ТИП #1

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\cdot \ln(x+a)=\ln(x+a)$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

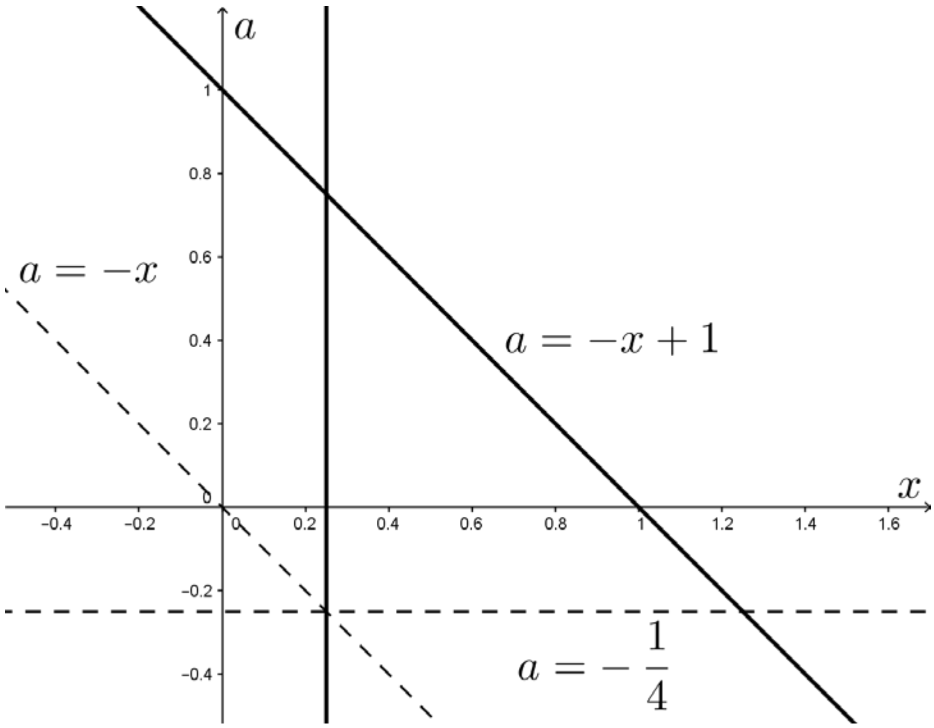
Перепишем уравнение

$$\ln(x+a)\,(\operatorname{tg}(\pi x)-1)=0.$$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4}+n\in\mathbb{Z},\\ a=-x+1,\end{array}\right.\\ a>-x.\end{cases}$$

Множество, задаваемое этой системой, нетрудно изобразить графически в системе координат Oxa. Заметим, что решения исследуются на промежутке $[0;1]$.



В области, для точек которой $a>-x$ (точки "лежат выше" штриховой линии $a=-x$) и $0\le x\le 1$ (точки "лежат в полосе" между прямыми $x=0$ и $x=1$, включая сами прямые), прямая $a=k$ будет пересекать сплошные линии в одной точке только при $-\frac{1}{4}<k<0,\ k=\frac{3}{4},\ k>1.$

Ответ: $-\frac{1}{4}<a<0,\ a=\frac{3}{4},\ a>1.$

2. При каких значениях параметра a уравнение

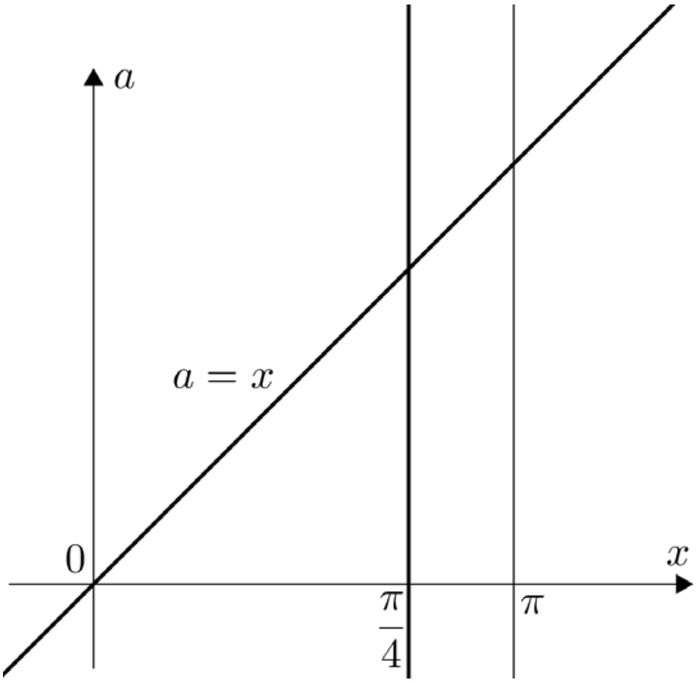
$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$?

