

Содержание

1	Графические методы	3
1.1	Неравенства $0 < x < 1$	3
1.2	Неравенства $0 < x < a$	18
1.3	Окружности	32
1.4	Уравнение отрезка	36
2	Аналитические методы	42
2.1	Рациональные уравнения и неравенства	42
2.2	Уравнения и неравенства с модулями	59
2.3	Иррациональные уравнения и неравенства	69
2.4	Тригонометрические уравнения и неравенства	77
2.5	Уравнения и неравенства с логарифмами и показательными функциями	83
3	Свойства функции	92
3.1	Монотонность	92
3.2	Ограниченность	95
3.3	Инвариантность (симметрия)	98
3.4	Метод исследования квадратичной функции	102

1. Графические методы

1.1. Неравенства Oxy

Задача 1

$$y = 2|x + 4| - 3|x| + |x - 6|$$

Задача 2

$$y = \left| 1 - \sqrt{|x + 3|} \right|$$

Задача 3

$$y = \left| \frac{2|x| - 1}{|x| - 3} \right|$$

Задача 4

$$y = - \left| -x^2 - 2|x| + 3 \right|$$

Параметры

Задача 5

$$y = \begin{cases} 8 - (x + 6)^2, & x < -6, \\ |x^2 - 6|x| + 8|, & -6 \leq x < 5, \\ 3, & x \geq 5. \end{cases}$$

Задача 6

$$y = \frac{x - 1}{|x - 3|} (x^2 - 9)$$

Задача 7

$$|x| + |y| = 2$$

Задача 8

$$|y| = |x^2 + 4x|$$

Задача 9

$$x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0$$

Параметры

Задача 10

$$y = 2 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$$

Задача 11

$$x = 1 + \sqrt{5 - 4|y| - y^2}$$

Задача 12

$$|x + y| + |x - y| \leq 2$$

Задача 13

$$(2|x| - xy)(y + 3 + x|y + 3|) = 0$$

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства

$$x^2 + |x + a - 3| + 5 \leq 5x + a$$

принадлежит отрезку $[1; 2]$.

Параметры

Задача 15

Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 - 16| - 6|x - a| - 2a = 0$$

имеет ровно 3 различных решения.

Задача 16

При каких a уравнение

$$||2x| - 1| = x - a$$

имеет ровно 3 решения?

Задача 17

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x + 4}}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ a = x + y. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 18

При каких a уравнение

$$|x^2 - 5x + 6| = ax$$

имеет 3 решения?

Параметры

Задача 19

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + (x^2 + 2x - 3)(3 - x^2) = 0, \\ y - ax - 6a = 0. \end{cases}$$

имеет более двух различных решений?

Задача 20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)(y + 3x - 9) = |x - 3|^3, \\ y = x + a. \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Задача 21

Определите как меняется график функции

$$y = (x - a^2)^2 + 2a$$

при изменении значений параметра a .

Параметры

Задача 22

Определите как меняется график функции

$$y = |(x - \cos a)^2 - 4(x - \cos a)| + \sin a$$

при изменении значений параметра a .

Задача 23

При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$$

имеет ровно 3 решения?

Задача 24

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

Задача 25

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5x + a)^2 - (|x| + \sqrt{6|x| - x^2} - 6)(5x + a) + (|x| - 6)\sqrt{6|x| - x^2} = 0$$

имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

Параметры

Задача 26

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$$

имеет 3 различных корня.

Задача 27

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 2,5)x + 1 = 4|x - a|$$

имеет ровно 2 различных корня?

Задача 28

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1. \end{cases}$$

Задача 29

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}|x| + 4a + 5, \\ x^2 + (y - 5a - 4)^2 = 36 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого a .

Задача 30

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Задача 31

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5x + a)^2 - (|x| + \sqrt{6|x| - x^2} - 6)(5x + a) + (|x| - 6)\sqrt{6|x| - x^2} = 0$$

имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

Задача 32

Определите как меняется график функции

$$y = (x - a^2)^2 + 2a$$

при изменении значений параметра a .

Параметры

Задача 33

Определите как меняется график функции

$$y = |(x - \cos a)^2 - 4(x - \cos a)| + \sin a$$

при изменении значений параметра a .

Задача 34

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y. \end{cases}$$

Задача 35

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

Задача 36

Найдите все такие значения a , при каждом из которых неравенство

$$-1 \leq \cos x(\cos 2x - a - 1) \leq 1$$

верно при всех действительных значениях x .

Параметры

Задача 37

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнения

$$\begin{cases} \sqrt{16 - y^2} = \sqrt{16 - a^2x^2}, \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 38

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнения

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y = \left| y - 2 + \frac{3}{x} \right|, \\ 2y(y - 4) + 3x(ax + 4) = xy(2a + 3). \end{cases}$$

имеет больше трех решений.

Задача 39

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнения

$$\begin{cases} y + 2 - \frac{4}{x} = \left| y + \frac{2}{x} - 3 \right|, \\ 2y(y + 2) + 3x(ax - 2) = xy(2a + 3). \end{cases}$$

имеет больше трех решений.

Задача 40

Найдите все значения a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$3x^2 - 24x + 64 = a|x - 3|$$

будет ровно три положительных.

Параметры

Задача 41

Найдите все значения a , при ккоторых которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{12-x^2}-y)((x+4)^2+(y+4)^2-8(x+4)+x^2-y^2-24)}{2-x^2} = 0, \\ y = 1 - 2a. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Задача 42

Найдите все значения a , при ккоторых которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y-\sqrt{10-x^2})((x+5)^2+(y+5)^2-10(x+7,5)+x^2-y^2+5)}{\sqrt{x^2-1}} = 0, \\ y = ax + a - 1. \end{cases}$$

имеет одно решение.

