Решения основной волны ЕГЭ 2023

Содержание

Часть 1

№1.1

Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линяя равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

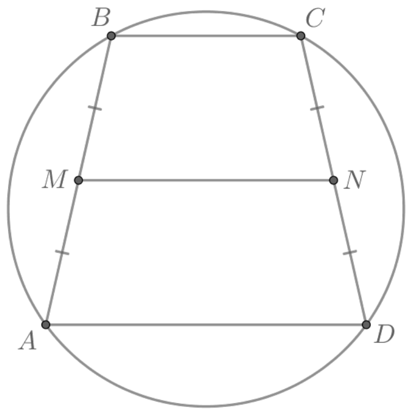
Ответ

6

Решение

Если вокруг трапеции описана окружность, то она является равнобедренной, то есть $AB = CD$. Тогда периметр трапеции можно записать в виде

$$P = AB + BC + CD + AD = 2AB + BC + AD$$



Значит,

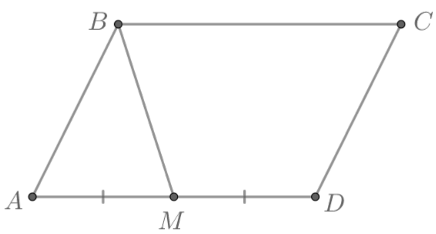
$$AB = \frac{P - (BC + AD)}{2} = \frac{P}{2} - \frac{BC + AD}{2}$$

Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то есть $\dfrac{BC + AD}{2} = 5$, то получаем

$$AB = \frac{22}{2} - 5 = 11 - 5 = 6.$$

№1.2

Дан параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна 12. Точка M — середина AD. Найдите площадь четырехугольника $BCDM$.



Ответ

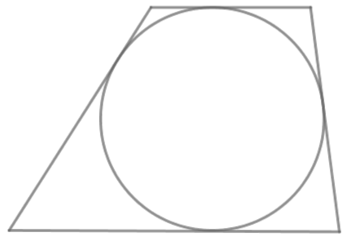
9

Решение

Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ABD и BCD, их площади равны по $\frac{12}{2} = 6$. В треугольнике ABD медиана BM делит его на два равновеликих треугольника ABM и BMD, площади которых равны по 3. В итоге $S_{BCDM} = S_{ABCD} - S_{ABM} = 12 - 3 = 9$.

№1.3

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 4 и 12. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ

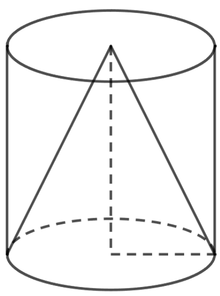
8

Решение

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Следовательно, сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон, то есть равна $4 + 12 = 16$. Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то ответ: $16 : 2 = 8$.

№2.1

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Ответ

54

Решение

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле $S_{\text{кон}} = \pi r l$, где r — радиус основания, h — высота, l — образующая. В силу соотношения $l^2 = r^2 + h^2$, учитывая, что $h = r$, получим: $l = r\sqrt{2}$. Тогда $S_{\text{кон}} = \pi\sqrt{2}r^2$, откуда находим квадрат радиуса:

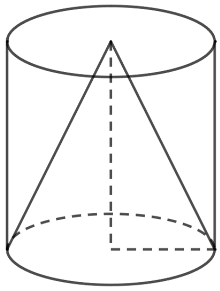
$$\pi\sqrt{2}r^2 = 27\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{27}{\pi}$$

По условию, конус и цилиндр имеют общую высоту и равные радиусы основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{цил}} = 2\pi r h$, откуда, учитывая, что $h = r$, получаем:

$$S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{27}{\pi} = 54$$

№2.2

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 6. Найдите объём цилиндра.



Ответ

18

Решение

Объём конуса равен

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}Sh$$

где S — площадь основания конуса, h — его высота.

Объём цилиндра равен

$$V_{\text{ц}} = Sh$$

где S — площадь основания цилиндра, h — его высота.

По условию конус и цилиндр имеют общие основание и высоту, тогда

$$V_{\text{ц}} = 3V_{\text{к}} = 3 \cdot 6 = 18$$

№3.1

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 6 из Швеции, 4 из Норвегии и 7 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Норвегии.

Ответ

0,2

Решение

Всего в соревнованиях принимают участие $3+6+4+7 = 20$ спортсменов. Последним мог выступать только один из 20 спортсменов, и все спортсмены с одинаковыми вероятностями могли выступать последними. Тогда вероятность того, что последним будет выступать спортсмен из Норвегии, равна

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

№4.1

Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до тысячных.

Ответ

0,103

Решение

Если вероятность попадания в мишень равна 0,7, то вероятность промахнуться равна $1 - 0,7 = 0,3$. Следовательно, вероятность 3 раза попасть в мишень и 1 раз промахнуться равна

$$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,1029.$$

После округления до тысячных получаем 0,103.

№5.1

Решите уравнение $5^{x-2} = 125$.

Ответ

5

Решение

$$5^{x-2} = 125$$

$$5^{x-2} = 5^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

№5.2

Решите уравнение $3^{2-x} = 81$.

Ответ

-2

Решение

$$3^{2-x} = 81$$

$$3^{2-x} = 3^4$$

$$2 - x = 4$$

$$x = -2$$

№6.1

Найдите значение выражения

$$\frac{\log_{12} 10}{\log_{12} 2} + \log_2 \frac{8}{5}$$

Ответ

4

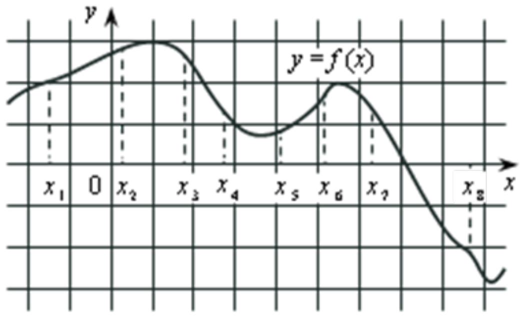
Решение

По свойствам логарифмов:

$$\frac{\log_{12} 10}{\log_{12} 2} + \log_2 \frac{8}{5} = \log_2 10 + \log_2 \frac{8}{5} = \log_2 \left(10 \cdot \frac{8}{5}\right) = \log_2 (2 \cdot 8) = \log_2 16 = 4$$

№7.1

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ

4

Решение

Производная функции в точке положительна, если функция в этой точке возрастает. Значит, $f'(x) > 0$ в точках x_1, x_2, x_5 и x_6.