Решение.

$$\sqrt{x-a}(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \\ a=x, \end{array}\right. \\ a\le x. \end{cases}$$

Множество, задаваемое этой системой, нетрудно изобразить графически в системе координат *Oxa*. Заметим, что решения исследуются на промежутке $[0;\pi]$.



В области, ограниченной полосой $0\le x\le\pi$, точки которой удовлетворяют неравенству $a\le x$, прямая $a=k$ будет пересекать линии $a=x$ и $x=\pi/4$ в одной точке только при $k<0, \frac{3\pi}{4}\le k\le\pi$.

Ответ: $a<0, \frac{3\pi}{4}\le a\le\pi$

3. При каких значениях параметра a уравнение

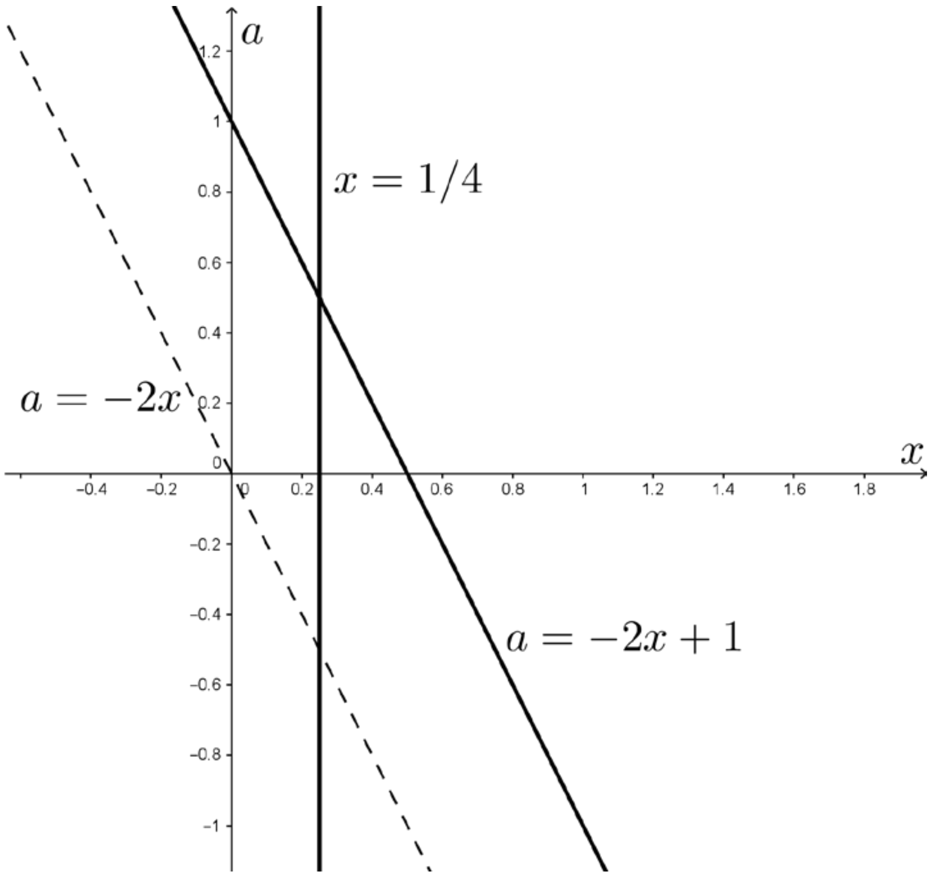
$$\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\ln(2x+a)=\ln(2x+a)$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\ln(2x+a)\,(\operatorname{tg}(\pi x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-2x+1, \\ x=\dfrac{1}{4}+n, \qquad n\in\mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ a>-2x. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Нетрудно понять, при каких значениях a горизонтальные прямые будут пересекать сплошные линии (для точек которых $a>-2x$) только один раз.

