Взаимное расположение прямых и плоскостей в стереометрии

Теорема 1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 3. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

Теорема 4. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 5. Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

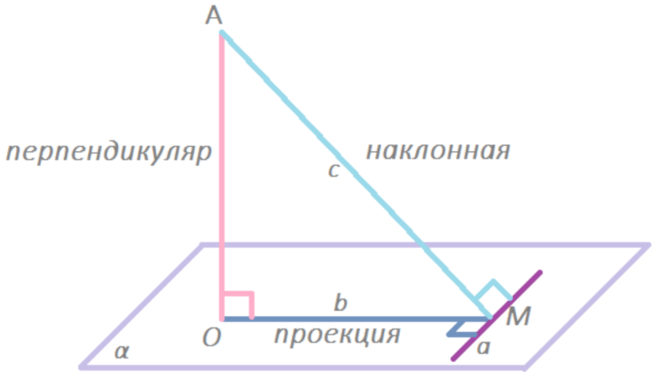
Теорема 6. Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

Теорема 7. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, имеющих общую вершину:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Следствие. Все четыре диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой.

Теорема о трех перпендикулярах



Теорема 1.

Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

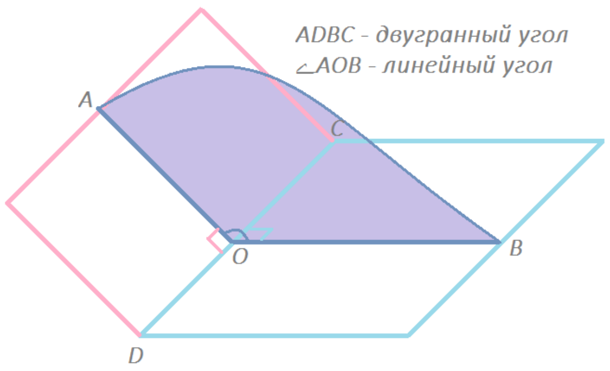
Теорема 2. Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость.

Определения расстояний объектами в пространстве

1. *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.
2. *Расстоянием между параллельными плоскостями* называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.
3. *Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью* называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.
4. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей.



Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.

Теорема 1.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

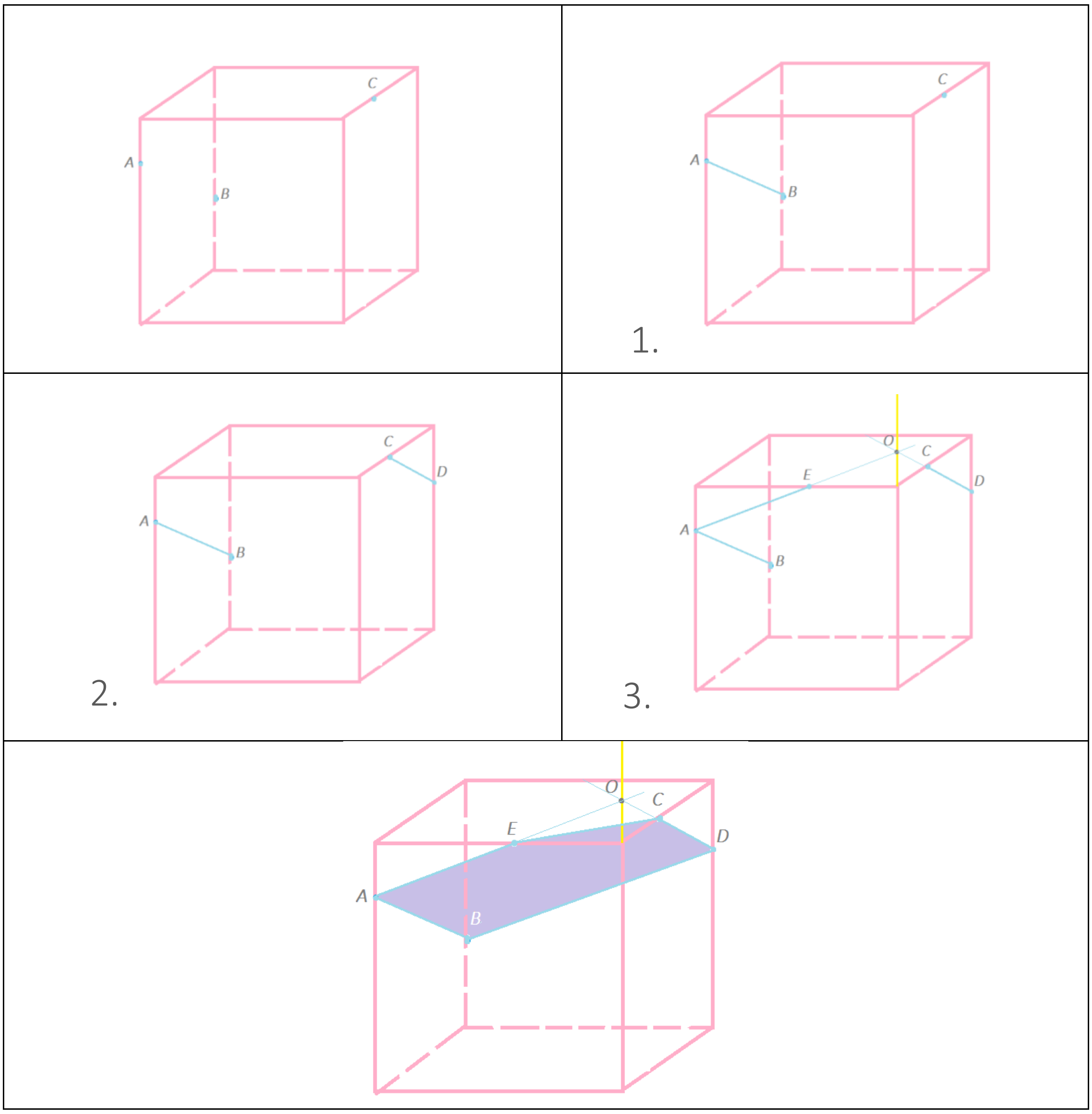
Теорема 2.

Прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.

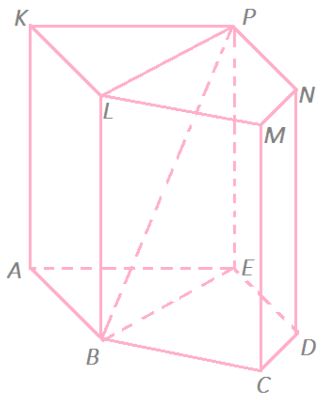
Построение сечений в стереометрии

1. *Если две точки принадлежат одной плоскости, то их можно соединить прямой.*
2. *Стороны сечения, лежащие в параллельных гранях многогранника параллельны.*
3. *Продолжить одно из ребер многогранника и одну из сторон сечения, лежащих в одной плоскости, до их пересечения.*

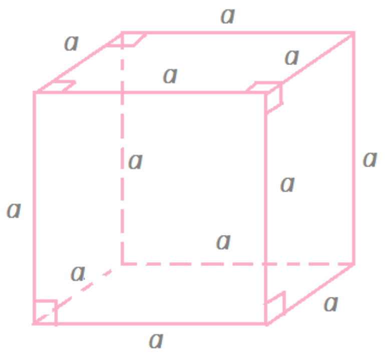
Рассмотрим на примере.

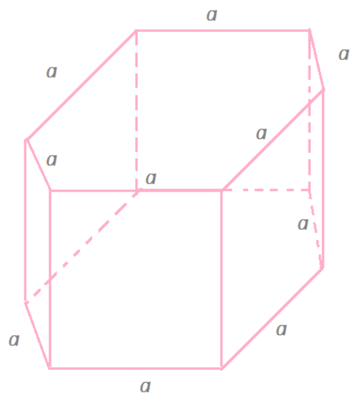


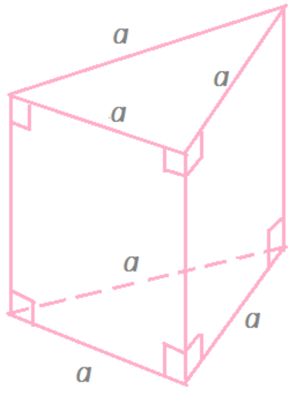
Призма

 	**Призма** – многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.
Свойства призмы 1. Основания призмы являются равными многоугольниками. 2. Боковые грани призмы являются параллелограммами. 3. Боковые ребра призмы параллельны и равны.	*Объём призмы* $V = S_{\text{осн}} * h,$ *Площадь полной поверхности призмы* $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок}} + 2 * S_{\text{осн}}$

Правильная призма – призма, в основании которой лежит правильный многоугольник (т.е. такой, у которого все стороны и все углы равны между собой), а боковые ребра перпендикулярны плоскостям основания.



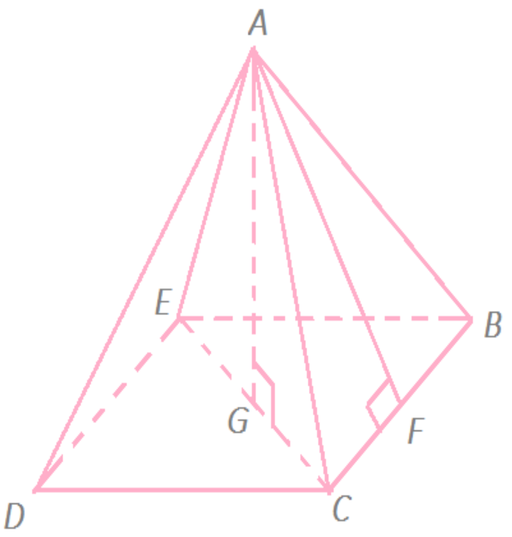




Свойства правильной призмы

1. Основания правильной призмы являются правильными многоугольниками.
2. Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.
3. Боковые ребра правильной призмы равны между собой.
4. Правильная призма является прямой.

Пирамида



Пирамида – многогранник, основание которого многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды на ее основание.