Задача 43

Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

имеет не менее 12 решений.

Параметры

Задача 44

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a. \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Задача 45

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3|x - 2| + |y| - 3 = 0, \\ ax - y + 2a + 2 = 0. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Задача 46

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} (x^2 + 3x + y - 4)(x - y + 4) \geq 0, \\ ax - y - 2a + 3 = 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Задача 47

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - x - 6| = (y - 1)^2 + x - 7, \\ 3y = 2x + a. \end{cases}$$

имеет ровно один или ровно два корня.

Задача 48

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{4}{x} - 3 \right| = ax - 1$$

имеет больше двух различных положительных корней.

Задача 49

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Задача 50

Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-x}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$$

имеет три различных корня.

Параметры

Задача 51

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7(36 - y^2) = \log_7(36 - a^2x^2), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y. \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Задача 52

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$.

Задача 53

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a|x + 2| + (1 - a)|x - 2| + 3 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Задача 54

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$$

меньше 2.

Параметры

Задача 55

Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \frac{(x^2 + y^2 - 6x - 18y + 65)^2}{\sqrt{-y^2 + (18 - 6x)y - (13 - x^2)(x^2 - 6x + 5)}} \leq 0, \\ 3x + 4y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 54

Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 2y + 3|x - 2| = 6 + 3|x|, \\ |x - 4| = \sqrt{(a + y - 2)(a - y + 2)}. \end{cases}$$

имеет два решения.

1.2. Неравенства Оха

Задача 1

Для каждого значения a определить число решений уравнения

$$(x^2 - a)(|x + 1| - a - 1) = 0.$$

Задача 2

Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$(x^2 - a)(|x + 1| - a - 1) \geq 0$$

не содержит в ответе ни одного решения неравенства $2 \leq |x| \leq 3$.

Задача 3

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 7a + 6x \geq x^2, \\ a \leq \sqrt{x}, \\ 3a + x \leq 10. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a .

Задача 4

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 8ax^2 + 36ax - 9a^2 = 0$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

Параметры

Задача 5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 4|x| + |a| \leq 4, \\ x^2 + 2x \leq a + 3. \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{(ax - 6)(x - a - 1)}{x} \geq 0$$

является ровно один промежуток числовой прямой.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$(x^2 - 4x)^2 - (a^2 - 3a)(x^2 - 4x) + a^3 - 4a^2 \leq 0$$

имеет ровно два различных решения.

Параметры

Задача 8

При каких значениях a уравнение

$$|x + a^2| = |a + x^2|$$

имеет ровно три корня?

Задача 9

Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$

Задача 10

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

Задача 11

Найдите все значения a , при которых наименьшее значение функции

$$y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$$

больше 2.

Параметры

Задача 12

Найдите все a , при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$$

выполнено при при всех $x \in [1; 4]$.

Задача 13

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2a^2 + 3ax - 2x^2 - 8a - 6x + 10|x| = 0$$

имеет четыре различных корня.

Задача 14

Найдите все значения a , при каждом из которых оба уравнения $a + \frac{x}{2} = |x|$ и $a\sqrt{2} + x = \sqrt{2a\sqrt{2}x - x^2 + 12}$ имеют ровно по 2 различных корня, и строгого между корнями каждого из уравнений лежит корень другого уравнения.

Задача 15

Найдите все значения a , при каждом из которых оба уравнения $a + \frac{x}{3} = |x|$ и $2a + x = \sqrt{2a^2 + 4ax - x^2 + 12}$ имеют ровно по 2 различных корня, и строгого между корнями каждого из уравнений лежит корень другого уравнения.

Параметры

Задача 16

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{10x^2 - 19x - 15} \cdot \log_3(7 - (a - 4) \cdot (x + 2)) = 0$ имеет ровно два различных корня.

Задача 17

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение

$$(7x - 6) \cdot \ln(x + a) = (7x - 6) \cdot \ln(4x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Задача 18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Задача 19

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|x - 6| + a - 6}{x^2 - 10x + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Параметры

Задача 20

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$(4|x| - a - 3)(x^2 - 2x - 2 - a) \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4; 4]$.

Задача 21

Найдите все значения a , при каждом из которых любое значение из промежутка $[-1,5; -0,5]$ является решением неравенства

$$(4|x| - a - 3)(x^2 - 2x - 2 - a) \geq 0.$$

Задача 22

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a - x^2)(a + x - 2) < 0, \\ x^2 \leq 1. \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 23

Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{(x^2 - 4x + a)^3}{2} = (a - 4x)(3x^4 + (a - 4x)^2)$$

имеет единственное решение на промежутке $(-2 - \sqrt{2}; 0]$.

Параметры

Задача 24

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leq 12, \\ a + 4x \geq x^2, \\ a \leq x. \end{cases}$$

является отрезок длиной 2.

Задача 25

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|\log_5(x^2) - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2$$

имеет ровно четыре решения.

Задача 26

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x^2 + (5a - 8)x + 2a^2 - 10a + 8 \leq 0, \\ |2x - 2a - 1| \leq 3 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 27

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + 2ax^2 - 4a}{ax^2 + x - 3a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Задача 28

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не более трех решений.

Задача 29

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2a} \leq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x-2a+4}$$

имеет ровно два решения.

Задача 30

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = \log_p p, \text{ где } p = \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$

имеет ровно 1 корень.

Параметры

Задача 31

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством

$$\frac{ax^2 - (a^2 + 2a + 8)x + 8a + 16}{x} \geq 0$$

является ровно один промежуток числовой прямой.

