BC)$.

По условию $AB = CD$, $BC = DE$, значит $\smile AB = \smile CD$, $\smile BC = \smile DE$. А так как $\smile EA = \smile AE$, то получим, что $\angle ABC = \angle EDC$.

Тогда треугольники ABC и CDE равны по двум сторонам и углу между ними, откуда следует, что $AC = CE$.



б) Поскольку прямые AD и BC высекают равные дуги AB и CD, то $AD \parallel BC$. То есть $ABCD$ — вписанная равнобедренная трапеция. Аналогично, равнобедренной трапецией будет четырёхугольник $BCDE$.

Опустим высоту BH на AD в трапеции $ABCD$. Тогда по свойству равнобедренной трапеции $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{6-4}{2} = 1$. Тогда $\cos\angle BAD = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{1}{3}$. Также $\angle BED = \angle BAD$ по свойству вписанных углов.

Опустим высоту DT в трапеции $BCDE$. Тогда $\triangle DTE$ прямоугольный и $ET = DE\cos\angle BED = DE\cos\angle BAD = \dfrac{4}{3}$. А по свойству равнобедренной трапеции $ET = \dfrac{BE - CD}{2}$, тогда $BE = 2ET + CD = \dfrac{8}{3} + 3 = \dfrac{17}{3}$.

№18. Параметр

№18.1 *(Дальний восток)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3 \\ y = x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ

$a \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$

Решение

Подставив второе уравнение системы в первое, получим

$$(x-3)(4x+a-9) = |x-3|^3$$

Полученное уравнение с модулем равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(4x+a-9-(x-3)^2) = 0 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3)(4x+a-9+(x-3)^2) = 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(x^2-10x+18-a) = 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases} \qquad (1) \\ \begin{cases} (x-3)(x^2-2x+a) = 0 \\ x < 3 \end{cases} \qquad (2) \end{array}\right.$$

Тогда исходная система имеет четыре решения в одном из нижеследующих случаев.

Случай 1. Система (1) имеет три решения и система (2) имеет одно решение.

Случай 2. Система (1) имеет два решения и система (2) имеет два решения.

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Случай 1.

Система (1) имеет три решения, если уравнение $x^2 - 10x + 18 - a = 0$ имеет два корня и оба корня больше 3.

Обозначим $f(x) = x^2 - 10x + 18 - a$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} D = 4(7+a) > 0 \\ x_{\text{в}} = \dfrac{10}{2} > 3 \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$a \in (-7; -3)$$

Система (2) имеет одно решение, если выполнено одно из условий а) или б).

а) Уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет один корень и этот корень меньше 3. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} D = 4(1-a) = 0 \\ x_{\text{в}} = \dfrac{2}{2} < 3 \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$a = 1$$

б) Уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ имеет два корня и эти корни находятся по разные стороны от 3 либо один корень равен 3, а другой корень левее 3. Обозначим $g(x) = x^2 - 2x + a$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} D = 4(1-a) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(3) < 0 \\ \begin{cases} g(3) = 0 \\ x_{\text{в}} = \dfrac{2}{2} < 3 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$a \leqslant -3$$

Пересекая множества $(-7; -3)$ и $(-\infty; -3] \cup \{1\}$, получим

$$a \in (-7; -3)$$

Случай 2.

Система (1) имеет два решения, если уравнение $x^2 - 10x + 18 - a = 0$ имеет один корень и этот корень больше 3, либо если это уравнение имеет два корня, при этом меньший находится левее 3 или совпадает с 3. Это верно, так как если уравнение $x^2 - 10x + 18 - a = 0$ имеет 2 корня, то больший из них находится правее вершины параболы, то есть правее $\dfrac{10}{2} = 5 > 3$, а значит является решением системы (1).

Отсюда имеем

$$a \in \{-7\} \cup [-3; +\infty)$$

Система (2) имеет два решения, если уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ имеет два корня и оба корня меньше 3.