№8.1

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 95 см до 115 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 140 см до 160 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ

96

Решение

Из формулы следует, что

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{60} - \frac{1}{d_2}$$

Так как $140 \leqslant d_2 \leqslant 160$, то

$$-\frac{1}{140} \leqslant -\frac{1}{d_2} \leqslant -\frac{1}{160}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{140} \leqslant \frac{1}{d_1} \leqslant \frac{1}{60} - \frac{1}{160} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{105} \leqslant \frac{1}{d_1} \leqslant \frac{1}{96} \quad \Leftrightarrow \quad 96 \leqslant d_1 \leqslant 105$$

Так как расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 95 см до 115 см, то наименьшее $d_1 = 96$ см.

№9.1

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

Ответ

25

Решение

Обозначим количество литров, которые пропускает вторая труба в минуту, через x, $x > 0$. Тогда первая труба пропускает в минуту $x - 5$ литров.

Первая труба наполнит резервуар объемом 500 литров за $\frac{500}{x-5}$ минут.

Вторая труба заполнит резервуар объемом 375 литров за $\frac{375}{x}$ минут. При этом будет затрачено на 10 минут меньше, чем на наполнение первой трубой резервуара объемом 500 литров, то есть

$$\frac{500}{x-5} - \frac{375}{x} = 10$$

$$\frac{500x}{x(x-5)} - \frac{375(x-5)}{x(x-5)} = \frac{10x(x-5)}{x(x-5)}$$

$$500x - 375(x-5) = 10x(x-5)$$

$$500x - 375x + 375 \cdot 5 = 10x^2 - 50x$$

$$10x^2 - 175x - 375 \cdot 5 = 0$$

$$2x^2 - 35x - 375 = 0$$

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 + 4 \cdot 375 \cdot 2}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 3000}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{35 \pm 65}{4}$$

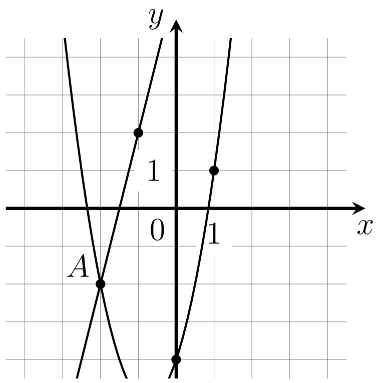
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{35+65}{4} = 25 \\ x = \frac{35-65}{4} = -\frac{30}{4} < 0 \end{array}\right.$$

Учитывая условие $x > 0$, получаем, что подходит только $x = 25$.

Тогда вторая труба пропускает 25 литров воды в минуту.

№10.1

На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ

$2,5$

Решение

Восстановим уравнение функции $f(x)$. По картинке видно, что её график проходит через три целые точки: $(-2;-2)$, $(0;-4)$ и $(1;1)$.

Так как график $f(x)$ проходит через точку $(0;-4)$, то имеем уравнение:

$$f(0) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -4 \quad \Leftrightarrow \quad c = -4$$

Так как график $f(x)$ проходит через точку $(1;1)$, то имеем уравнение:

$$f(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a + b - 4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 5$$

Так как график $f(x)$ проходит через точку $(-2;-2)$, то имеем уравнение:

$$f(-2) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = -2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 4a - 2b - 4 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - b = 1$$

Решим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 5 - a \\ 2a - (5 - a) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 5 - a \\ 2a - 5 + a = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 5 - a \\ 3a = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции $f(x)$:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4$$

Восстановим уравнение функции $g(x)$. По картинке видно, что её график проходит через целые точки $(-2;-2)$ и $(-1;2)$. Значит, можем составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} g(-2) = -2 \\ g(-1) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2k + d = -2 \\ -k + d = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = 2k - 2 \\ d = k + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k + 2 = 2k - 2 \\ d = k + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = 4 \\ d = 6 \end{cases}$$

Таким образом, мы полностью восстановили уравнение функции $g(x)$:

$$g(x) = 4x + 6$$

Найдем координаты второй точки пересечения графиков этих функций:

$$2x^2 + 3x - 4 = 4x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)(2x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = -2 \\ &x = 2,5 \end{aligned}\right.$$

Значит, абсцисса точки B равна 2,5.

№11.1

Укажите наибольшее значение $y = 12 + 9x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[3; 21]$.

Ответ

39

Решение

ОДЗ функции $x \geqslant 0$.

Найдём производную функции:

$$y' = (12)' + 9(x)' - 2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'$$

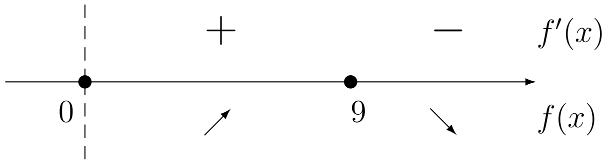
$$y' = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 9 - 3\sqrt{x}$$

Найдём экстремумы функции:

$$9 - 3\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

Воспользуемся методом интервалов:



Таким образом точка максимума функции $x = 9$. Так как эта точка принадлежит указанному отрезку, то $y(9)$ — наибольшее значение исходной функции:

$$12 + 9 \cdot 9 - 2 \cdot 9\sqrt{9} = 12 + 81 - 54 = 39$$

№12

№12.1

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 2\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) πk; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) -3π; $-\dfrac{17\pi}{6}$.

Решение

а) По основному тригонометрическому тождеству получаем

$$2\cos^3 x = \sqrt{3}(1 - \cos^2 x) + 2\cos x$$

Раскроем скобки, перенесём слагаемое с минусом в левую часть, разложим на множители:

$$\cos^2 x(2\cos x + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 2\cos x$$

$$(2\cos x + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0$$

Отсюда получаем $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = \pm 1$.

Следовательно, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) Отберем подходящие корни с помощью неравенств:

$$-3\pi \leqslant \pi k \leqslant -\frac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -3 \leqslant k \leqslant -2{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = -3$$

$$-3\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -\frac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -3 \leqslant \frac{5}{6} + 2k \leqslant -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad -3\frac{5}{6} \leqslant 2k \leqslant -3\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad k \in \emptyset$$

$$-3\pi \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -\frac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -3 \leqslant -\frac{5}{6} + 2k \leqslant -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad -2\frac{1}{6} \leqslant 2k \leqslant -1\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

Таким образом, подходят корни -3π и $-\dfrac{5}{6} - 2\pi = -\dfrac{17\pi}{6}$.

№12.2

а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 2\sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

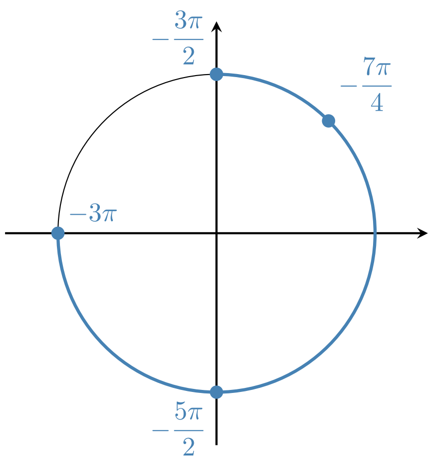
б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}.$

Решение

$$\begin{aligned} 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x &= 2\sin x \\ 2\sin x(\sin^2 x - 1) + \sqrt{2}\cos^2 x &= 0 \\ -2\sin x\cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x &= 0 \\ \cos^2 x(-2\sin x + \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = 0 \\ &\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ &x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни и получим $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$.