Задача 32

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$(x^2 + a^2 - 13)\sqrt{3x + 2a} \leq 0$$

имеет не более двух решений.

Задача 33

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$$

имеет четыре корня.

Задача 34

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x + \sqrt{y - a - 3} = 0, \\ y^2 - x^2 = (a + 1)(2x + a + 1). \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Параметры

Задача 35

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x+2}{|x+2|} + |x| \cdot (x^2 - 48) = a$$

имеет ровно три решения.

Задача 36

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$|-a^2 - a + x + 32| + |-a^2 + a + x + 3| = 2a - 29$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(-2; -1)$.

Задача 37

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{x^2 + 4x}{\sqrt{a - x^2 - ax - 6x + 7}} = \frac{2a - a^2 + 31}{\sqrt{a - x^2 - ax - 6x + 7}}$$

имеет ровно один корень.

Задача 38

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,5; 4]$.

Параметры

Источник: Ларин вариант 412 №17.1

Задача 39

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(x^2 - 3 + \sqrt{2x + a}) = (x^2 - 3)^2 + 2x + a$$

имеет единственное решение на отрезке $[0; 2]$.

Задача 40

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(2x + a + 1 - \operatorname{tg}x)^2 = (2x + a - 1 + \operatorname{tg}x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi]$.

Задача 41

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Параметры

Задача 42

Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$25^x - (a + 6) \cdot 5^x = (5 + 3|a|) \cdot 5^x - (a + 6)(3|a| + 5)$$

имеет единственное решение.

Задача 43

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 4^{ax} \cdot 2^{x^2} \leq 7^{-(x+2a)}, \\ 2x^3 + x^2 + x < 2a^3 + a^2 + a. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2; 1]$.

Задача 44

Найти все значения a , при каждом из которых любое число из отрезка $3 \leq x \leq 6$ является решением уравнения $|x - a + 5| + |x + a - 1| = 2a - 6$.

Задача 45

Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$$

имеет 4 решения.

Задача 46

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$a(a - 7,5) - 2(a - 7,5)(2^x + 2) \leq (2^x - 3x)(2^x + 2) - ax^2 + 1,5ax$$

имеет хотя бы 1 решение на промежутке $[-1; 0)$.

Задача 47

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнения

$$\sqrt{1 - 2x} \ln(25x^2 - a^2) = \sqrt{1 - 2x} \ln(5x - a)$$

имеет ровно один корень.

Задача 48

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \sin x = -\sqrt{x - a} \cos x$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; \pi]$.

Параметры

Задача 49

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 50

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0$$

имеет ровно 2 различных корня.

Задача 51

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3 - 5x} \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3 - 5x} \ln(2x + a)$$

имеет ровно 1 корень.

Задача 52

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$(4x - a - 2)\sqrt{x^2 - 6a + 32} = (4x - a - 2)\sqrt{36 - a^2}$$

имеет одно или два решения.

1.3. Окружности

Задача 1

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1). \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Задача 2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4, \\ y = ax + a - 5. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Задача 3

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y. \end{cases}$$

Параметры

Задача 4

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений

$$\begin{cases} (x + 3 \sin z)^2 + (y + 3 \cos z)^2 = 4, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

Задача 5

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - a + 3)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{7}{2}, \\ x - y = a - 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 6

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнения

$$\begin{cases} \sqrt{a - y^2} = \sqrt{a - x^2}, \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - \frac{1}{a})^2 = \frac{1}{4}, \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 8

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geq 0, \\ (y - a^2 - 3a + 18)^2 + (x - 6a)^2 = 3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}}. \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} (y - 3)(y + x + 4)(y - x) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 3a)^2 = 8a^2 + 24a + 4. \end{cases}$$

имеет ровно 5 решений.

Задача 10

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |5a - 12|. \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

⇒ **Решение задачи**

Источник: пробник ЕГЭ 29.02.2020

Параметры

Задача 11

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет 1 решение.

Задача 12

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2(1 + a)x + 2(1 - a)y - 2a^2. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 13

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

Задача 14

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + 2x - 4a = |4x + 2a|$$

имеет более двух различных корней.

1.4. Уравнение отрезка

Задача 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

Задача 2

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2y - x)a = 1 + 2a - 4a^2, \\ x^2 + y^2 + 4(x - y)a = 4 + 4a - 7a^2. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 3

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}.$$

Задача 4

Найдите наименьшее значение функции

$$z = \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y - 4)^2 + 1}.$$

Параметры

Задача 5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2ay + a^2} = |a\sqrt{2}|, \\ x^2 + y^2 \leq 8. \end{cases}$$

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 7

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 7. \end{cases}$$

Задача 8

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x - y)a = 9 - 6a - a^2, \\ x^2 + y^2 + 2(3x + 4y)a = 1 - 2a - 24a^2. \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-a)^2} = 3, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 10

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+4)^2 - 17)((2x+7)^2 + (2y-9)^2) \leq 0, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 11

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\begin{cases} y^2 - x = 4 - 2a, \\ y^4 + x^2 = a^2 - 3a + 4. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Параметры

Задача 12

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a + 2)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{5}{2}, \\ x + y = 1 - a. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 13

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 5a + 1)^2 + (y - 2a - 1)^2 = a - 2, \\ 3x - 4y = 2a + 3. \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3a + 1)^2 + (y + 2a)^2 = a - 1, \\ 4x + 3y = a + 1. \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Задача 15

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6}{\sqrt{2 - |y - x|}} = 0, \\ y - ax = 3a - 3. \end{cases}$$

Параметры

имеет ровно решение.