Отсюда имеем

$$a \in (-3; 1)$$

Пересекая множества $\{-7\} \cup [-3; +\infty)$ и $(-3; 1)$, получим

$$a \in (-3; 1)$$

Тогда, объединив значения параметра из случаев 1 и 2, получим окончательно

$$a \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$$

№18.2 *(Дальний восток)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2+3x+y-4)\,(x-y+4) \geqslant 0 \\ ax-y-2a+3=0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ

$a \in [-1; +\infty)$

Решение

Рассмотрим первое неравенство: $(x^2+3x+y-4)\,(x-y+4) \geqslant 0$. Пусть $y_1(x) = -x^2-3x+4$ — уравнение параболы с ветвями вниз, $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -1{,}5$, $y_0 = y_1(x_0) = 6{,}25$. Пусть $y_2(x) = x+4$ — линейная функция. Тогда неравенство равносильно:

$$(y-y_1(x))(y-y_2(x)) \leqslant 0.$$

Решением этого неравенства будут такие области, каждая точка которых будет лежать «выше» одного из графиков (т.е. ордината больше, чем на графике) и «ниже» другого (т.е. ордината меньше, чем на графике), или же точка лежит на одном из графиков функций $y_1(x)$, $y_2(x)$. Учитывая условие $x \leqslant 0$, изобразим графики $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в плоскости xOy, предварительно отыскав точки пересечения их графиков:

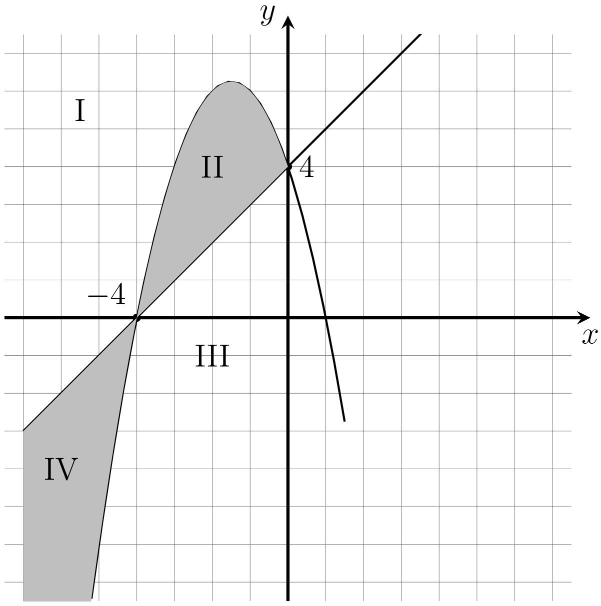
$$y_1(x) = y_2(x)$$

$$-x^2-3x+4 = x+4$$

$$x^2+4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Как видно, подходят области II и IV, включая их границы.

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$ax - y - 2a + 3 = 0$$
$$y = ax - 2a + 3$$
$$y = a(x - 2) + 3.$$

Это пучок прямых, проходящих через точку $(2; 3)$, с угловым коэффициентом a. Рассмотрим некоторые случаи.

1) Случай касания с параболой $y_1(x)$.

Условие касания: система $\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 4 \\ y = a(x - 2) + 3 \end{cases}$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ квадратное уравнение $-x^2 - 3x + 4 = a(x - 2) + 3$ имеет единственное решение.

Тогда квадратное уравнение $x^2 + x(a + 3) - 2a - 1 = 0$ имеет $D = 0$.

Найдем дискриминант: $D = (a + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a - 1) = a^2 + 14a + 13 = (a + 13)(a + 1) = 0$

Отсюда получаем $a = -13$ с точкой касания $x_0 = -\dfrac{a + 3}{2} = 5 > 0$ или $a = -1$ с точкой касания $x_0 = -\dfrac{a + 3}{2} = -1 < 0$.

Заметим, что при $a = -13$ касание происходит при несоблюдении условия $x \leqslant 0$.

2) Случай прохождения прямой через точку $(-4; 0)$.

$$y(-4) = 0 \Leftrightarrow 0 = -6a + 3 \Leftrightarrow a = 0{,}5.$$

Теперь проанализируем при всех a количество решений в системе:

- при $a < -1$: решений нет;
- при $a = -1$: единственное решение;

- при $a \in (-1; 0{,}5)$: бесконечное множество решений;
- при $a = 0{,}5$: единственное решение;
- при $a > 0{,}5$: бесконечное множество решений, т.к. при таких a график $y = a(x-2)+3$ всегда будет пересекаться с графиком функции $y_1(x) = -x^2 - 3x + 4$ на гранцие IV области, имея таким образом общий отрезок или луч с этой областью.

Итого, хотя бы одно решение получается при $a \in [-1; +\infty)$.