Ответ: $-1\le a\le -0{,}5,\ a=0{,}5,\ a>1.$

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$?

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-a}(\sin x-\cos x)=0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $\sqrt{x-a}=0$, получаем $x=a$.

Второй случай: $\sin x-\cos x=0$ при условии $x\geq a$. Это уравнение имеет на отрезке $[0;\pi]$ единственный корень $x=\pi/4$. Условие принимает вид $\frac{\pi}{4}\geq a$. То есть в этом случае $x=\pi/4$ при $a\leq\pi/4$.

Корень уравнения $x=a$ принадлежит отрезку $[0;\pi]$ при $0\leq a\leq\pi$.

Корни уравнения $x=a$ и $x=\pi/4$ совпадает при $a=\pi/4$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$ при $a<0$ и $\frac{\pi}{4}\leq a\leq\pi$.

Ответ: $a<0$ и $\frac{\pi}{4}\leq a\leq\pi$.

5. При каких значениях параметра a уравнение

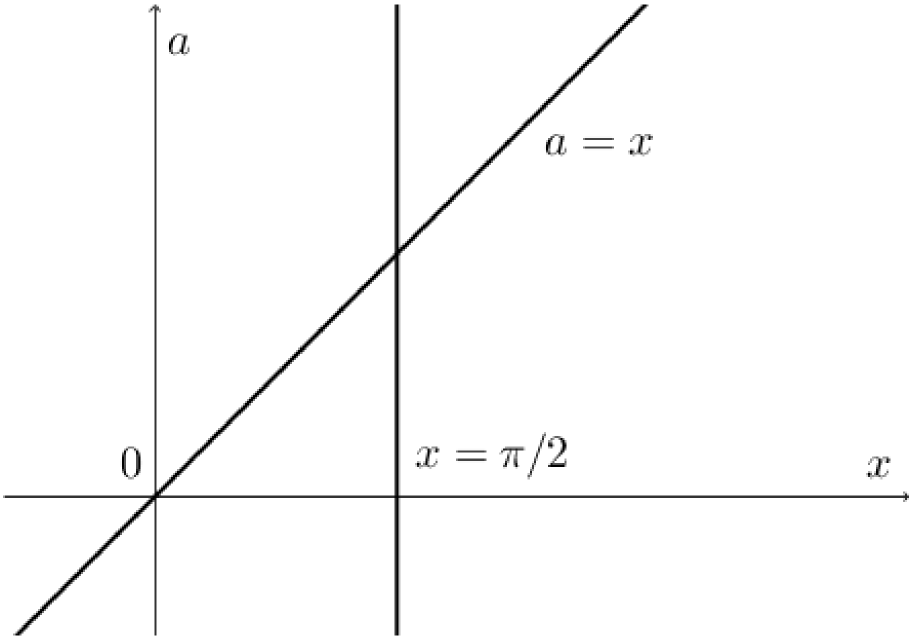
$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$?

Решение.

$$\sqrt{x-a}(\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\le x \\ \left[\begin{array}{l} a=x, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \qquad n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Нетрудно понять, при каких значениях a горизонтальные прямые будут пересекать сплошные линии (для точек которых $a\le x$) только один раз.

Ответ: $a<0,\ \frac{\pi}{2}\le a\le\pi.$

ТИП #2

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{3x-a} = x$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

Преобразуем уравнение

$$(x-1)x + (x-1)\sqrt{3x-a} = 0.$$

$$(x-1)\left(x+\sqrt{3x-a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 3x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ \sqrt{3x-a} = -x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнение $\sqrt{3x-a} = -x$ на рассматриваемом промежутке и с учётом ОДЗ может иметь корни только при $x = 0$, соответственно $a = 0$. Однако при $a = 0$ корнем исходного уравнения будет также и $x = 1$. Получается, что решению удовлетворяют только $a < 0,\ 0 < a \le 3$.

Ответ: $a < 0,\ 0 < a \le 3$.

7. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{2x-a} = x$$

имеет единственное решение на отрезке $[0; 1]$?

Решение.

Преобразуем уравнение

$$(x-1)x + (x-1)\sqrt{2x-a} = 0.$$

$$(x-1)\left(x+\sqrt{2x-a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ \sqrt{2x-a} = -x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнение $\sqrt{2x-a} = -x$ на рассматриваемом промежутке и с учётом ОДЗ может иметь корни только при $x = 0$, соответственно $a = 0$. Однако при $a = 0$ корнем исходного уравнения будет также и $x = 1$. Получается, что решению удовлетворяют только $a < 0,\ 0 < a \le 2$.