Апофема – высота боковой грани пирамиды, проведенная из ее вершины

Площадь боковой поверхности такой пирамиды

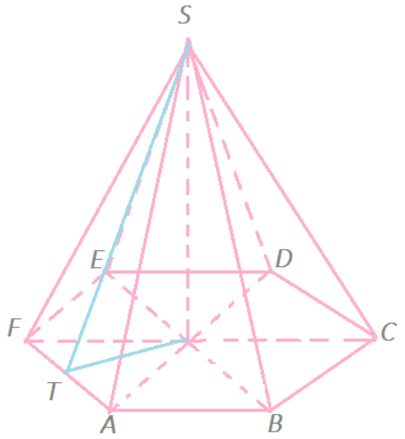
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} * P * a,$$

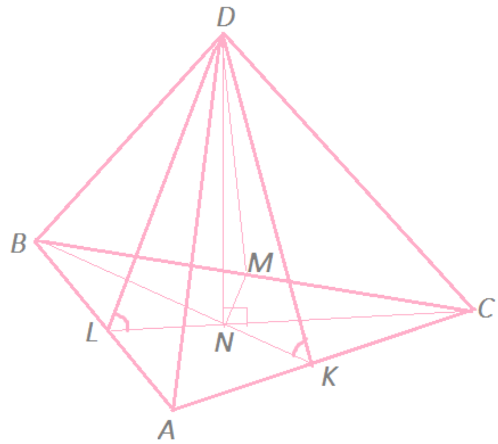
где P – периметр основания, a – длина апофемы.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} * S_{\text{осн}} * h;$$

$$S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

$$S_{\text{полн.пирамиды}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

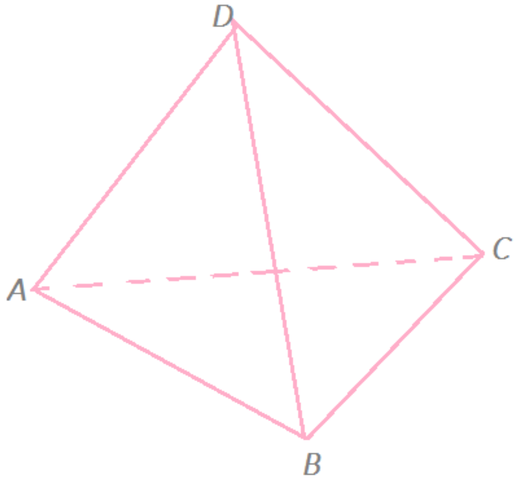




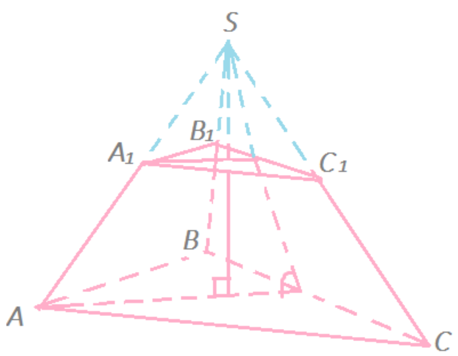
Правильная пирамида

1. Все боковые ребра правильной пирамиды равны.
2. Все боковые грани правильной пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом.
3. В правильной пирамиде все боковые грани – равные равнобедренные треугольники.
4. В любую правильную пирамиду можно как вписать сферу, так и описать около неё сферу.
5. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна

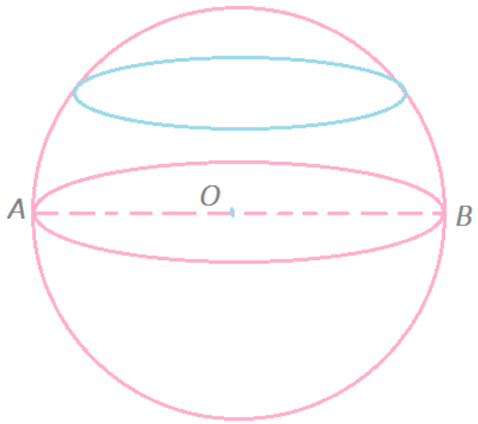
половине произведения периметра основания на апофему. 6. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.

Правильный тетраэдр	
	$S_{\text{осн.пр.тетр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\text{бок.пр.тетр}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\text{пол.пр.тетр}} = a^2\sqrt{3}$; $v_{\text{тетр}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $h_{\text{тетр}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

,

	**Усечённой пирамидой** называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.
$V_{\text{усеч.пир}} = \frac{1}{3} * h * (S_1 + \sqrt{S_1 * S_2} + S_2)$; $S_{\text{бок.пр.усеч.пир}} = \frac{1}{2} * (P_1 + P_2) * a$; $S_{\text{полн.усеч.пир.}} = S_{\text{бок.пр.усеч.пир}} + S_1 + S_2$.	

Сфера и шар



Сфера – замкнутая поверхность, геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от данной точки, называемой центром сферы.