№18.3 *(Предположительно дальний восток)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2ay + a - 3 = 0 \\ x|y| + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ
$a = \dfrac{1}{3}$
Решение

$$\begin{cases} 2x + 2ay + a - 3 = 0 \\ x|y| + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2ay = 3 - a \\ 2x + x|y| = 3 \end{cases}$$

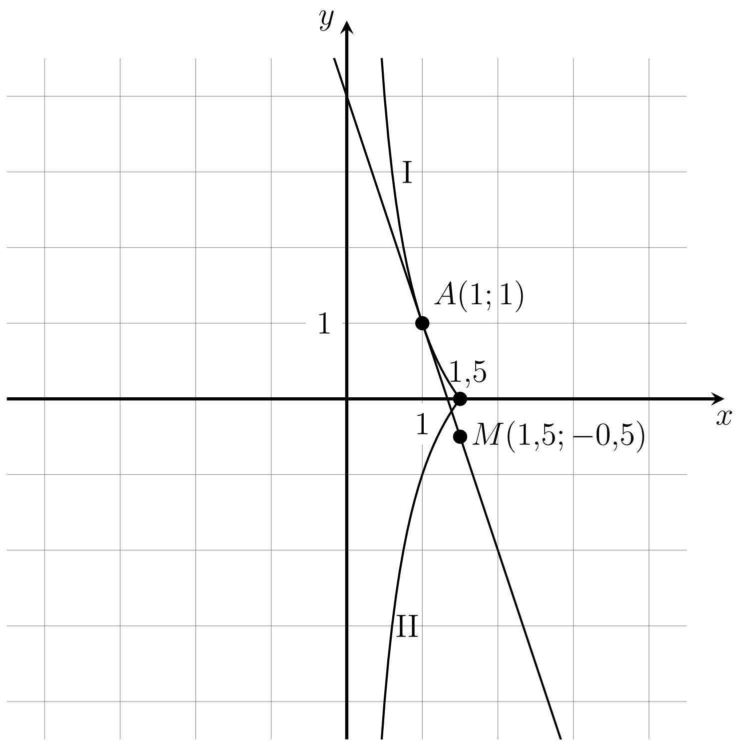
$$\begin{cases} 2x + 2ay = 2x + x|y| - a \\ 2x + x|y| = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ay = x|y| - a \\ x|y| = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ay = 3 - 2x - a \\ |y| = \dfrac{3}{x} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(2y+1) = 3 - 2x, \ \text{(пучок прямых, прох. через т. } M(1{,}5; -0{,}5)) \\ |y| = \dfrac{3}{x} - 2, (*) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = \dfrac{3}{x} - 2 \end{cases} \text{— линия I} \qquad \begin{cases} y < 0 \\ y = -\dfrac{3}{x} + 2 \end{cases} \text{— линия II}$$



Условия касания:

$$\begin{cases} a(2y+1) = 3-2x \\ y = \dfrac{3}{x} - 2 \end{cases}$$

1 решение:

$$a\left(\frac{6}{x} - 4 + 1\right) = 3 - 2x$$

$$a\left(\frac{6}{x} - 3\right) = 3 - 2x, \ \ (x \neq 0)$$

$$a(6-3x) = 3x - 2x^2$$

$$2x^2 - 3x - 3xa + 6a = 0$$

$$2x^2 - 3(1+a)x + 6a = 0$$

$$D = 9(1+a)^2 - 48a = 0$$

$$9 + 18a + 9a^2 - 48a = 0$$

$$9a^2 - 30a + 9 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$1) \ a = 3, x = 3 \text{ — не подходит}$$

$$2) \ a = \frac{1}{3}, x = 1$$

При $a = \dfrac{1}{3}$: (2 решения)

$$2y + 1 = 9 - 6x$$
$$2y = 8 - 6x$$
$$y = 4 - 3x$$
$$A(1;1) \text{ — точка касания}$$

№18.4 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$

Решение

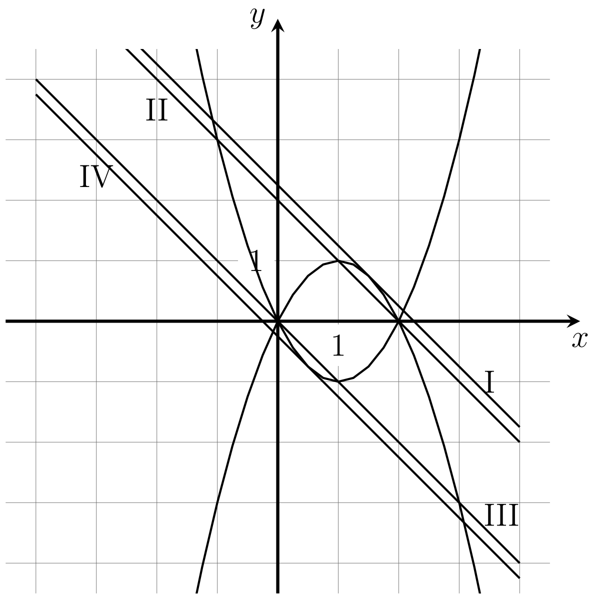
Рассмотрим график каждого уравнения в плоскости xOy.