Ответ: $a < 0,\ 0 < a \le 2$.

ТИП #3

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a)$$

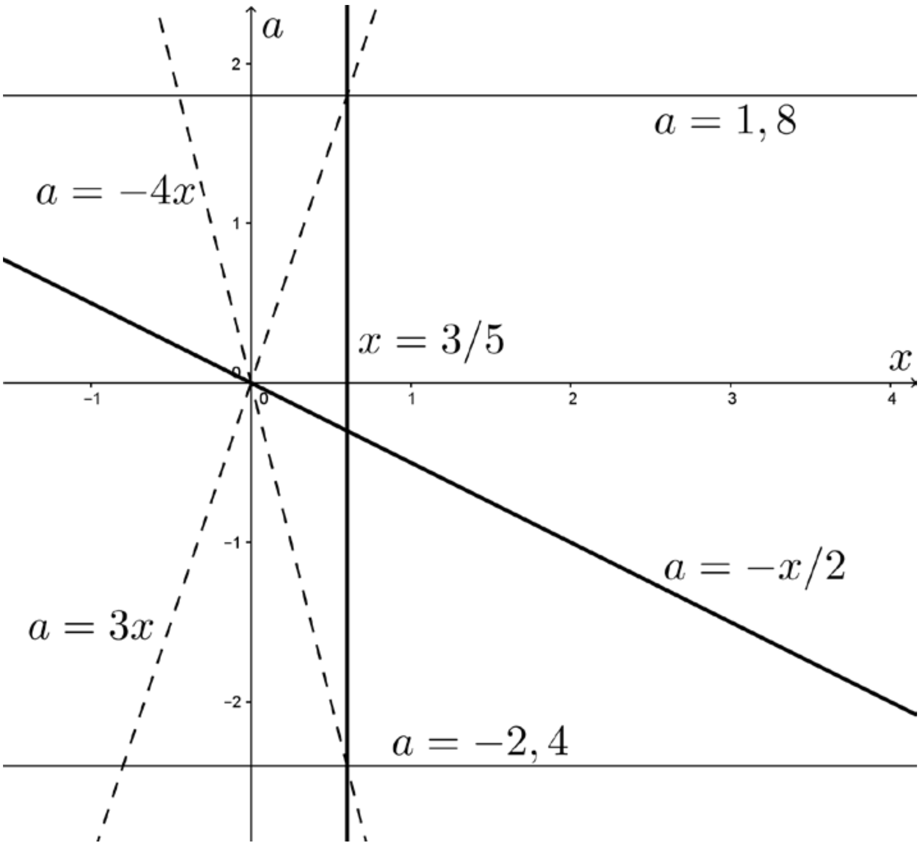
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{5x-3}(\ln(3x-a)-\ln(4x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<3x, \\ a>-4x, \\ \left[\begin{array}{l} x\geq\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{3}{5}, \end{array}\right. \\ a=-\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $-2{,}4<a<-0{,}5,\ \ 0{,}3\leq a<1{,}8.$