№13

№13.1

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB. На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1. Точка M делит пополам ребро BC. Через точку M проведена плоскость α, перпендикулярная PQ.

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α.

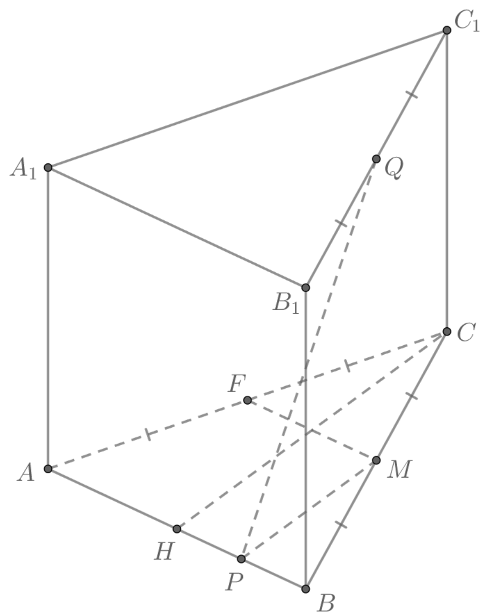
б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро PQ, если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

Ответ

б) $\frac{16}{25}$

Решение

а) Пусть CH — высота треугольника ABC. Тогда CH и медиана. Так как $AP : PB = 3 : 1$, а $AH : HB = 1 : 1$, то имеем $HP : PB = 1 : 1$. Тогда PM — средняя линия треугольника BHC. Тогда $PM \perp AB$.



Пусть MF — средняя линия треугольника ABC, при этом F лежит на AC.

По теореме о трех перпендикулярах $PQ \perp AB$. Тогда и $MF \perp PQ$.

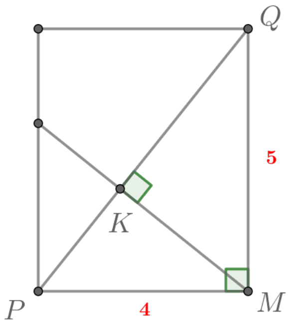
Таким образом, если плоскость α перпендикулярна PQ, то и любая прямая из этой плоскости должна быть перпендикулярна PQ. В частности, прямая, по которой пересекаются α и (ABC). Тогда это в точности прямая MF. Значит, $\alpha \parallel AB$.

б) Пусть α пересекает PQ в точке K. Тогда в прямоугольном треугольнике PMQ отрезок MK — высота. Тогда

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{PM^2}{MQ^2}.$$

Заметим, что $MQ = AA_1 = 5$, а $PM = \dfrac{1}{2}CH$. Также $BH = \dfrac{1}{2}AB = 6$.
Из прямоугольного треугольника CHB имеем:

$$CB = \frac{BH}{\cos\angle ABC} = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10 \quad \Rightarrow \quad CH = 10 \cdot \sin\angle ABC = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8.$$



Тогда $PM = 4$. Значит,

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{PM^2}{MQ^2} = \frac{16}{25}.$$

№14

№14.1

Решите неравенство

$$\left(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\leqslant 0$$

Ответ

$(-2;-1]\cup\{1\}$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0\\ x^2+6x+9>0\\ x+2>0\end{cases}$$

$$x>-2$$

По свойствам логарифмов на ОДЗ

$$\log_4(x^2+6x+9)=\log_4(x+3)^2=2\log_4(x+3)$$

$$\log^2_{0,25}(x+3)=\left(\log_{0,25}(x+3)\right)^2=(\log_{4^{-1}}(x+3))^2=(-\log_4(x+3))^2=(\log_4(x+3))^2$$

Тогда получаем

$$(\log_4(x+3)-1)^2\cdot\log_4(x+2)\leqslant 0$$

Отсюда либо $\log_4(x+3)-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+3=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$,
либо $\log_4(x+2)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0<x+2\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2<x\leqslant -1$
С учётом ОДЗ получаем ответ.

№14.2

Решите неравенство

$$\log_{25}\big((x-4)(x^2-2x-8)\big)+1\geqslant 0,5\log_5(x-4)^2.$$

Ответ

$[-1,96;4)\cup(4;+\infty)$

Решение

Запишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}(x-4)(x^2-2x-8)>0\\(x-4)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)(x-4)(x+2)>0\\x-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\neq 0\\x>-2\end{cases}$$

На ОДЗ преобразуем логарифмы:

$$\log_{25}\big((x-4)(x^2-2x-8)\big)=0,5\log_5\big((x-4)^2(x+2)\big)=0,5\log_5(x-4)^2+0,5\log_5(x+2).$$

Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\begin{aligned}0,5\log_5(x-4)^2+0,5\log_5(x+2)+1&\geqslant 0,5\log_5(x-4)^2\\0,5\log_5(x+2)&\geqslant -1\\\log_5(x+2)&\geqslant -2\\\log_5(x+2)&\geqslant\log_5 0,04\\x+2&\geqslant 0,04\\x&\geqslant -1,96.\end{aligned}$$

С учётом ОДЗ получим ответ: $x\in[-1,96;4)\cup(4;+\infty)$.

№15

№15.1

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого из годов с 2026 по 2030 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года;

— в июле каждого из годов с 2031 по 2035 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года, отличную от суммы, на которую долг убывал в первые пять лет.

Известно, что в конце 2030 года долг составил 800 тысяч рублей. Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

Ответ

1300 тысяч рублей

Решение

Пусть первые 5 лет долг уменьшался на x тысяч рублей. Так как через 5 лет долг стал 800 тысяч рублей, то начальная сумма была равна $800 + 5x$ тысяч рублей. При уменьшении долга на одну и ту же сумму каждый год выплачиваются начисленные в этот год проценты и сумма ежегодного уменьшения долга.