1) $x + y = a \Leftrightarrow y = -x + a$ — линейная функция с угловым коэффициентом -1 и свободным a, то есть при всех a это уравнение задаёт семейство прямых, параллельных графику функции $y = -x$.

2) $|y| = |x^2 - 2x| \Leftrightarrow y^2 = (x^2 - 2x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 2x \end{array}\right.$.

Данное уравнение задаёт две параболы, симметричные друг другу относительно оси абсцисс, которые пересекаются при $y = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 2$.

Изобразим график второго уравнения с указанием случаев пересечения графика первого уравнения с ним.



Случай I: касание с графиком уравнения $y = -x^2 + 2x$, которое происходит тогда, и только тогда, когда уравнение $-x^2 + 2x = -x + a \Leftrightarrow x^2 - 3x + a = 0$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow D = 9 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$.

Случай II: прохождение прямой через точку $(2; 0)$: $y(2) = 0 \Leftrightarrow -2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Случай III: прохождение прямой через точку $(0; 0)$: $y(0) = 0 \Leftrightarrow -0 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Случай IV: касание с графиком уравнения $y = x^2 - 2x$, которое происходит тогда, и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x = -x + a \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow D = 1 + 4a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Рассмотрим количество решений при всех a:

- $a < -\dfrac{1}{4}$: 2 решения (2 точки пересечения с графиком $y = -x^2 + 2x$);
- $a = -\dfrac{1}{4}$: 3 решения (2 точки пересечения с графиком $y = -x^2 + 2x$ и точка касания с $y = x^2 - 2x$);
- $-\dfrac{1}{4} < a < 0$: 4 решения (по 2 точки пересечения с каждой из парабол);
- $a = 0$: 3 решения (по 2 точки пересечения с каждой из парабол, но точка $(0; 0)$ — общая);
- $0 < a < 2$: 4 решения (по 2 точки пересечения с каждой из парабол);
- $a = 2$: 3 решения (по 2 точки пересечения с каждой из парабол, но точка $(2; 0)$ — общая);
- $2 < a < \dfrac{9}{4}$: 4 решения (по 2 точки пересечения с каждой из парабол);
- $a = \dfrac{9}{4}$: 3 решения (2 точки пересечения с графиком $y = x^2 - 2x$ и точка касания с $y = -x^2 + 2x$);
- $a > \dfrac{9}{4}$: 2 решения (2 точки пересечения с графиком $y = x^2 - 2x$);

Итого, 2 решения получится при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$

№18.5 *(Сибирь)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Ответ

$(-5; -4) \cup (-4; -3)$

Решение

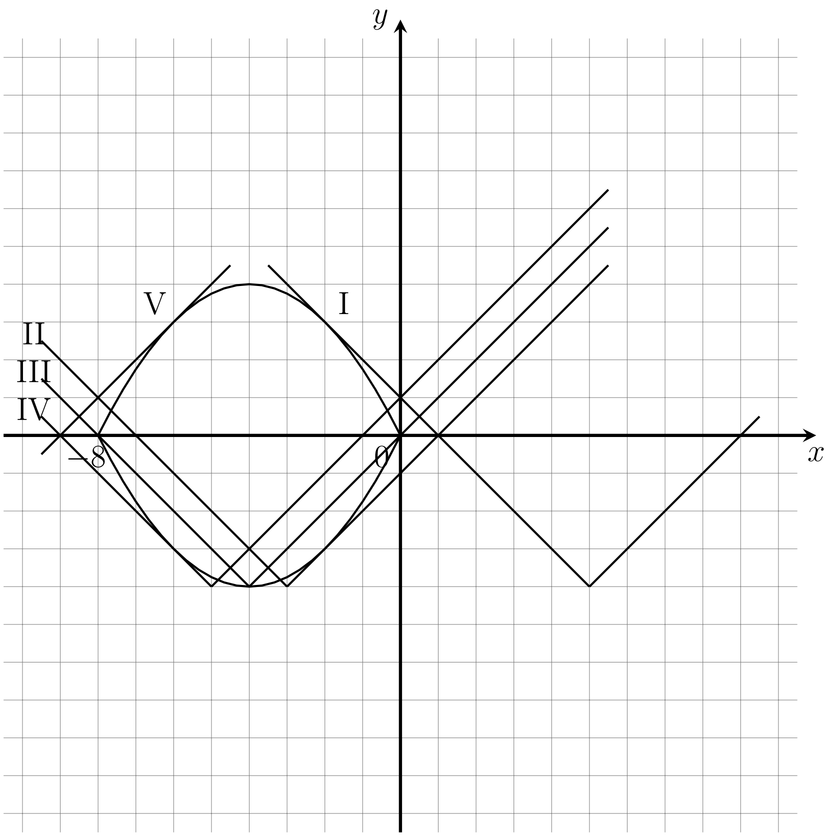
Рассмотрим первое уравнение $y = |x-a|-4 = \begin{cases} x-a-4, x \geqslant a \\ -x+a-4, x < a. \end{cases}$ Это кусочно-линейная функция, которая меняет свой угловой коэффициент с -1 на 1 в точке $(a;4)$. Назовём эту функцию «галочкой» с вершиной $(a;4)$.