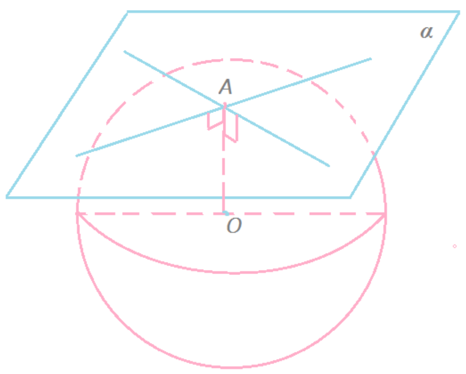
Шар – геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, которые находятся на расстоянии не большем заданного от некоторого центра.

Теорема 1.

Сечение сферы плоскостью есть окружность.

Теорема 2.

Сечение шара плоскостью есть круг, а основание перпендикуляра, проведенного из центра шара к плоскости сечения, есть центр круга, полученного в сечении.

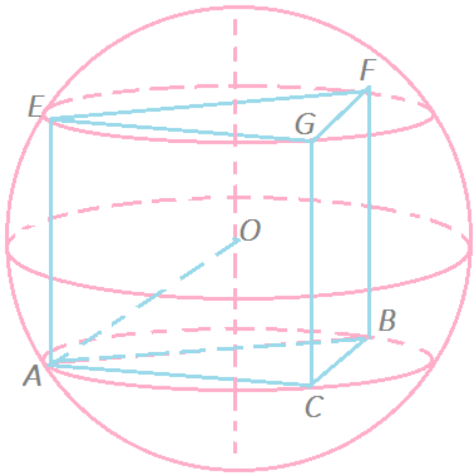
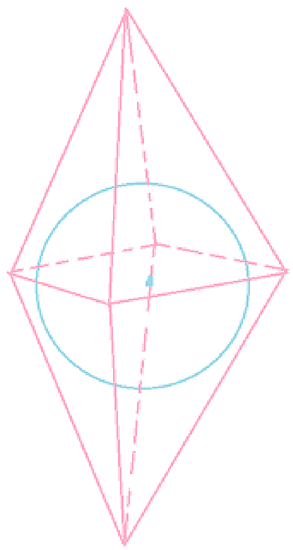


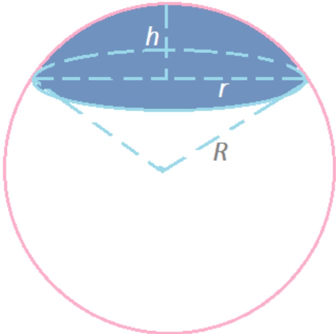
Объем шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

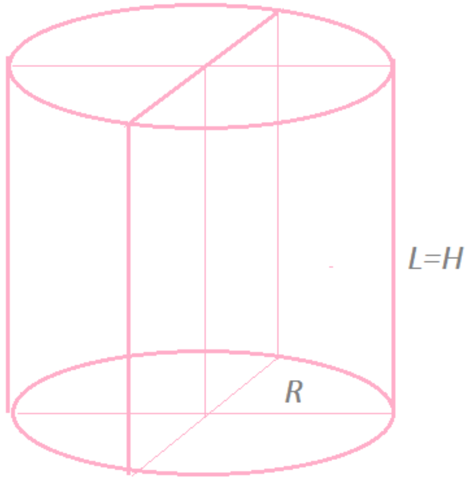
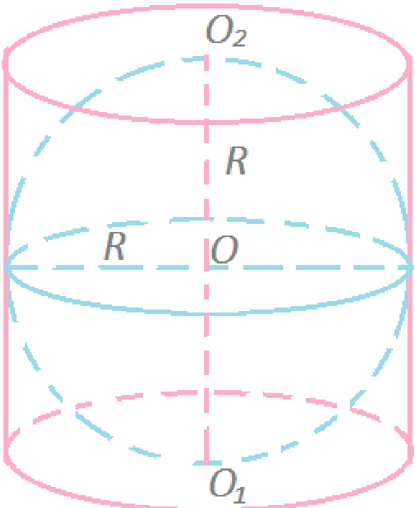
Площадь поверхности сферы

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$

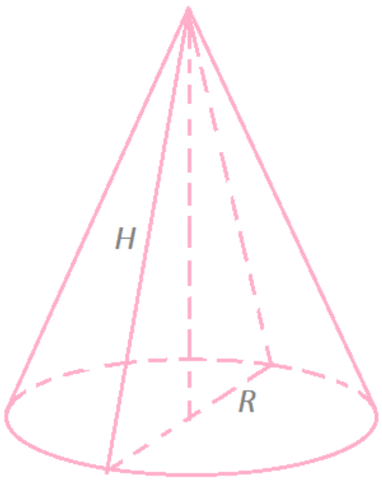
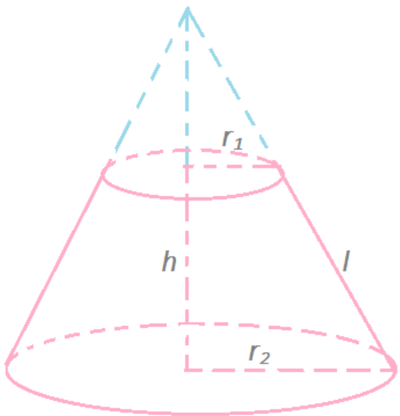
Теорема 1. Плоскость, перпендикулярная радиусу сферы и проходящая через его конец, лежащий на сфере, касается сферы.	Теорема 2. Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
	В стереометрии многогранник называется ***вписанным в сферу***, если все его вершины лежат на сфере. Центр сферы, описанной около многогранника, находится на расстоянии, равном радиусу R сферы, от каждой вершины многогранника.
	Многогранник называется ***описанным около сферы (шара)***, если сфера (шар) касается всех граней многогранника. Центр сферы, вписанной в многогранник, находится на расстоянии, равном радиусу r сферы, от каждой из плоскостей, содержащих грани многогранника.