Проследить за изменением долга можно по этой таблице:

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Платеж	Долг после платежа
2026	$800 + 5x$	$800 + 5x + 0,1(800 + 5x)$	$x + 0,1(800 + 5x)$	$800 + 4x$
2027	$800 + 4x$	$800 + 4x + 0,1(800 + 4x)$	$x + 0,1(800 + 4x)$	$800 + 3x$
2028	$800 + 3x$	$800 + 3x + 0,1(800 + 3x)$	$x + 0,1(800 + 3x)$	$800 + 2x$
2029	$800 + 2x$	$800 + 2x + 0,1(800 + 2x)$	$x + 0,1(800 + 2x)$	$800 + x$
2030	$800 + x$	$800 + x + 0,1(800 + x)$	$x + 0,1(800 + x)$	800
2031	800	$800 + 0,1 \cdot 800$	$160 + 0,1 \cdot 800$	$800 - 160 = 640$
2032	640	$640 + 0,1 \cdot 640$	$160 + 0,1 \cdot 640$	$640 - 160 = 480$
2033	480	$480 + 0,1 \cdot 480$	$160 + 0,1 \cdot 480$	$480 - 160 = 320$
2034	320	$320 + 0,1 \cdot 320$	$160 + 0,1 \cdot 320$	$320 - 160 = 160$
2035	160	$160 + 0,1 \cdot 160$	$160 + 0,1 \cdot 160$	$160 - 160 = 0$

Общая сумма выплат равна

$$5x + 0,1(800 \cdot 5 + 15x) + 160 \cdot 5 + 0,1 \cdot \frac{800 + 160}{2} \cdot 5 =$$

$$= 5x + 400 + 1,5x + 800 + 240 = 1440 + 6,5x \text{ тысяч рублей.}$$

По условию же она равна 2090 тысяч рублей. Значит,

$$6,5x + 1440 = 2090 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{650}{6,5} = 100$$

В итоге начальная сумма кредита равна $800 + 5x = 1300$ тысяч рублей.

№16

№16.1

Дан ромб $ABCD$. Прямая, перпендикулярная стороне AD, пересекает его диагональ AC в точке M, диагональ BD — в точке N, причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

а) Докажите, что $\cos\angle BAD = 0{,}2$.

б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

Ответ

б) $60\sqrt{6}$

Решение

а) Пусть прямая из условия пересекает AD в точке E, а BC — в точке F; пусть O — точка пересечения диагоналей ромба. Опустим высоту BH на AD.

Заметим, что $AO = OC$. Тогда $AM : OM = 2 : 1$.

Так как $BN : ND = 1 : 3$, а $BO = OD$, то N — середина BO.

Запишем теорему Менелая для треугольника AOD и прямой NE :

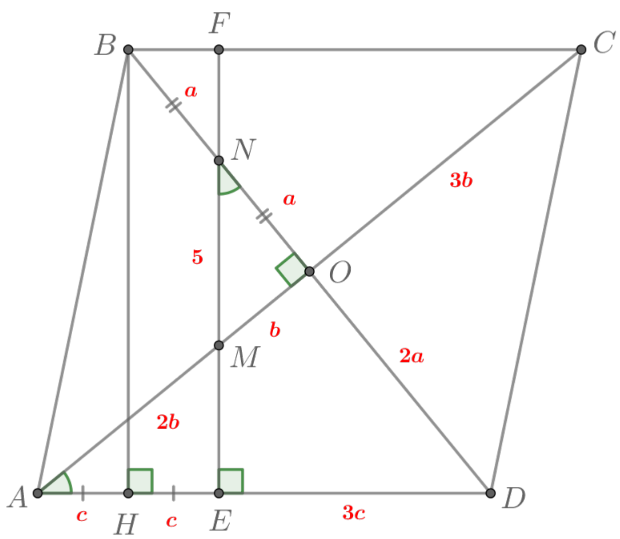
$$\frac{OM}{MA}\cdot\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DN}{NO} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{DE}{AE} = \frac{OM}{MA}\cdot\frac{DN}{NO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

По теореме Фалеса для угла BDH и параллельных прямых NE и BH (обе эти прямые перпендикулярны AD)

$$\frac{DE}{EH} = \frac{DN}{NB} = \frac{3}{1}.$$

Таким образом, EH в два раза меньше EA. Значит, $AD = 5AH$. Но в ромбе $AB = AD$, тогда

$$\cos\angle BAD = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{5}.$$



б) Прямоугольные треугольники AOD и NED подобны по двум углам: прямому и общему.

Тогда

$$\angle END = \angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

Значит, так как $\angle OAD < 90^\circ$, то по формуле двойного угла

$$\cos\angle OAD = \sqrt{\frac{\cos\angle BAD + 1}{2}} = \sqrt{0{,}6}.$$

Тогда

$$\sin\angle OAD = \sqrt{1 - \cos^2\angle OAD} = \sqrt{0{,}4}.$$

Значит,

$$NO = MN\sqrt{0{,}6}, \quad MO = MN\sqrt{0{,}4}.$$

Мы знаем, что $BD = 4NO$, $AC = 6MO$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC = 12NO \cdot MO = 12 \cdot 5\sqrt{0{,}6} \cdot 5\sqrt{0{,}4} = 12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4} = 60\sqrt{6}$$

№16.2

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O. Точки M и N отмечены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Известно, что $AM = MO$, $CN = NO$.

а) Докажите, что точки M, N и O лежат на одной прямой.

б) Найдите $AM : MB$, если известно, что $AO = OC$ и $BC : AD = 1 : 7$.

Ответ

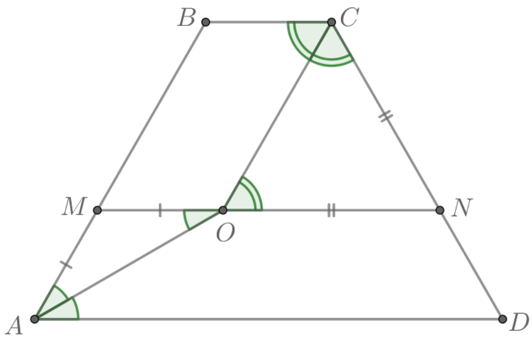
б) $1 : 2$

Решение

а) AO — биссектриса угла BAD, поэтому $\angle BAO = \angle OAD$. По условию $AM = MO$, значит, треугольник AMO — равнобедренный. Тогда $\angle MAO = \angle MOA$. Таким образом,

$$\angle DAO = \angle BAO = \angle MOA.$$

Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми MO и AD и секущей AO, равны. Значит, $MO \parallel AD$.



CO — биссектриса угла BCD, поэтому $\angle BCO = \angle OCD$. По условию $CN = NO$, значит, треугольник CNO — равнобедренный. Тогда $\angle NCO = \angle NOC$. Таким образом,

$$\angle BCO = \angle DCO = \angle NOC.$$

Тогда накрест лежащие углы, образованные прямыми NO и BC и секущей CO, равны. Значит, $NO \parallel BC$.

Тогда, так как $ABCD$ — трапеция, то $MO \parallel NO$, но они проходят через точку O. Значит, точки M, N и O лежат на одной прямой.