Задача 16

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ x^2 - |a+1|x - 2a^2 = 3. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 17

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+a)^2} = |a\sqrt{2}|, \\ x^2 + y^2 \leq 18. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 18

При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} 2 \leq y \leq 2 + \sqrt{6x - x^2 - 5}, \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0. \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений? Найдите эти решения.

Параметры

Задача 156

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \cdot \ln\left(\frac{3x + 4y + a}{20}\right) = 0, \\ (x^2 + y^2 + 6x) \cdot (x^2 + y^2 - 12x) = 0. \end{cases}$$

имеет два различных решения.

2. Аналитические методы

2.1. Рациональные уравнения и неравенства

Задача 1

Решить уравнение

$$7x + 10a - 1 = 4x - 9a + 5$$

при всех значениях параметра a .

Задача 2

Решить уравнение

$$(a^2 - 9)x - a + 3 = 0$$

при всех значениях параметра a .

Задача 3

Найти все a , при которых уравнение

$$5x - 17a = 21 - 5ax$$

имеет корень, больший 3.

Задача 4

Найти значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} -2x - 2by = b + 4, \\ (b + 4)x + 2y = b + 1. \end{cases}$$

не имеет решений.

Параметры

Задача 5

Найти значения параметра m , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (m - 3)x - 24y = 8, \\ x + (m + 8)y = -1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Задача 6

Найти значения параметра a , при которых уравнение

$$(4 - a^2)x^2 + 2ax + 3 = 0$$

имеет одно решение.

Задача 7

Решить уравнение

$$ax^2 + 2x - 1 = 0$$

при всех значениях параметра a .

Параметры

Задача 8

Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$$

не имеет действительных корней.

Задача 9

Найти значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - (2a + 3)x + a^2 - 4 = 0$$

имеет два решения, одно из которых в 3 раза больше другого.

Задача 10

Найти значения параметра a , при которых сумма $x_1^2 + x_2^2$ минимальна, где x_1 и x_2 — различные корни уравнения

$$x^2 - 2ax + 5a + 7 = 0.$$

Задача 11

Известно, что корни уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$. Найдите a и корни каждого из уравнений.

Параметры

Задача 12

Найдите все значения a , при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a + 7 = 0$$

равна 10.

Задача 13

Найдите все a , при которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \text{ и } ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Задача 14

При всех значениях a решите уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0.$$

Задача 15

Найти все a , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

Параметры

Задача 16

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

Задача 17

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения

$$x^2 + ax + 2012 = 0 \text{ и } x^2 + 2012x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Задача 18

Решить неравенство $ax \leq 5$ при всех значениях параметра a .

Задача 19

Решить неравенство $(a^2 - 5a - 6)x \geq a + 1$ при всех значениях параметра a .

Параметры

Задача 20

Найти значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x - 2a \geq 1, \\ x + 3a < 5 \end{cases}$$

имеет решения.

Задача 21

Найти значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} a - 4x \geq 7, \\ a \leq x + 5 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Задача 22

Найти значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x + 5a \leq 9, \\ 3x - a \geq 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Задача 23

При каких a неравенство $a - x \leq 3$ является следствием неравенства $x > 4$?

Параметры

Задача 24

При каких a неравенства $2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$ равносильны?

Задача 25

Найти значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$x^2 + (3a - 1)x - 4a^2 + 6a - 2 \leq 0$$

образуют отрезок числовой прямой длины > 5 .

Задача 26

Решить неравенство

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 > 0$$

при всех значениях параметра a .

Задача 27

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x^2 - x - a)^2 = 2x^4 + 2(x + a)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 1]$.

Параметры

Задача 28

При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$(x + 2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$$

найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

Задача 29

Найдите все a , при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 4$.

Задача 30

При каких значениях параметра a частью решения неравенства

$$\frac{2ax + 3}{5x - 4a} < 4$$

является луч $[-7; +\infty)$?

Задача 31

При любом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{5}{x - 4a} > 4a.$$

Параметры

Задача 32

При любом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{1}{ax - a} > \frac{3}{4}.$$

Задача 33

При всех значениях a решите уравнение $(a^2 - 16)x = a - 4$.

Задача 34

При всех значениях a решите уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0.$$

Задача 35

При каких a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

минимальна?

Параметры

Задача 36

Найти все a , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

Задача 37

При всех a решить неравенство $(a^2 - 3a + 2)x \geq a - 1$.

Задача 38

При всех a решить неравенство $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$.

Задача 39

При каких значениях a неравенство

$$ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$$

выполняется для всех действительных значений x ?

Параметры

Задача 40

Найдите a такое, что сумма квадратов действительных корней уравнения

$$x^4 + ax^2 - 2017 = 0$$

равна 4.

Задача 41

При каких a неравенства $2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$ равносильны?

Задача 42

При каких a неравенство $a - x \leq 3$ является следствием неравенства $x > 4$?

Задача 43

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 6x^3 - 5ax^2 + 24ax + 4a^2 = 0$$

имеет ровно три различных корня.

Параметры

Задача 44

Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

нет ни одного решения неравенства $x^2 < 1$.

Задача 45

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leq 12, \\ a + 4x \geq x^2, \\ a \leq x. \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

Задача 46

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{ax^2 - (a^2 + 2a + 8)x + 8a + 16}{x} \geq 0$$

является ровно один промежуток числовой прямой.

Задача 47

При каких действительных значениях параметра a существует хотя бы одно действительное x , удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4? \end{cases}$$

Задача 48

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\begin{cases} y^2 - x = 2a + 8, \\ y^4 + x^2 = a^2 - 5a - 6. \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Задача 49

Найдите все значения параметра $a \in [-6, 6]$ при которых неравенство

$$(a + 3) \cdot ((x + 1)(a + 2) + 3x) > 0$$

выполняется при любых $x \geq 0$.