	Шаровой сегмент **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая секущей плоскостью
$R = \frac{r^2+h^2}{2h}$. h – высота сегмента, r – радиус основания сегмента, R – радиус шара.	$S_{\text{осн}} = \pi r^2$; $S_{\text{сегм}} = \pi(r^2 + h^2) = 2\pi hR$; $V_{\text{сег}} = \frac{\pi h^2(3R-h)}{3}$.

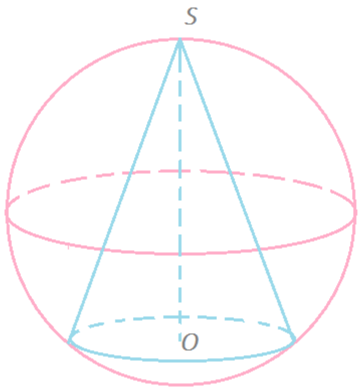
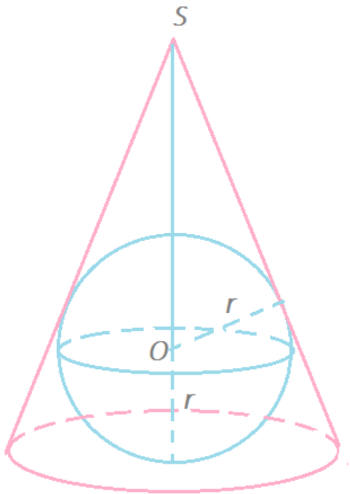
Цилиндр

	$S_{\text{бок.пов}} = 2\pi Rh$ $S_{\text{осн}} = \pi R^2$ $V_{\text{цил}} = \pi R^2 h$
	*Объём шара в полтора раза меньше объёма, описанного вокруг него цилиндра,* а площадь поверхности такого шара в полтора раза меньше площади полной поверхности того же цилиндра. $S_{\text{впис.сферы}} = \frac{2}{3} S_{\text{полн.опис.цилиндра}}$ $V_{\text{впис.шара}} = \frac{2}{3} V_{\text{опис.цилиндра}}$

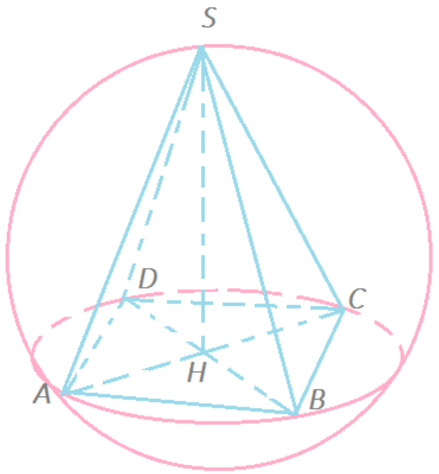
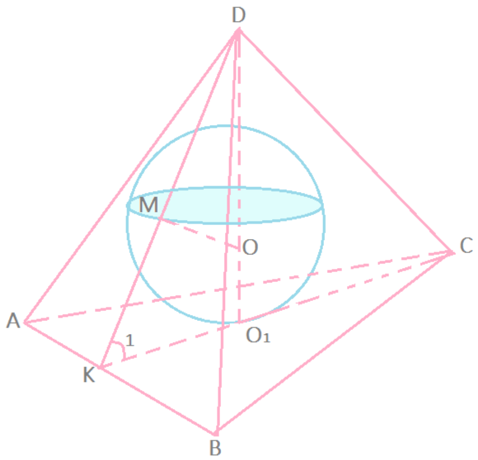
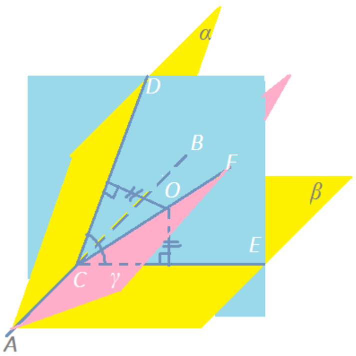
Конус

 	$S_{\text{бок.пов}} = \pi R l;$ *R* – радиус основания конуса, *l* – длина образующей конуса. $S_{\text{полн.конуса}} = \pi R(l + R);$ $V_{\text{конуса}} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$
 	Формулы для усеченного конуса $V_{\text{усеч.конуса}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) =$ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2);$ $S_{\text{бок.усеч.конуса}} = \frac{1}{2} * (P_1 + P_2) * l =$ $= \pi(r_1 + r_2)l.$