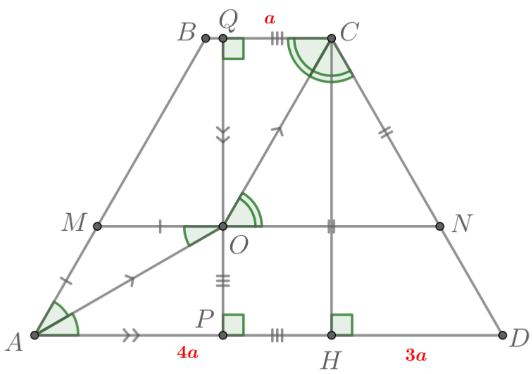
б) Опустим из точки O перпендикуляры OP и OQ на AD и BC соответственно. Тогда прямоугольные треугольники AOP и OCQ равны по гипотенузе и острому углу, так как

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle OAP + \angle OCQ = 90^\circ.$$

Тогда $AP = OQ$, $OP = CQ$.

По пункту а) $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$. Тогда

$$\frac{AM}{MB} = \frac{PO}{OQ} = \frac{PO}{AP} = \operatorname{tg} \angle PAO.$$



Найдем $\operatorname{tg} 2\angle PAO = \operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{tg} \angle CDA$.

Пусть CH — высота трапеции. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle CDA = \frac{CH}{DH}.$$

Пусть $AD = 7a$, $BC = a$. Так как $ABCD$ — равнобедренная, то

$$DH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{7a - a}{2} = 3a \quad \Rightarrow \quad AH = 4a.$$

Заметим, что $PQCH$ — прямоугольник, тогда $PH = CQ$. Значит,

$$CH = PQ = PO + OQ = CQ + AP = PH + AP = AH = 4a.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \angle CDA = \frac{CH}{DH} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{2 \operatorname{tg} \angle PAO}{1 - \operatorname{tg}^2 \angle PAO} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \angle PAO = \dfrac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} \angle PAO = -2 \end{array}\right. .$$

$\angle PAO$ — острый, следовательно, $AM : MB = 1 : 2$.

№17

№17.1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0 \\ y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ

$a \in (-16; -9] \cup \{-7\} \cup \{9\}$

Решение

1 способ. Графический

Система определена при $y - x + 8 \geqslant 0$. На этой области определения первое уравнение системы равносильно совокупности

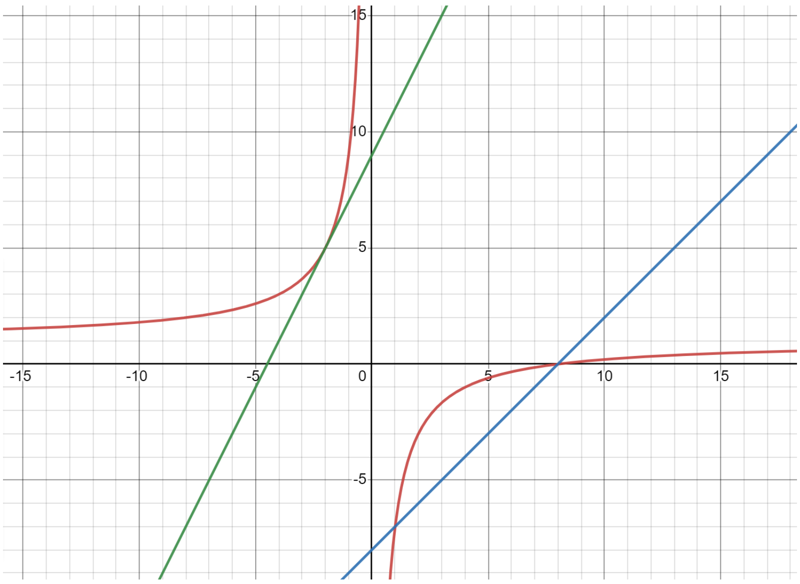
$$\left[\begin{array}{l} y = x - 8 \\ y = 1 - \frac{8}{x} \text{ (при } x = 0 \text{ получается неверное равенство } 0 = 8) \end{array}\right.$$

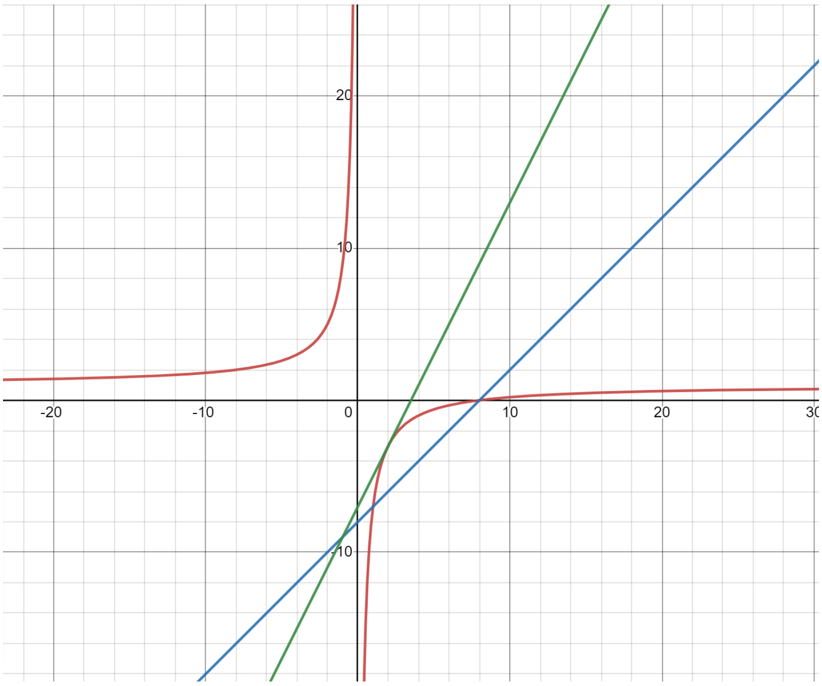
В координатах xOy получаем прямую и гиперболу в области $y \geqslant x - 8$.

Второе уравнение задаёт прямую с угловым коэффициентом 2, у которой параметр a отвечает за сдвиг вверх-вниз по вертикальной оси.

Точка пересечения прямых $y = 2x + a$ и $y = x - 8$ при каждом фиксированном a является решением системы. Поэтому ровно 2 решения система будет иметь, если прямая $y = 2x + a$ касается одной из веток гиперболы, либо пересекает правую ветку гиперболы один раз в области выше прямой $y = x - 8$, а второй раз в области ниже прямой $y = x - 8$.

Рассмотрим ключевые положения и посчитаем значения параметра в каждом из них.





Прямая $y = 2x + a$ касается гиперболы $y = 1 - \frac{8}{x}$, если уравнение

$$2x + a = 1 - \frac{8}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + (a-1)x + 8 = 0$$

имеет ровно одно решение. Квадратное уравнение имеет ровно одно решение, если его дискриминант $(a-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8$ равен нулю:

$$a - 1 = \pm 8 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-7; 9\}$$

Гипербола $y = 1 - \frac{8}{x}$ пересекается с прямой $y = x - 8$ при

$$x - 8 = 1 - \frac{8}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x = x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 8 = 0.$$

Получаем

$$x = 1, y = -7;$$

$$x = 8, y = 0.$$

Найдем значения параметра, при которых прямая $y = 2x + a$ проходит через эти точки.
1)

$$-7 = 2 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = -9$$

При этом значении параметра решением системы является точка $(1; -7)$ и вторая точка пересечения гиперболы с прямой $y = 2x + a$, которая находится в пределах области выше прямой $y = x - 8$. Всего будет два решения системы, так что это значение параметра нам подходит.