Задача 50

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(1 + a^2)x^6 + 3a^2x^4 + 2(1 - 6a)x^3 + 3a^2x^2 + a^2 + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Параметры

Задача 51

При каких значениях b неравенство

$$x^2 + (2a + 4b)x + 2a^2b + 4b^2 - 2ab + 6b + 15 \leq 0$$

не имеет решений ни при одном значении a ?

Задача 52

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x + 2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a + 2)x^3. \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Задача 53

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 18px + 77p^2 \leq 0, \\ (x - 324)^2 \geq (29p)^2. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 54

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

Задача 55

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$4x^2 - 3x - a = (3x + a)^3 - 64x^6$$

не имеет решений.

Задача 56

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Задача 57

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Параметры

Задача 58

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для функции $f(x) = x^2 - 4ax + a^2$ уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно 4 решения.

Задача 59

Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет ровно одну точку минимума.

Задача 60

Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x) = ax^4 + 4x^3 - 3x^2 - 5$ на отрезке $[-2; 2]$ имеет две точки максимума.

Задача 61

Найдите все значения параметра, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = -x^4 + \frac{2ax^3}{9} + \frac{a^2x^2}{3}$$

на отрезке $[-1; 0]$ не превышает единицы и достигается на левом конце отрезка.

Параметры

Задача 62

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y-3)^2)((x-2)^2 + (y-8)^2) \leq 0, \\ (2x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2. \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Задача 63

Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$(x^2 - x - a)^2 = 2x^4 + 2(x+a)^2$$

имеет 1 решение на отрезке $[-1, 1]$.

2.2. Уравнения и неравенства с модулями

Задача 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a - x)^2 + 4a + 1 = (2x + 1)^2 - 8|x|$$

имеет четыре различных корня.

Задача 2

Решить неравенство:

$$x^2 - 5|x| + 6 \geq 0.$$

Задача 3

Решить неравенство, раскрывая модуль по случаям

$$|x^2 - 5x + 6| + |x - 4| \leq x^2 + 5x + 7.$$

Задача 4

Решить неравенство:

$$|x^2 + 3x| < x + 4.$$

Параметры

Задача 5

Решить неравенство:

$$x^2 - x - 2 < |5x - 3|.$$

Задача 6

Решить уравнение

$$|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0.$$

Задача 7

Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$|5x + 9a - 4| = |7x + 4a - 1|$$

имеет два различных решения, среднее арифметическое которых равно 9.

Задача 8

Решить уравнение

$$|x + 5| - a|x - 7| = 12$$

при всех значениях параметра a .

Параметры

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 10

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a - x)^2 + 4a + 1 = (2x + 1)^2 - 8|x|$$

имеет четыре различных корня.

Задача 11

Найдите все a , при которых неравенство выполняется для любых x

$$\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3.$$

Задача 12

Решить неравенство

$$|x^3 - 1| \leq 1 - x.$$

Параметры

Задача 13

Решить уравнение

$$|x^2 - ax + 32| + \sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0.$$

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|x^2 + 4x - a| > 6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

Задача 15

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

Задача 16

Для каждого значения a определить число решений уравнения

$$(x^2 - a)(|x + 1| - a - 1) = 0.$$

Параметры

Задача 17

Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$(x^2 - a)(|x + 1| - a - 1) \geq 0$$

не содержит в ответе ни одного решения неравенства $2 \leq |x| \leq 3$.

Задача 18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Задача 19

Найдите все значения a , при которых наименьшее значение функции

$$y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$$

больше 2.

Задача 20

Найдите все a , при которых отрезок $[3; 4]$ не имеет общих точек с множеством решений неравенства

$$\left| x + a - \left| 2a - \frac{x}{2} \right| \right| < 1.$$

Параметры

Задача 21

Решить неравенство

$$|x^2 + 2x - 4| \leq 4.$$

Задача 22

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$ имеет ровно один корень.

Задача 23

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 5ax + 4a}$ имеет ровно два различных корня.

Задача 24

Найдите все значения a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$x^2 - 10x + 35 = a|x - 6|$$

будет ровно два положительных.

Параметры

Задача 25

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \left|1 - \frac{|x|}{2}\right| = 1$$

имеет ровно два различных корня.

Задача 26

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x \cdot |x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 27

Найдите все значения параметра a , при которых ровно одно решение $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + ay^2 + x + 3 - a = 0, \\ ax^2 + 2y^2 + y + 3 - a = 0. \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x| + |y| > 2$.

Задача 28

Найдите наибольшее значение параметра a , при котором уравнение

$$ax^2 = 2|x - 2|\sqrt{0,5x - 1} + |x - 4|\sqrt{x - 1}$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 29

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$a + |x| + \frac{x^2 + (a - 2)^2}{a + |x|} \leq 2\sqrt{x^2 + (a - 2)^2}$$

имеет единственное решение.

Задача 39

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 4ax + a(4a - 1))^2 - 3(x^2 - 4ax + a(4a - 1)) - |a|(|a| - 3) = 0$$

имеет более двух корней.

Задача 40

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x + 2| + |x - a|)^2 - 4(|x + 2| + |x - a|) + 3a(4 - 3a) = 0$$

имеет хотя бы два решения.

Параметры

Задача 41

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\frac{4a}{a-6} \cdot 3^{|x|} = 9^{|x|} + \frac{3a+4}{a-6}$$

Задача 42

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$x - x^2 + 2a \geq |x - 1| + a^2$$

имеет корни и все корни $> \frac{1}{2}$.