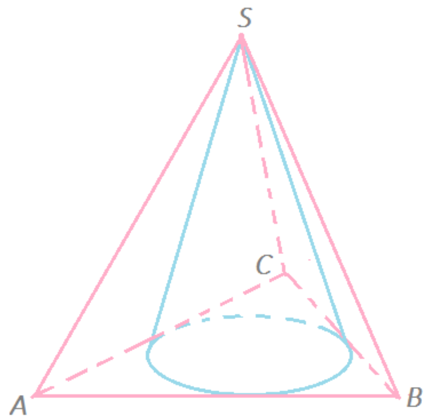
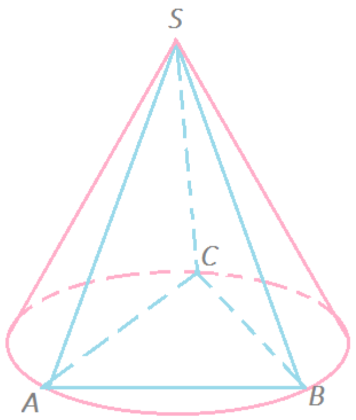
Конус и сфера

	***Конус*** называется ***вписанным в сферу*** (шар), если его вершина принадлежит сфере (границе шара), а окружность основания (само основание) является сечением сферы (шара).
	***Сфера (шар)*** называется ***вписанной в конус***, если сфера (шар) касается основания конуса и каждой его образующей.

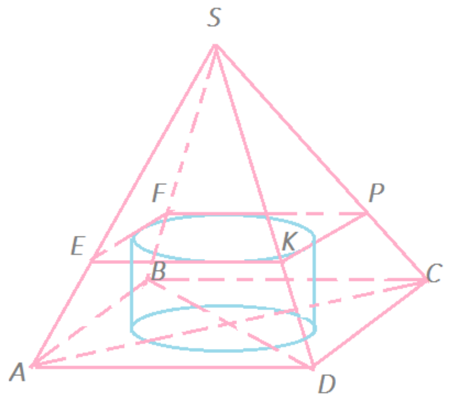
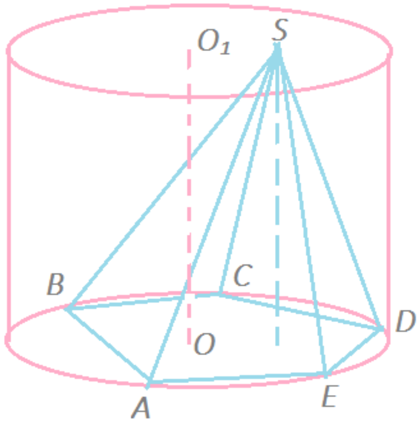
Пирамида и шар (сфера)

	**Теорема.** Около пирамиды можно *описать сферу* тогда, когда в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник. **Замечание.** Из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу.
	**Теорема.** В пирамиду можно *вписать сферу* тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке. Эта точка будет центром сферы. **Замечание.** Любая правильная пирамида является такой, в которую можно вписать сферу.
	*Биссекторная плоскость* делит двугранный угол пополам, а каждая точка биссекторной плоскости равноудалена от граней, образующих двугранный угол.

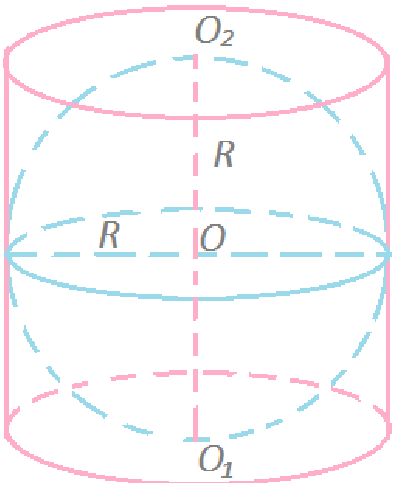
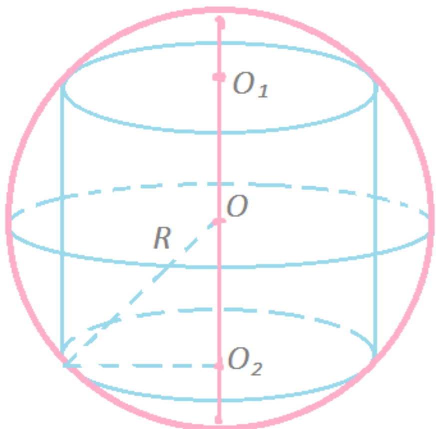
Пирамида и конус

	***Конус*** называется ***вписанным в пирамиду***, если вершины их совпадают, а его основание вписано в основание пирамиды. Причём вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой.
	***Конус*** называется ***описанным около пирамиды,*** когда их вершины совпадают, а его основание описано около основания пирамиды. Причём описать конус около пирамиды можно только тогда, когда все боковые ребра пирамиды равны между собой.