Рассмотрим второе уравнение $4|y| = -x^2 - 8x$. Заметим, что $x^2 = 8x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0;8]$, иначе равенство невозможно. Тогда уравнение при $x \in [0;8]$. будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y = +\dfrac{x^2}{4} + 2x \end{cases} \end{array}\right.$$

Эта совокупность задаёт 2 параболы, симметричные друг другу относительно оси абсцисс с вершинами $x_1 = -4$, $y_1 = 4$ и $x_2 = -4$, $y_2 = -4$, которые пересекаются в точках $(0;0)$ и $(-8;0)$, определены при $x \in [0;8]$.

Изобразим графики этих парабол и галочки в разных случаях в плоскости xOy:



- В случае I будет одно решение;
- от I до II — 2 решения;
- в случае II — 3 решения;

- от II до III — 4 решения;
- В случае III — 3 решения;
- от III до IV — 4 решения;
- в случае IV — 3 решения;
- от IV до V — 2 решения;
- в случае IV — 1 решение;

Требуется ровно 4 решения, подходят случаи со II до III и с III до IV, не включая границ.

Случай II. Галочка касается параболы $y = \dfrac{x^2}{4} + 2x$ при $x \geqslant a$: уравнение $\dfrac{x^2}{4} + 2x = x - a - 4$ имеет единственное решение. $x^2+4x+4a+16 = 0$, $D = 16-4(4a+16) = 0 \Leftrightarrow 4a+16 = 4 \Leftrightarrow a = -3$.

Случай III. Галочка проходит через точки $(0;0)$, $(-8;0)$, $(-4;-4)$. Видно, что это выполняется при $a = -4$.

Случай IV. Галочка касается параболы $y = \dfrac{x^2}{4}+2x$ при $x < a$: уравнение $\dfrac{x^2}{4}+2x = -x+a-4$ имеет единственное решение. $x^2 + 12x - 4a + 16 = 0$, $D = 144 - 4(-4a + 16) = 0 \Leftrightarrow -4a + 16 = 36 \Leftrightarrow a = -5$.

Таким образом, получаем ответ: $a \in (-5;-4) \cup (-4;-3)$.

№19. Олимпиадная

№19.1 *(Дальний восток)*

На столе лежат 4 камня по 5 кг и 13 камней по 14 кг. Их разделили на две кучки.

а) Может ли разность масс двух этих кучек камней быть равна 6 кг?

б) Могут ли массы двух этих кучек быть равны?

в) Какая наименьшая положительная разность масс может быть у двух этих кучек камней?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не могут

в) 4 кг

Решение

а) Если в первой кучке 4 камня по 5 кг и 6 камней по 14 кг, то масса кучки будет равна 104 кг. Тогда во второй кучке только 7 камней по 14 кг, а ее масса равна 98. Тогда их разность равна $104 - 98 = 6$ кг.

б) Пусть в первой кучке a камней по 5 кг, тогда во второй кучке $4 - a$ камней по 5 кг. Пусть в первой кучке b камней по 14 кг, тогда во второй кучке $13 - b$ камней по 14 кг.

Значит, должно выполняться

$$5a + 14b - (5(4-a) + 14(13-b)) = 0$$
$$10a + 28b - 20 - 182 = 0$$
$$10a + 28b = 202$$
$$5a + 14b = 101$$

Заметим, что $101 = 14 \cdot 7 + 3$, то есть даёт остаток 3 по модулю 14. $5a$ же может принимать лишь значения $0, 5, 10, 15, 20$, то есть давать остатки $0, 5, 10, 1, 6$ по модулю 14.

Значит, такое невозможно.

в) Надо найти минимум выражения $|2\,(5a + 14b - 101)|$ при $0 \leqslant a \leqslant 4$, $0 \leqslant b \leqslant 13$.

Если $a = 0$, то минимум выражения достигается при $b = 7$ и равен 6.