2)

$$0 = 16 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = -16$$

При этом значении параметра решением системы является точка $(8; 0)$, а вторая точка пересечения гиперболы с прямой $y = 2x + a$ находится в пределах области ниже прямой $y = x - 8$. Всего будет одно решение системы, так что это значение параметра нам не подходит.

2 способ. Алгебраический

Так как замена $y = 2x + a$ линейная, то система будет иметь 2 решения в том случае, если первое уравнение системы после подстановки $y = 2x + a$ будет иметь 2 решения:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 + (a-1)x + 8 = 0 \\ x = -a - 8 \end{array}\right. \\ x \geqslant -a - 8 \end{cases}$$

Назовем корень $-a - 8$ числом x_1. Заметим, что x_1 при любом a является решением полученной системы. Следовательно, эта система имеет два решения, если:

1) квадратное уравнение имеет одно решение x_0, то есть $D = 0$, причем $x_0 > x_1$;

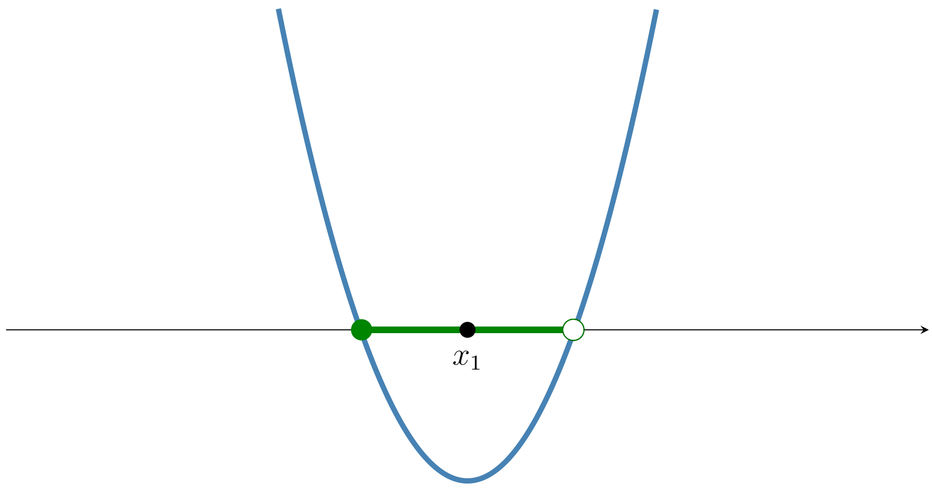
2) квадратное уравнение имеет два решения, то есть $D > 0$, причем меньший из этих двух корней $\leqslant x_1$, а больший $> x_1$.

Найдем $D = (a-1)^2 - 8^2$. Найдем абсциссу вершины параболы $g = 2x^2 + (a-1)x + 8$ — это $x_0 = \frac{1-a}{4}$.

Следовательно, для первого случая получаем

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_0 > x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -7; 9 \\ a > -11 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -7; 9$$

Второй случай выполняется, если парабола $g = 2x^2 + (a-1)x + 8$ пересекает ось абсцисс в двух точках, причем число x_1 лежит между этими точками либо совпадает с левой точкой:



Эта картинка задается следующими условиями:

$$\begin{cases} D > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x_1) = 0 \\ x_0 > x_1 \end{cases} \\ g(x_1) < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -7) \cup (9; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -16; -9 \\ a > -11 \end{cases} \\ (a+16)(a+9) < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad -16 < a \leqslant -9$$

Следовательно, ответ

$$a \in (-16; -9] \cup \{-7; 9\}$$

№17.2

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (xy - x + 7)(y - x + 7) = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a \in \{-21; -9; 1 - 2\sqrt{21}; 1 + 2\sqrt{21}\}$

Решение

1 способ. Графический

Система равносильна

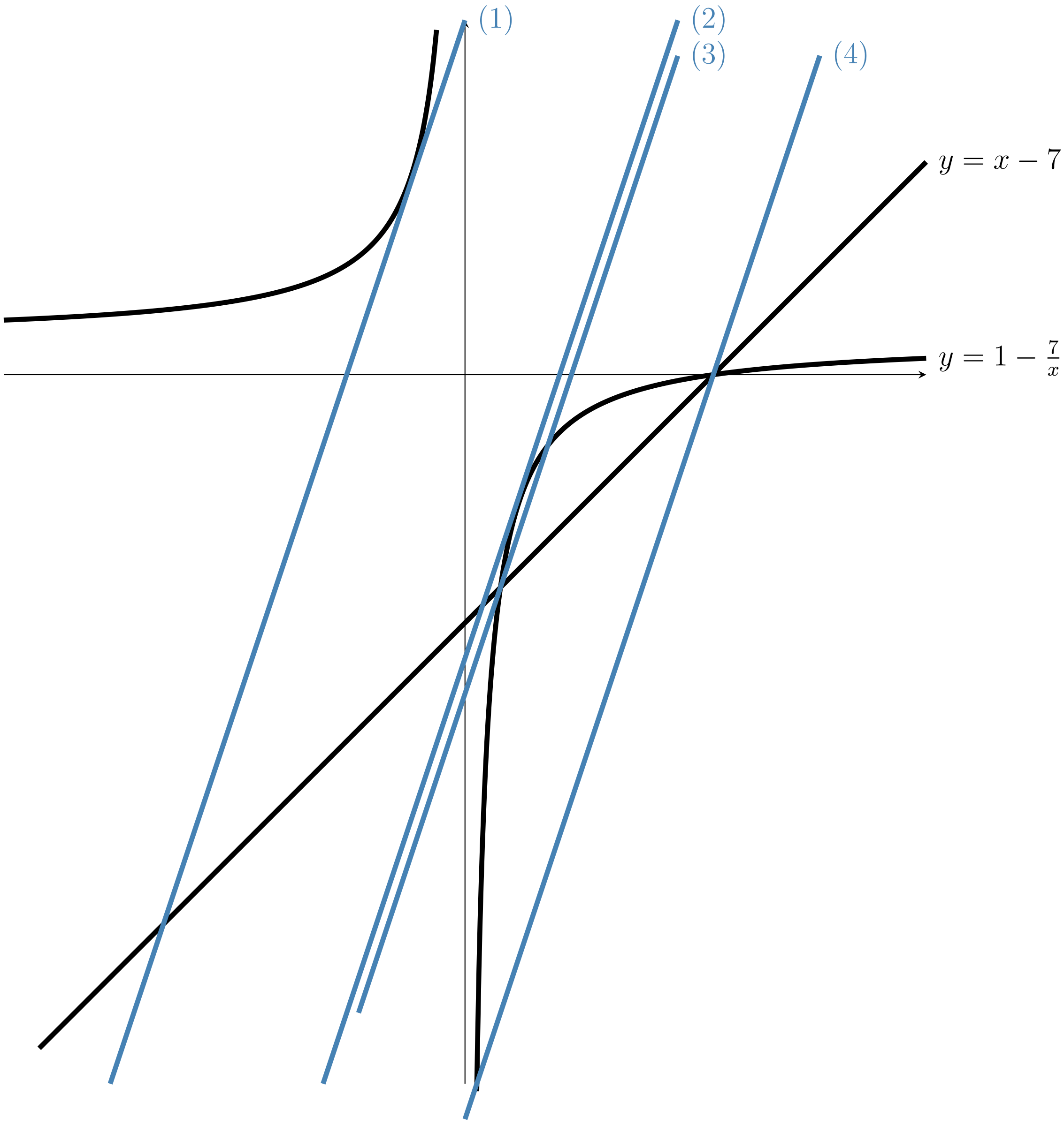
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1 - \dfrac{7}{x} \\ y = x - 7 \end{array}\right. \\ y = 3x + a \end{cases}$$