Пирамида и цилиндр

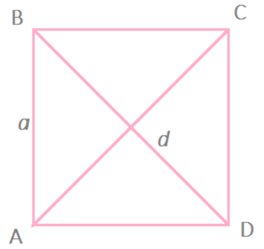
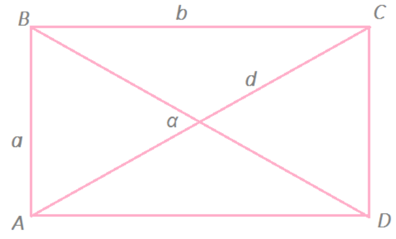
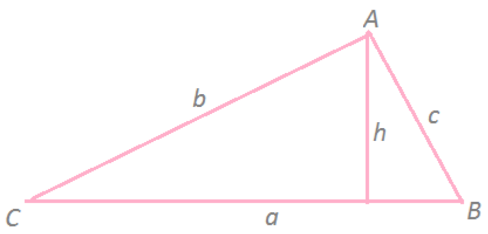
	***Цилиндр*** называется ***вписанным в пирамиду***, если одно его основание совпадает с окружностью вписанной в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание принадлежит основанию пирамиды.
	***Цилиндр*** называется ***описанным около пирамиды***, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание описано около основания пирамиды. Причём описать цилиндр около пирамиды можно только тогда, когда в основании пирамиды – вписанный многоугольник.

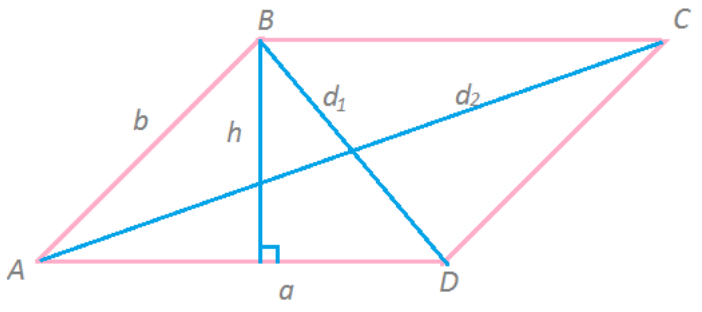
Цилиндр и сфера

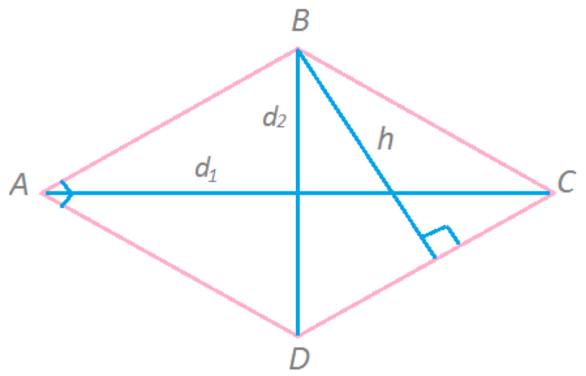
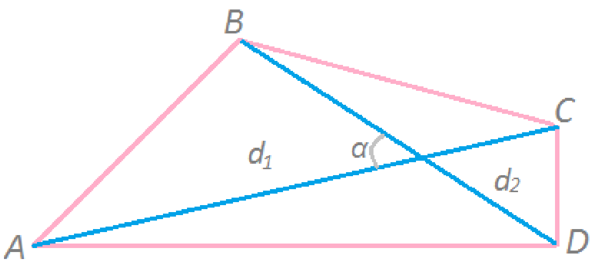
	***Сфера (шар)*** называется ***вписанной в цилиндр***, если она касается оснований цилиндра и каждой его образующей. При этом цилиндр называется описанным около сферы (шара). Сферу можно вписать в цилиндр, только если это равносторонний цилиндр, т.е. диаметр его основания и высота равны между собой.
	***Цилиндр*** называется ***вписанным в сферу***, если окружности оснований цилиндра являются сечениями сферы. Цилиндр называется вписанным в шар, если основания цилиндра являются сечениями шара.

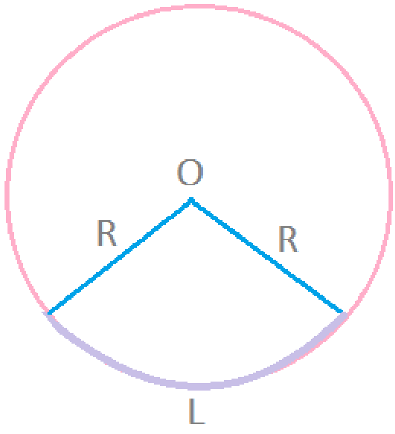
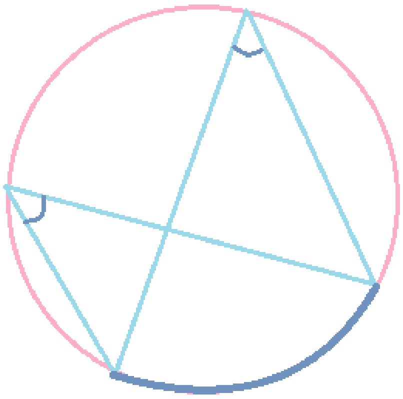
Немного планиметрии