Если $a = 1$, то минимум выражения достигается при $b = 7$ и равен 4.

Если $a = 2$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 10.

Если $a = 3$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 4.

Если $a = 4$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 6.

Таким образом, минимальная разность равна 4. Достигается она в случае, если в первой кучке 1 камень по 5 кг и 7 камней по 14 кг, тогда масса кучки будет равна 103 кг. Тогда во второй кучке 3 камня по 5 кг и 6 камней по 14 кг, а ее масса равна 99. Тогда их разность равна $103 - 99 = 4$ кг.

№19.2 *(Дальний восток)*

Есть контейнеры по 20 или по 40 тонн, 40% всех контейнеров наполнены сахарным песком.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 50% от общей массы?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 60% от общей массы?

в) Какое минимальное количество в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 25

Решение

а) Пусть всего было 5 контейнеров, при этом 4 из них весили по 20 тонн, а один — 40 тонн. Тогда если один контейнер весом в 20 тонн и один контейнер весом в 40 тонн наполнены сахарным песком, то условие про 40% выполнено, так как с сахарным песком 2 контейнера, а оставшихся — 3. Суммарный вес контейнеров с песком и суммарный вес других контейнеров равны 60 тоннам, следовательно, контейнеры с песком составляют 50% от общего веса.

б) Пусть есть x контейнеров по 20 тонн, y контейнеров по 40 тонн. Пусть n контейнеров по 40 тонн, наполненных сахарным песком, тогда $n \leqslant y$. Так как 40% от всех контейнеров наполнены сахарным песком, то контейнеров по 20 тонн, наполненных сахарным песком, будет $0{,}4(x+y)-n$, и $n \leqslant 0{,}4(x+y)$. Также числа x, y, n — целые неотрицательные, при этом $x+y>0$. Предположим, условие пункта б) выполнено, тогда доля сахарного песка по массе будет вычислена следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{40n+20(0{,}4(x+y)-n)}{20x+40y}=\frac{3}{5}\\ \frac{10n+5(0{,}4(x+y)-n)}{x+2y}=3\\ 10n+5(0{,}4(x+y)-n)=3x+6y\\ 5n=x+4y\\ n=\frac{x+4y}{5}.\end{gathered}$$

Подставим получившееся выражение для n в его ограничения:

$$\begin{cases}n \leqslant y\\ n \leqslant 0{,}4(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+4y}{5} \leqslant y\\ \dfrac{x+4y}{5} \leqslant \dfrac{2(x+y)}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leqslant y\\ y \leqslant \dfrac{x}{2}\end{cases}.$$

Из этой системы неравенств следует, что $x \leqslant \frac{x}{2}$, что верно, только если $x=0$. Но $y \leqslant \frac{x}{2}$, значит, и $y=0$, а значит $x+y=0$, что противоречит условию.

в) Пусть контейнеров массой 20 тонн с сахаром a шт, контейнеров массой 40 тонн с сахаром b шт, контейнеров массой 20 тонн не с сахаром x шт, контейнеров массой 40 тонн не с сахаром

y шт. Числа a, b, x, y — целые неотрицательные.

Тогда имеем:

$$\frac{a+b}{a+b+x+y} = 0{,}4 \Leftrightarrow 3a+3b = 2x+2y \Leftrightarrow 2y = 3a+3b-2x \quad (1).$$

Пусть n — искомый процент массы сахара от общей массы. Тогда:

$$\frac{20a+40b}{20a+40b+20x+40y} = \frac{n}{100} \Leftrightarrow \frac{a+2b}{a+2b+x+2y} = \frac{n}{100}.$$

Подставим (1) в это уравнение:

$$\frac{n}{100} = \frac{a+2b}{a+2b+x+2y} = \frac{a+2b}{a+2b+x+3a+3b-2x} = \frac{a+2b}{4a+5b-x}$$

$$100a+200b = 4an+5bn-nx$$

$$nx = 4an+5bn-100a-200b.$$

Из условия следует, что $n \geqslant 0$, ведь количество контейнеров с сахаром — ненулевое количество. Поделим обе части на n:

$$x = 4a+5b-\frac{100(a+2b)}{n} \geqslant 0$$

$$4a+5b \geqslant \frac{100(a+2b)}{n}.$$

Далее $4a+5b > 0$, так как количество $a+b$ ненулевое, иначе бы количество контейнеров без сахара составляло бы 100%. Тогда оценим n:

$$n \geqslant \frac{100(a+2b)}{4a+5b} = \frac{25(4a+5b)+75b}{4a+5b} = 25+\frac{75b}{4a+5b} \geqslant 25.$$

Причем равенство достигается при $b=0$. Тогда пример для полученной оценки можно представить следующий: $a=4$, $b=0$, $x=0$, $y=6$. В этом случае условие (1) выполняется.