Заметим, что при любом a прямые $y = x - 7$ и $y = 3x + a$ пересекаются. Назовем эту точку O. Следовательно, нам подойдут те значения параметра a, при которых прямая $y = 3x + a$ находится в таком положении, что имеет:

1) ровно одну точку пересечения с гиперболой $y = 1 - \frac{7}{x}$, причем эта точка не совпадает с точкой O;

2) ровно две точки пересечения с гиперболой $y = 1 - \frac{7}{x}$, причем одна из них — это точка O.

Изобразим подходящие положения прямой $y = 3x + a$:



Положения (1) и (2) — прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = 1 - \frac{7}{x}$. Найдем, при каких a это происходит.

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{x} = 3x + a \\ \dfrac{7}{x^2} = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{x - 7 - 3x^2}{x} \\ x^2 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

При $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ получаем $a = 1 - 2\sqrt{21}$, при $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ получаем $a = 1 + 2\sqrt{21}$.

Следовательно, положению (1) соответствует $a = 1 + 2\sqrt{21}$, а положению (2) соответствует $a = 1 - 2\sqrt{21}$.

Положения (3) и (4) — когда $y = 3x + a$ проходит через одну из двух точек пересечения гиперболы $y = 1 - \frac{7}{x}$ и прямой $y = x - 7$. Найдем для начала эти точки:

$$\frac{x-7}{x} = x - 7 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 7 = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Следовательно, получаем точки $A(1;-6)$ и $B(7;0)$.

Положение (3): прямая $y = 3x + a$ проходит через $A:$

$$-6 = 3 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = -9$$

Положение (4): прямая $y = 3x + a$ проходит через $B:$

$$0 = 21 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = -21$$

Ответ:

$$a \in \{-21; -9; 1 - 2\sqrt{21}; 1 + 2\sqrt{21}\}$$

2 способ. Алгебраический

Так как замена $y = 3x + a$ линейная, то система будет иметь 2 решения в том случае, если первое уравнение системы после подстановки $y = 3x + a$ будет иметь 2 решения:

$$(3x^2 + (a-1)x + 7)(2x + a + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 + (a-1)x + 7 = 0 \\ x = -\dfrac{a+7}{2} \end{array}\right.$$

Назовем корень $-\frac{a+7}{2}$ числом x_1.

Полученная совокупность будет иметь 2 решения, если:

1) квадратное уравнение имеет одно решение, то есть $D = 0$, причем это решение не совпадает с x_1;

2) квадратное уравнение имеет 2 решения, то есть $D > 0$, причем одно из этих решений совпадает с x_1.

Найдем $D = (a-1)^2 - 84$. Найдем также абсциссу вершины параболы $g = 3x^2 + (a-1)x + 7$ — это $x_0 = \frac{1-a}{6}$.

Тогда первый случай задается условиями

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_0 \neq x_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \pm 2\sqrt{21}$$

Второй случай задается условиями

$$\begin{cases} D > 0 \\ g(x_1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -21; -9$$

Ответ:

$$a \in \{-21; -9; 1 - 2\sqrt{21}; 1 + 2\sqrt{21}\}$$

№17.3

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$-\log_2(-x-3)+2^{x+5}-a=x^2+1+6(x+1)$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[-4;-3]$.

Ответ

$a\in[3;+\infty)$

Решение

Перенесем все слагаемые в левую часть:

$$-\log_2(-x-3)+2^{x+5}-x^2-1-6(x+1)-a=0$$

- Рассмотрим функцию $f(x)=-\log_2(-x-3)$, она определена при $x\in(-\infty;-3)$.

  Возьмем ее производную:

  $$f'(x)=\frac{1}{-(x+3)\ln 2}=-\frac{1}{(x+3)\ln 2}$$

  Очевидно, что при $x\in(-\infty;-3)$ производная положительна, следовательно, функция f строго монотонно возрастает на всей области определения.

- Функция $g(x)=2^{x+5}$ строго монотонно возрастает на всей числовой прямой.

- Функция $h(x)=-x^2-1-6(x+1)$ — парабола с ветвями вниз, с вершиной в точке $x_{\text{в}}=\frac{-(-6)}{2\cdot(-1)}=-3$. Таким образом, на промежуток $(-\infty;-3)$ приходится ее левая монотонно возрастающая ветвь.

Получили, что все три функции строго монотонно возрастают на промежутке $(-\infty;-3)$, следовательно, и их сумма строго монотонно возрастает на этом промежутке. Из этого сразу следует, что уравнение имеет не более одного корня. Нам нужно найти такие a, при которых он существует и принадлежит отрезку $[-4;-3]$.

Будем рассматривать строго монотонно возрастающую функцию

$$s(x)=f(x)+g(x)+h(x)-a=$$

$$=-\log_2(-x-3)+2^{x+5}-x^2-1-6(x+1)-a$$

Если в точке -4 она принимает положительное значение, то во всех точках отрезка $[-4;-3]$ она также будет принимать положительные значения, то есть корней на этом отрезке не будет. Таким образом, значения a, соответствующие этой ситуации, нам точно не подойдут. Найдем их.