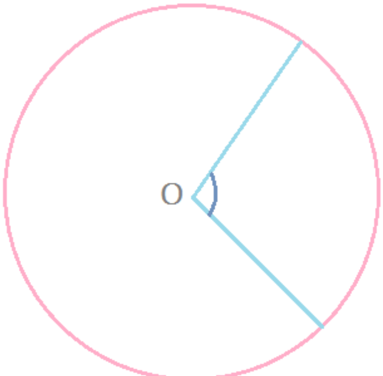
Площади

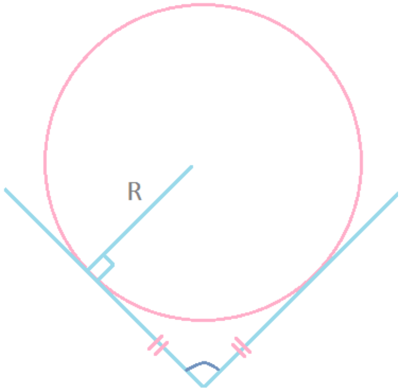
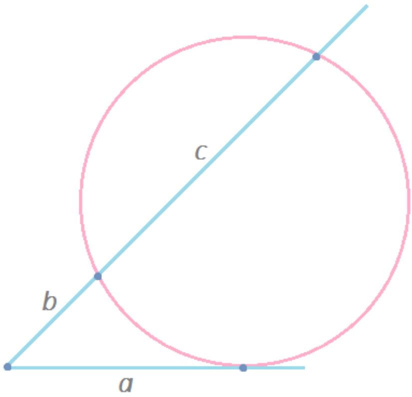
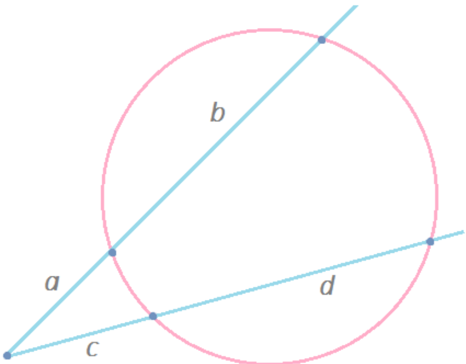
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Квадрат
$S = a^2;$
$S = \frac{1}{2}d^2.$</td>
<td>
</td>
<td>Прямоугольник
$S = a*b;$
$S = \frac{1}{2}d^2 sin\alpha.$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
</td>
<td colspan="2">Треугольник
$S = \frac{1}{2}a \cdot h;$
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$
где $p = \frac{a+b+c}{2};$
$S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot sinA;$
$S = \mathrm{p} \cdot \mathrm{r},$ где r - радиус вписанной окружности;
$S = \frac{abc}{4R},$ где R - радиус описанной окружности;
$a^2 = b^2 + c^2 - 2abcosA,$ теорема косинусов.</td>
</tr>
</table>

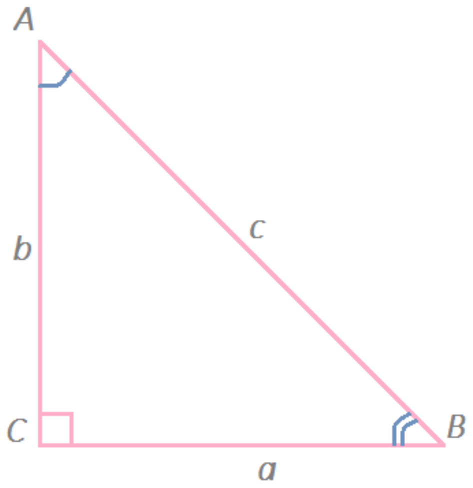
	*Параллелограмм* $S = a * b * sinA;$ $S = a * h;$ $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot sinA.$

	*Ромб* $S = ah;$ $S = 2ar,$ где r - радиус вписанной окружности; $S = a^2 \cdot sinA;$ $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$
	*Произвольный четырехугольник* $S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}{2}$

	***Окружность*** $L = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ - длина дуги; $C = 2\pi R = \pi D$ -длина окружности; $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$, площадь сектора; $S = \pi R^2$, площадь окружность;
	1. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую опирается. 2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

	Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается.

<table>
<tr><td>
</td><td>1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенные в точку касания.
2. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей.
$a^2 = b(b + c)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Произведение отрезков, на которые делится одна из двух пересекающихся секущих, равно произведению отрезков другой секущей.
$a(a + b) = c(c + d)$</td></tr>
</table>



Прямоугольный треугольник

$c^2 = a^2 + b^2$, теорема Пифагора

$sinA = \frac{CB}{AB}$;

$cosA = \frac{AC}{AB}$;

$tgA = \frac{CB}{AC}$;

$ctgA = \frac{AC}{CB}$.

α	0˚	30˚	45˚	60˚	90˚
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0