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a)$$

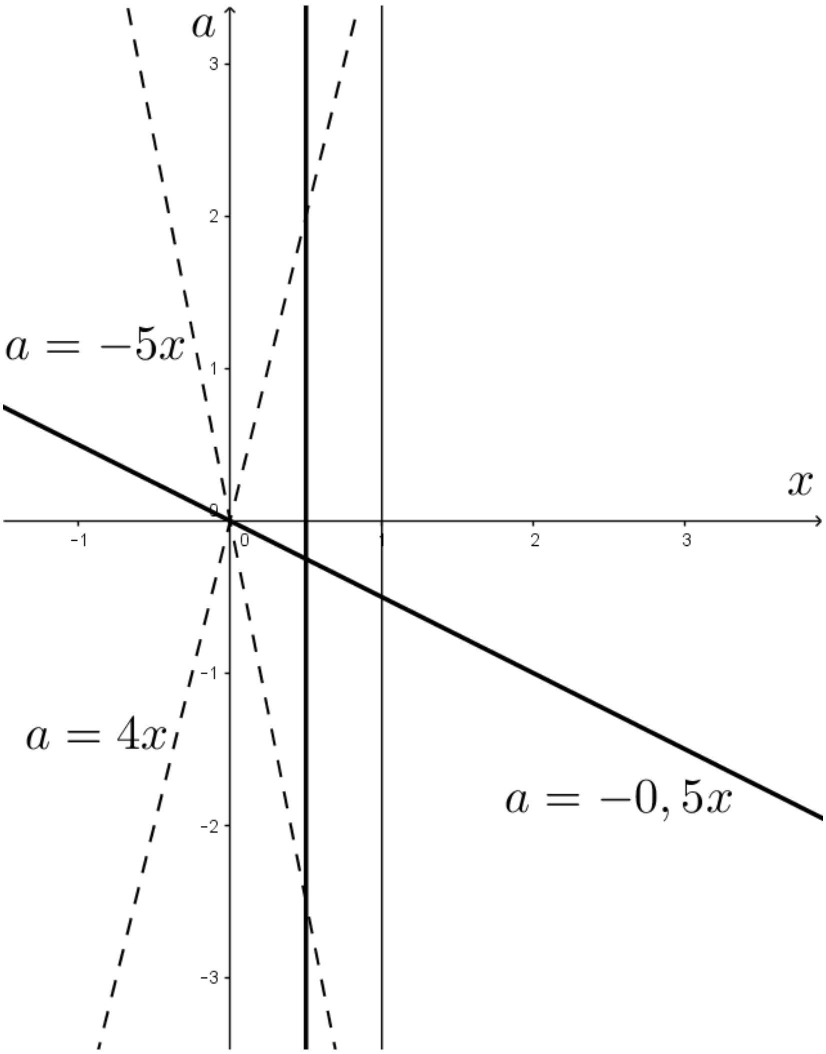
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{2x-1}(\ln(4x-a)-\ln(5x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<4x, \\ a>-5x, \\ x\geq 0{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ a=-0{,}5x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $-2{,}5<a<-0{,}5,\ \ 0{,}25\leq a<2.$

10. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(a+3x)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x-a)$$

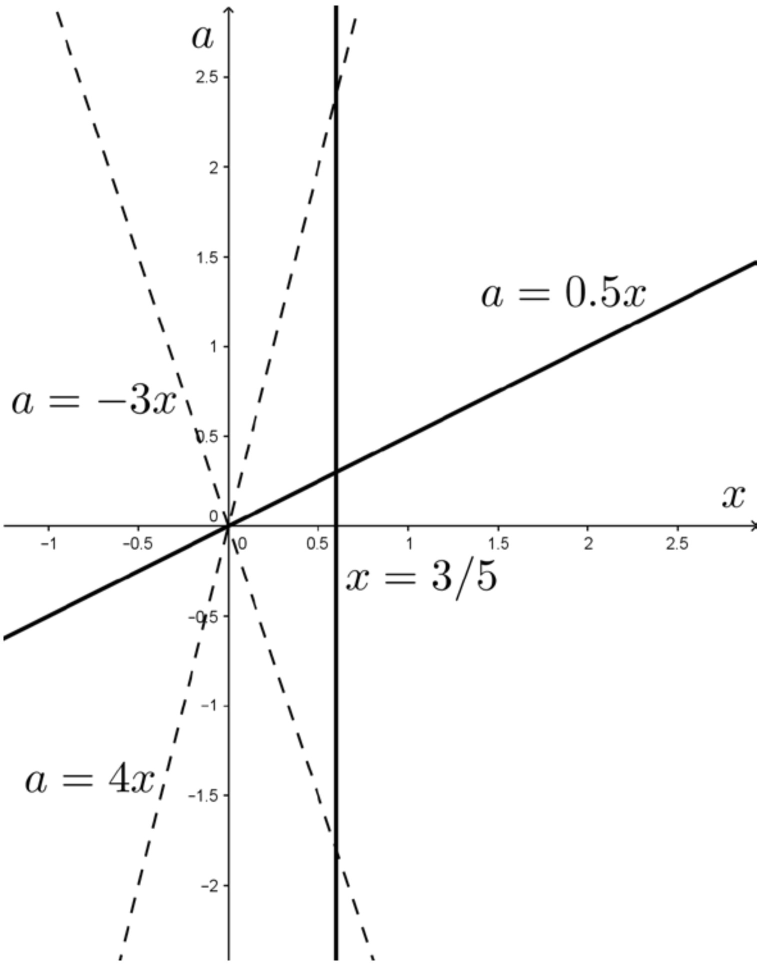
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{5x-3}(\ln(a+3x)-\ln(4x-a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-3x, \\ a<4x, \\ x\geq 0{,}6, \\ \left[\begin{array}{l} x=0{,}6, \\ a=0{,}5x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $-1{,}8<a\leq 0{,}3,\ \ 0{,}5<a<2{,}4.$