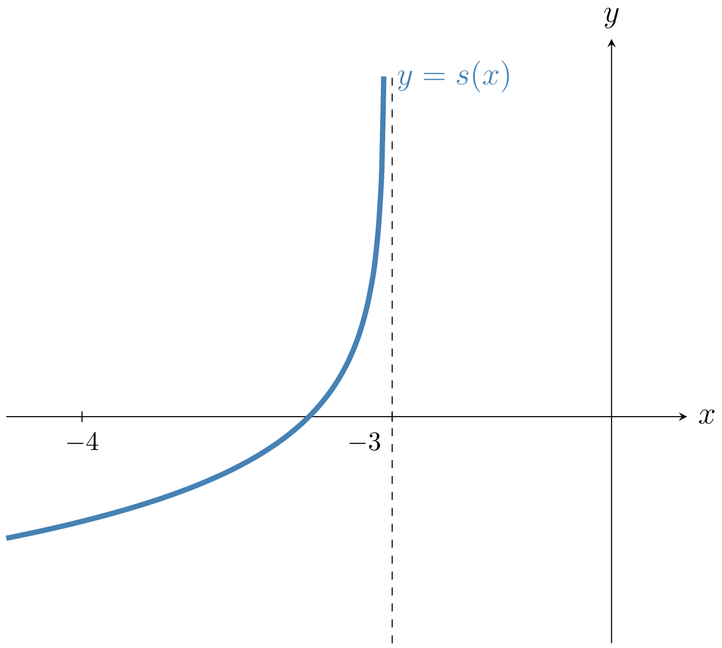
$$s(-4)>0$$

$$-\log_2(-(-4)-3)+2^{(-4)+5}-(-4)^2-1-6(-4+1)-a>0$$

$$-\log_2(1) + 2^1 - 16 - 1 + 18 > a$$

$$a < 3$$

При всех остальных a, то есть $a \geqslant 3$, значение функции s в точке -4 неположительно. Если в начале отрезка, то есть в точке -4, функция неположительна, а в некоторой точке x_0 отрезка функция положительна, то где-то на $[-4; x_0]$ она будет равна нулю, то есть будет иметь корень.



Заметим, что при $x \to -3$ функции g и h принимают положительные значения, а функция f неограниченно возрастает, так как логарифм от близкого к нулю числа стремится к $-\infty$ и перед логарифмом стоит знак «$-$».

Таким образом, какой бы ни была константа a, функция s будет принимать положительное значение в некоторой точке отрезка $[-4; -3]$.

Тогда исходное уравнение имеет ровно одно решение на указанном отрезке при $a \in [3; +\infty)$.

№18

№18.1

На доске написано трёхзначное число A. Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B, затем Коля записывает число A и зачеркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C.

а) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $A > 140$?

б) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $440 \leqslant A < 500$?

в) Найдите наибольшее число A до 900, для которого выполняется $A = B \cdot C$.

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 810

Решение

а) Да, может. Например, если $A = 625$, $B = 25$, $C = 25$, то получаем равенство:

$$625 = 25 \cdot 25.$$

Или, например, если $A = 150$, $B = 15$, $C = 10$, то получаем равенство:

$$150 = 15 \cdot 10.$$

б) Заметим, что если $440 \leqslant A < 500$, то первая цифра числа A равна 4. Также заметим, что вторая цифра числа A не меньше 4. Таким образом, и B, и C не меньше 40. Значит,

$$A = B \cdot C \geqslant 40 \cdot 40 = 1600 > 500.$$

Тогда указанное равенство не может быть верным.

в) Сначала приведем пример: $A = 810$, $B = 81$, $C = 10$, тогда

$$B \cdot C = 81 \cdot 10 = 810 = A.$$

Пусть $A = \overline{8bc}$. Тогда заметим, что если оба мальчика зачеркнули b или c, то $B \cdot C \geqslant 6400$. Такое нам не подходит. Значит, один из мальчиков вычеркнул первую цифру, пусть это был Серёжа.

Если $b = 0$, то $B = c$. Тогда

$$B \cdot C \leqslant c \cdot \overline{8c} \leqslant 9 \cdot 89 = 801 < 810.$$

Тогда $b \geqslant 1$, значит, $B = \overline{bc} = 10b + c$.

Оценим $B \cdot 80$:

$$B \cdot 80 = (10b + c) \cdot 80 = 800b + 80c \geqslant 800.$$

Тогда если Коля не вычеркнул первую цифру, то $b = 1$.

Значит, $A = \overline{81c}$. Тогда c может равняться только 0. Получили наш пример.

Пусть оба мальчика вычеркнули первую цифру. Тогда $B = C = \overline{bc}$. Значит, $A = B^2$. Если $A < 900$, то $B < 30$. Нам надо найти $A > 810$. Тогда $B > 28$, так как $28^2 = 784$. Значит, $B = 29$. Но тогда $A = 841$, что невозможно, так как 841 не оканчивается на 29.

Таким образом, 810 — наибольшее возможное A.

№18.2

Есть числа A и B. Из них можно сделать числа $A+2$ и $B-1$ или $B+2$ и $A-1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?

б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?

Ответ

а) Нет, нельзя

б) 582

в) 81

Решение

а) Заметим, что при каждом действии сумма чисел увеличивается ровно на 1. Действительно:

- Если было (A, B), и стало $(A+2, B-1)$, то сумма $A+B$ стала $A+2+B-1 = A+B+1$.
- Если было (A, B), и стало $(A-1, B+2)$, то сумма $A+B$ стала $A-1+B+2 = A+B+1$.

Значит, за 20 ходов сумма увеличится на 20, то есть будет равна $7 + 11 + 20 = 38$. Так как числа всегда остаются натуральными, то при такой сумме ни одно из чисел не может равняться 50.

б) Как было показано в пункте а), сумма чисел увеличивается на 1 после каждого хода. Начальная сумма чисел равна равна 18. Тогда понадобится ровно $600 - 18 = 582$ хода для достижения искомой суммы, которую можно получить путём проведения следующего алгоритма 291 раз:

$$(A, B) \to (A+2, B-1) \to (A+1, B+1).$$

в) Рассмотрим разность вида «второе число — первое число». Изначально она равна $B - A$. Далее возможны два варианта: $B + 2 - (A - 1) = B - A + 3$ либо $B - 1 - (A + 2) = B - A - 3$. Числа $B - A$, $B - A + 3$ и $B - A - 3$ имеют одинаковый остаток при делении на три. То есть разность второго и первого чисел (именно в этом порядке) всегда даёт один и тот же остаток при делении на 3. Изначально эта разность равна $11-7 = 4$, которая даёт остаток 1 при делении на 3.

Ответом будет 81 ход, когда из чисел (7, 11) сделаем пару чисел (49, 50) следующим образом:

$$(7, 11) \xrightarrow{\text{алгоритм из п. б 39 раз}} (46, 50) \to (48, 49) \to (50, 48) \to (49, 50).$$

Предположим, что ходов хотя бы 82. Тогда сумма чисел хотя бы 100. С учётом требуемого условия это возможно, только если оба числа равны 50 и ходов было 82. Однако, это невозможно, поскольку в таком случае разность чисел не дает остаток 1 при делении на 3. Противоречие.