Задача 43

Найдите все a , при которых неравенство

$$13 \sin u - 7 |\sin u + v - 2a| + 3 |\sin u - 2v - a - 1| \leq 16$$

выполняется для любой пары (u, v) .

Задача 44

Найдите все a такие, что неравенство

$$|3 \sin x + a^2 - 22| + |7 \sin x + a + 12| \leq 11 \sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

верно для любого x .

Параметры

Задача 45

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$x + 2|x - 3| - 3|x - a - 4| = 7|x - a|$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 46

Найдите все значения параметра a такие, что наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше -2 .

Задача 47

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2.3. Иррациональные уравнения и неравенства

Задача 1

Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 3x - 10} = -x^2 - 3x + 10.$$

Задача 2

Решить уравнение

$$(x - 3)\sqrt{x^2 + 5x - 2} = 2x - 6.$$

Задача 3

Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1.$$

Задача 4

Решить неравенство

$$\sqrt{(x + 3)(x - 8)} > x + 2.$$

Параметры

Задача 5

Найти значения параметра a , при которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2 + 9)x + 9a)\sqrt{x+7} = 0$$

имеет два различных решения.

Задача 6

Найти значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8a^2} = \sqrt{x^4 - 6ax}$$

имеет одно решение.

Задача 7

Решить неравенство

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$$

при всех значениях параметра a .

Задача 8

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Параметры

Задача 9

При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{x - 2a} + \sqrt{a - x} \geq 1$$

имеет единственное решение?

Задача 10

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Задача 11

При каких значениях параметра a решением неравенства

$$\sqrt{4a^2 - 3ax} < x - 2a$$

является луч без граничной точки?

Задача 12

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = b$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

Параметры

Задача 13

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - a + 5} = x - 2a + 4$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

Задача 15

Найдите все значения параметра a , при которых любое значение $x \in (3; 7)$ не является решением неравенства

$$\sqrt{13x^2 - 12ax} \geq 2x - a.$$

Параметры

Задача 16

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет единственное решение.

Задача 17

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{\sqrt{x-0,5}} \cdot (\sqrt{a - 8x^4 - 2x^2}) = 0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее неравенству $x(x - 1) < 0$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$5x + \frac{18}{\sqrt{x^2 + 36}} = a\sqrt{x^2 + 36}$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 19

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - 2a} + \sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

Параметры

Задача 20

Найдите наименьшее значение параметра a , при котором уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{(5x+1)^2 + (5x+2)^2} + \sqrt{(5x+7)^2 + (5x-6)^2} = a$$

Задача 21

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+a}} + \frac{16}{\sqrt{y-a}} \leq 22 - \sqrt{x+a} - 4\sqrt{y-a}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

Задача 22

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 - x + 2) - yx^3 = yx(2 - x), \\ y^2 + (2a - 7)y + (a + 2)(5 - 3a) = 0. \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

Задача 23

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} = 16a^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} + \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

Параметры

Задача 24

Найдите все значение a , при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x+a} = a\sqrt{x-a}$$

имеет единственное решение.

Задача 25

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - ax\sqrt{3-2x-x^2} + a^2 = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 26

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых уравнение

$$2a^x \cdot \log_3^2 |a-4| = a^{2x} + 1$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 27

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Параметры

Задача 28

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - 2$$

имеет ровно 3 различных решения.

Задача 29

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$$

имеет два различных корня.

2.4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Задача 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$.

Задача 2

Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$$

имеет решения на отрезке $[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$.

Задача 3

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(2x + a + 1 + \operatorname{tg} x)^2 = (2x + a - 1 - \operatorname{tg} x)^2$$

имеет единственный корень на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Задача 4

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$ единственный корень.

Задача 5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно восемь различных решений.

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$5x + \frac{18}{\sqrt{x^2 + 36}} = a\sqrt{x^2 + 36}$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 7

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{\sin x - a \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{a + 2}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Параметры

Задача 8

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ (2x + 14a^2 - 7)(4x - 4a^2 - 15) \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin^2 x + (a - 2)^2 \sin x + a(a - 2)(a - 3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

Задача 10

Найдите все такие значения a , при каждом из которых неравенство

$$-1 \leq \sin x(a - \cos 2x) \leq 1$$

верно при всех действительных значениях x .

Задача 11

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x(1 - a) + 3(1 - 2a) \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2x}{3}\right) + \pi a$$

имеет не более двух экстремумов на промежутке $(\pi; 5\pi)$.

Параметры

Задача 12

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\pi \cdot \cos(\pi^{2x-x^2}) = a - \sqrt{3} \cdot \sin(\pi^{2x-x^2})$$

имеет ровно одно решение.

Задача 13

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение

$$36 \cdot \sin\left(\arcsin \frac{x}{36}\right) = \frac{(x-p)^2}{4}$$

имеет единственный корень.

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\cos \sqrt{2\pi ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2\pi ax - 4x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Задача 15

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$-1 \leq \sin x \cdot (a - \cos 2x) \leq 1$$

Параметры

Задача 16

Найдите все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{10 - a - (a^2 - 3a + 2) \sin x}{\cos^2 x + a^2 + 3} < 1$ содержит отрезок $[0; \frac{3\pi}{4}]$.

Задача 17

Найдите все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{5 - a - (a^2 - 2a + 1) \sin x}{\cos^2 x + a^2 + 2} < 1$ содержит отрезок $[0; \frac{2\pi}{3}]$.

Задача 18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 19

Найдите все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a - (a^2 - 2a) \cos 2x + 2}{3 - \cos 4x + a^2} < 1$$

содержит $[-2\pi; -\frac{7\pi}{4}]$.

Параметры

Задача 20

При каких значения параметра a система

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |xy|) = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

имеет не менее 12 решений.