№19.3 *(Сибирь)*

Есть 4 камня по 3 тонны и 11 камней по 20 тонн.

А) Можно ли разложить камни на 2 группы так, чтобы разность сумм масс групп была равна 14 тонн?

б) Можно ли разложить камни в 2 группы так, чтобы сумма масс камней обеих групп была одинаковой?

в) Какую минимальную массу разности суммарных масс камней можно достичь при разложении камней в 2 группы?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 8 тонн

Решение

а) Обозначим массу камней в первой куче за x тонн. Тогда масса камней во второй куче равна $x + 14$ тонн. Получаем уравнение на суммарную массу всех камней

$$x + (x + 14) = 4 \cdot 3 + 11 \cdot 20$$
$$2x + 14 = 12 + 220$$
$$2x = 218$$
$$x = 109$$

109 кг можно набрать 5 камнями в 20 кг и 3 камнями в 3 кг. Тогда остальные камни в сумме дадут $3 + 6 \cdot 20 = 123$ кг. Тогда разность масс действительно равна 14 кг.

б) Пусть в первой кучке a камней по 3 тонны, тогда во второй кучке $4 - a$ камней по 3 тонны. Пусть в первой кучке b камней по 20 тонн, тогда во второй кучке $11 - b$ камней по 20 тонн.

Значит, должно выполняться

$$3a + 20b - (3(4 - a) + 20(11 - b)) = 0$$
$$6a + 40b - 12 - 220 = 0$$
$$6a + 40b = 232$$
$$3a + 20b = 116$$

Но значение $3a$ лежит от 0 до 12, поэтому $3a + 20b$ не может давать остаток 16 по модулю 20 (который даёт по этому модулю 116).

в) Надо найти минимум выражения $|2\,(3a + 20b - 116)|$ при $0 \leqslant a \leqslant 4$, $0 \leqslant b \leqslant 11$.

Если $a = 0$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 8.

Если $a = 1$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 14.

Если $a = 2$, то минимум выражения достигается при $b = 6$ и равен 20.

Если $a = 3$, то минимум выражения достигается при $b = 5$ и равен 14.

Если $a = 4$, то минимум выражения достигается при $b = 5$ и равен 8.

Таким образом, минимальная разность равна 8. Достигается она в случае, если в первой куче 3 камня по 4 тонны и 5 камней по 20 тонн, тогда масса кучи будет равна 112 тонн. Тогда во второй куче 6 камней по 20 тонн, а ее масса равна 120 тонн. Тогда их разность равна $120 - 108 = 12$ тонн.

№19.4 *(Центр)*

Есть контейнеры по 20 или по 40 тонн, 60% всех контейнеров наполнены сахарным песком.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 50% от общей массы?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 40% от общей массы?

в) Какую наибольшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 75%

Решение

а) Пусть всего было 5 контейнеров, при этом 4 из них весили по 20 тонн, а один — 40 тонн. Тогда если один контейнер весом в 20 тонн и один контейнер весом в 40 тонн без сахарного песка, то условие про 60% выполнено, так как с сахарным песком 3 контейнера, а оставшихся — 2. Суммарный вес контейнеров с песком и суммарный вес других контейнеров равны 60 тоннам, следовательно, контейнеры с песком составляют 50% от общего веса.

б) Пусть есть x контейнеров по 20 тонн, y контейнеров по 40 тонн. Пусть n контейнеров по 20 тонн, наполненных сахарным песком, тогда $n \leqslant x$. Так как 60% от всех контейнеров наполнены сахарным песком, то контейнеров по 40 тонн, наполненных сахарным песком, будет $0{,}6(x+y)-n$, и $n \leqslant 0{,}6(x+y)$. Также числа x, y, n — целые неотрицательные, при этом $x+y>0$. Предположим, условие пункта б) выполнено, тогда доля сахарного песка по массе будет вычислена следующим образом:

$$\frac{20n+40(0{,}6(x+y)-n)}{20x+40y}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{5n+10(0{,}6(x+y)-n)}{x+2y}=2$$

$$5n+10(0{,}6(x+y)-n)=2x+4y$$

$$-5n=-4x-2y$$

$$n=\frac{4x+2y}{5}.$$

Подставим получившееся выражение для n в его ограничения:

$$\begin{cases} n \leqslant x \\ n \leqslant 0{,}6(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+2y}{5} \leqslant x \\ \dfrac{4x+2y}{5} \leqslant \dfrac{3(x+y)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant \dfrac{x}{2} \\ x \leqslant y \end{cases}.$$

Из этой системы неравенств следует, что $x \leqslant \dfrac{x}{2}$, что верно, только если $x=0$. Но $y \leqslant \dfrac{x}{2}$, значит, и $y=0$, а значит $x+y=0$, что противоречит условию.

в) Пусть контейнеров массой 20 тонн с сахаром a шт, контейнеров массой 40 тонн с сахаром b шт, контейнеров массой 20 тонн не с сахаром x шт, контейнеров массой 40 тонн не с сахаром y шт. Числа a, b, x, y — целые неотрицательные.

Тогда имеем:

$$\frac{a+b}{a+b+x+y}=0{,}6 \quad \Leftrightarrow \quad 2a+2b=3x+3y \quad \Leftrightarrow \quad 2b=3x+3y-2a \quad (1).$$

Пусть n — искомый процент массы сахара от общей массы. Тогда:

$$\frac{20a+40b}{20a+40b+20x+40y}=\frac{n}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+2b}{a+2b+x+2y}=\frac{n}{100}.$$

Подставим (1) в это уравнение:

$$\frac{n}{100}=\frac{a+2b}{a+2b+x+2y}=\frac{a+3x+3y-2a}{a+3x+3y-2a+x+2y}=\frac{3x+3y-a}{4x+5y-a}$$

$$300x+300y-100a=4nx+5ny-na$$

$$(100-n)a=300x+300y-4nx-5ny$$

Из условия следует, что $n \leqslant 100$, ведь количество контейнеров без сахара — ненулевое количество. Поделим обе части на $100-n$:

$$(100-n)a=(300x-3nx)+(300y-3ny)-nx-2ny$$

$$a=3x+3y-\frac{nx+2ny}{100-n} \geqslant 0$$

$$3x+3y \geqslant \frac{nx+2ny}{100-n}$$

Далее $3x+3y>0$, так как количество $x+y$ ненулевое, иначе бы количество контейнеров с сахаром составляло бы 100%. При этом n тоже не равно 0. Тогда оценим $100-n$

$$100-n \geqslant \frac{n(x+2y)}{3x+3y}$$

$$\frac{100}{n}-1 \geqslant \frac{x+2y}{3x+3y}$$

$$\frac{100}{n} \geqslant \frac{4x+5y}{3x+3y}$$

$$n \leqslant \frac{300x+300y}{4x+5y}=75-\frac{75y}{4x+5y} \leqslant 75$$

Причем равенство достигается при $y=0$. Тогда пример для полученной оценки можно представить следующий: $a=0$, $b=6$, $x=4$, $y=0$. В этом случае условие (1) выполняется.

№19.5 *(Центр)*

Есть 16 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 175?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 176?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 180 включительно.

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 3

Решение

а) Возьмём 15 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей. Тогда сумма взятых монет равна $15 \cdot 2 + 29 \cdot 5 = 30 + 145 = 175$ рублей.

б) Мы можем взять только чётное число монеток по 5 рублей, так как нам нужна чётная сумма. Значит, не более 28 монеток по 5 рублей. Тогда сумма $\leqslant 28{\cdot}5{+}16{\cdot}2 = 140{+}32 = 172 < 176$.

в) Всего в наборе монеток на $29 \cdot 5 + 16 \cdot 2 = 145 + 32 = 177$ рублей. Значит, необходимо добавить хотя бы 3 монетки по 1 рублю.

Покажем, что 3 монеток по 1 рублю достаточно:

Научимся собирать любую сумму от 1 до 35 монетками по 1 и по 2 рубля.

1) Если это чётное число до 32 включительно, то можно получить его монетками по 2 рубля.

2) Если это 34, то его можно получить из 16 монеток по 2 рубля и двух монеток по 1 рублю.

3) Если же число нечётное, то вначале возьмём однорублёвую монетку. Останется добрать чётную сумму от 0 до 34 включительно. Её мы умеем собирать, используя не более двух монеток по 1 рублю.

Теперь научимся собирать любое число от 36 до 180: будем брать монетки по 5, пока не останется необходимая сумма в пределах от 0 до 35 рублей, которую мы умеем собирать из монеток по 1 и 2 рубля. Заметим, что в таком случае потребуется не более $\left\lceil \dfrac{180-35}{5} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{145}{5} \right\rceil = 29$ монеток по 5 рублей. Таким образом, мы сможем собрать любую целую сумму от 1 до 180 рублей включительно.