Задача 21

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$ единственный корень.

2.5. Уравнения и неравенства с логарифмами и показательными функциями

Задача 1

Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Задача 2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$.

Задача 3

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \ln \frac{3x+4y+a}{20} = 0, \\ (x^2 + y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 12x) = 0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 4

Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\log_a \frac{3 + 2x^4}{1 + x^4} + \log_a \frac{5 + 4x^4}{1 + x^4} > 1$$

выполняется для всех действительных значений x .

Задача 5

При каких значениях параметра a при всех $x \in [2; 2,5]$ выполняется неравенство

$$\log_{|x-a|}(x^2 + ax) \leq 2?$$

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}(ax) - \log_a x \leq 7$$

имеет решения, ни одно из которых не принадлежит отрезку $[2; 8]$.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(7x + 4y - 11) = \log_3(2x + y - 3) + 1, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Параметры

Задача 8

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\log_{0,5}(x^2) - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{\log_{0,4}(6x^2 - 13x + 5ax - 6a^2 - 13a + 6)}{\sqrt{2x - 3a + 4}} = 0$$

имеет единственный корень.

Задача 10

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(\log_6(x+a) - \log_6(x-a))^2 - 4a(\log_6(x+a) - \log_6(x-a)) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

имеет ровно 2 решения.

Задача 11

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{\log_{0,4}(6x^2 - 13x + 5ax - 6a^2 - 13a + 6)}{\sqrt{2x - 3a + 4}} = 0$$

имеет единственный корень.

Параметры

Задача 12

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{\log_{0,2}(6x^2 + 16ax + 7x + 8a^2 + 2a - 2)}{\sqrt{4 - 3a - 2x}} = 0$$

имеет единственный корень.

Задача 13

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{10x^2 + x - 24} \cdot \log_2((x - 3) \cdot (a + 5) + 14) = 0$ имеет ровно два различных корня.

Задача 14

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых корни уравнения $3a^{2x} - 16^x + 2 \cdot (4a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-2; -1]$.

Задача 15

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых корни уравнения $5a^{2x} - 2 \cdot 4^x + 9 \cdot (2a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-3; 1]$.

Параметры

Задача 16

Найдите все такие значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x} \cdot \ln(9x^2 - a^2) = \sqrt{5-7x} \cdot \ln(3x + a)$$

имеет ровно один корень.

Задача 17

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7(36 - y^2) = \log_7(36 - a^2x^2), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{11}(a - y^2) = \log_{11}(a - x^2), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 19

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^x \cdot (y + 1)(1 - y \cdot 2^x) = a^3 \\ (1 + 2^x)(1 - y \cdot 2^x) = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Параметры

Задача 20

Найдите все значения параметра $a \neq 0$

$$\log_2^2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1) - \log_2 \frac{a^2}{6} \cdot \log_2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1) \leq 0$$

не имеет решений.

Задача 21

Найдите все значения x , при которых равенство

$$2 \log_{2+a^2}(4 - \sqrt{7 - 2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4 - 3x)$$

выполняется при любом значении параметра a .

Задача 22

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{a}{25^x} - a = 2 - \frac{25^{-2x}}{5}$$

имеет ровно 2 корня, хотя бы один из которых не менее 0,5.

Задача 23

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых область определения функции

$$y = \log_{0,5}(\sqrt{x} \log_a 3 - \sqrt{a} \log_a 3 - x^{0,5 + \log_x(\log_a x)} + \sqrt{a} \log_a x)$$

содержит ровно 4 целых числа.

Параметры

Задача 24

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_4(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

Задача 25

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(\log_7(x + a) - \log_7(x - a))^2 + 3a \log_7(x - a) = 3a(\log_7(x + a) - 1) + 9 - 2a^2$$

имеет ровно два решения.

Задача 26

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{2x}^2(4ax - a^2 + 1) - 2 \log_{2x}(4ax - a^2 + 1) = 0$$

имеет более двух корней.

Задача 27

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\log_4(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

Параметры

Задача 28

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_a \sqrt{10 + 3a^{2\cos x}} = 2 \cos x$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 29

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственное решение.

Задача 30

Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых любое значение x из отрезка $[1; 1]$ будет являться решением неравенства

$$3a^{2x} - 16^x + 2 \cdot (4a)^x \geq 0$$

Задача 31

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{\log_{0,4}(6x^2 - 13x + 5ax - 6a^2 - 13a + 6)}{\sqrt{2x - 3a + 4}} = 0$$

имеет единственный корень.

Параметры

Задача 32

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}^2(ax) - \log_a x \leq 7$$

имеет решения, каждое из которых не принадлежит отрезку $[2; 8]$.

Задача 33

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y. \end{cases}$$

Задача 34

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 5 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 5)^2 + \ln^2(x - a)$$

имеет один корень на отрезке $[-1; 3]$.

Задача 35

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

3. Свойства функции

3.1. Монотонность

Задача 1

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = a$$

не имеет решений из промежутка $x \in [0; \pi]$

Задача 2

При каких значениях параметра a неравенство

$$4^{\cos x} - 2(a - 3) \cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$

выполняется при всех действительных x ?

Задача 3

Решите уравнение

$$2^{x-4,5} = \frac{3-x}{2}.$$

Задача 4

Решите неравенство

$$0,5^{6-x} + \log_{0,2}(4-x) > 0,5^{4+x} + \log_{0,2}(x+2).$$

Параметры

Задача 5

Решите уравнение

$$4\sqrt{6-5x} + |3x-2| = 4x + |3\sqrt{6-5x} - 2|$$

Задача 6

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$27x^6 + (3a - 4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$(\sin^2 x - a)^9 - (6 \sin x + a)^3 = (6 \sin x + a)^9 - (\sin^2 x - a)^3$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 8

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых любой корень уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3 \log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|4 \cos x + a + 6| + |5 \cos x + a^2 + 1| \leq 10 \cos x + |a^2 + a - 2| + 10.$$

Задача 10

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения:

$$3^{1-x^2-2ax-2a} = \log_3 \frac{|x+a| + 5|a-1|}{2|a-1|}$$

принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

Задача 11

Найти все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$27x^6 + 3x^2 + (2a - 6x - 2)^3 - 6x = 2 - 2a$$

имеет хотя бы один корень.

3.2. Ограниченность

Задача 1

Для каких значений параметра a уравнение

$$\frac{x}{(x+1)^2} + 2a \frac{\sqrt{x}}{x+1} + 1 = 0$$

имеет решения?

Задача 2

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 4

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$16a^2 + 40a + 20 + 6^{100x^2 - 60x + 10} + \sin(5\pi x) = 0$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

Параметры

Задача 5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5a^2 - 26a + 5)^6 + (5^{x^2-x} - 5a)^4 = 0$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$11|x + a| + 2x + 3|x - 5| = 5|x + a - 4|$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 10|x - 7| + 16 \log_4(x^2 - 14x + 53) = 4a + 3|x - 4a - 7|$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 8

Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{5a + 50x - 10ax}{25x^2 + 10ax + a^2 + 16}$$
 содержит отрезок $[0; 1]$.

Параметры

Задача 9

Найдите все значения параметра $p \in [-4; 4]$ такие, что неравенство

$$(p - 2)((x + 1)(p - 3) + 2x) > 0$$

выполнено при всех $x \geq 0$.

3.3. Инвариантность (симметрия)

Задача 1

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$2^x + 2^{4-x} = a^2 - 3a + 10$$

Задача 2

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$9^{1-x} \cdot 3^{x^2} + a^3 - 5a^2 + 4a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3$$

Задача 3

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 2|x| - 1 = 3y + 2x^2 - 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Задача 4

Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x. \end{cases}$$

Параметры

Задача 5

Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y) \sin \alpha + 8 \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha. \end{cases}$$

имеет единственный корень.

Задача 6

Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b , для каждой из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Задача 7

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2 \cos^2 x + \left(5a + \frac{1}{a+1}\right) |\sin x| = a^2 - 6a + 2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Параметры

Задача 8

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x^4 + (a - 3)^4} = |x + a - 3| + |x - a + 3|$$

имеет единственное решение.

Задача 9

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \cos 2x + a^2 + 2a - 1$$

имеет 1 решение.

Задача 10

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$x^3 + \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$$

имеет 1 решение.

Задача 11

Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$a^2(x^2 + 1)^3 + (x^3 + 1)^2 = 12ax^3$$

имеет 1 решение.

Параметры

Задача 12

Найдите все значения параметра a такие, что система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет 1 решение.

3.4. Метод исследования квадратичной функции

Задача 1

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - (2a - 5)x + a - 7 = 0$$

имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 3.

Задача 2

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2(a + 1)x - 2a - 1 = 0$$

имеет два различных корня, каждый из которых больше -2 .

Задача 3

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 3)x^2 - 2(a + 3)x - 2a - 3 = 0$$

имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(-2; 1)$.

Задача 4

Найдите все значения параметра a , при которых больший корень уравнения

$$(a - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$$

больше 100.

Задача 5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$x^2 - (a - 5)x + a^2 - 4a - 5 < 0$$

будет выполнено для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-4; 0)$.

Задача 6

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$4(a - 3)x^2 - 2(2a + 1)x + a > 0$$

имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

Задача 7

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 4)x^2 - 6(a - 2)x + 7a - 10 = 0$$

имеет хотя бы один корень, меньший 3.

Параметры

Задача 8

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\frac{3}{x+1} > 1$$

имеет своим следствием неравенство

$$(a+1)x^2 - (3a+4)x + 3 > 0.$$

Задача 9

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$(a-4)x^2 - 2(2a-1)x + 4a - 4 > 0$$

имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0,5; 0,5]$.

Задача 10

Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$ax^2 + 2(a-2)x + a - 5 > 0$$

является подмножеством множества решений неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Задача 11

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 - (a+1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$$

имеет два корня разных знаков.

Задача 12

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(2a - 1)x^2 - (a - 3)x + a + 5 = 0$$

имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых больше 1.

Задача 13

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2(a - 6)x - 2a + 6 = 0$$

имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 2.

Задача 14

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$4x^2 + 2(a - 2)x + a^2 + 2a - 8 < 0$$

будет выполнено для любого значения x , принадлежащего интервалу $(0; 2)$.

Параметры

Задача 15

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a + 4)x^2 + 4(a + 1)x + 2a + 2 = 0$$

имеет хотя бы один корень, больший -2 .

Задача 16

При каких значениях параметра a все решения уравнения

$$(a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + a - 3 = 0$$

удовлетворяют условию $-1 < x < 5$?

Задача 17

Найдите все значения параметра a , при которых все решения неравенства $-1 < 2x < 0$ заключены в решениях неравенства

$$ax^2 - 2(a - 3)x + a - 1 > 0.$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$x^2 - (a - 5)x + a^2 - 4a - 5 < 0$$

будет выполнено для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-4; 0)$.

Параметры

Задача 19

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 4)x^2 - 6(a - 2)x + 7a - 10 = 0$$

имеет хотя бы один корень, меньший 3.

Задача 20

Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$ax^2 + 2(a - 2)x + a - 5 > 0$$

является подмножеством множества решений неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$.