ТИП #4

11. При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(4x-3)\cdot\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0$$

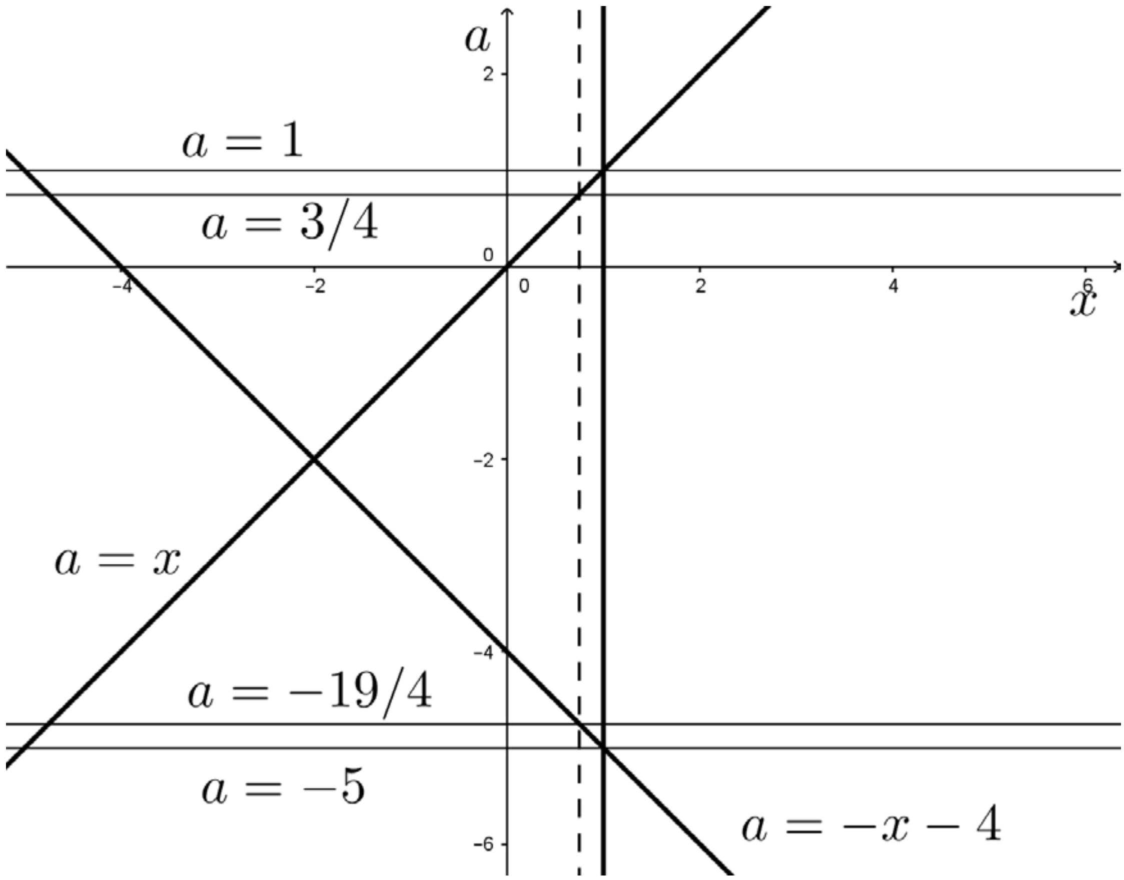
имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$?

Решение.

$$\ln(4x-3)\cdot\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4}, \\ x^2+4x-4a-a^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^2+4x-4a-a^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4}, \\ (a-x)\big(a-(-x-4)\big)\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ a=x, \\ a=-x-4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $-6<a\leq -5, -\frac{19}{4}\leq a\leq \frac{3}{4},\ 1\leq a<2.$

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x^2-4x+5-a^2)=0$$

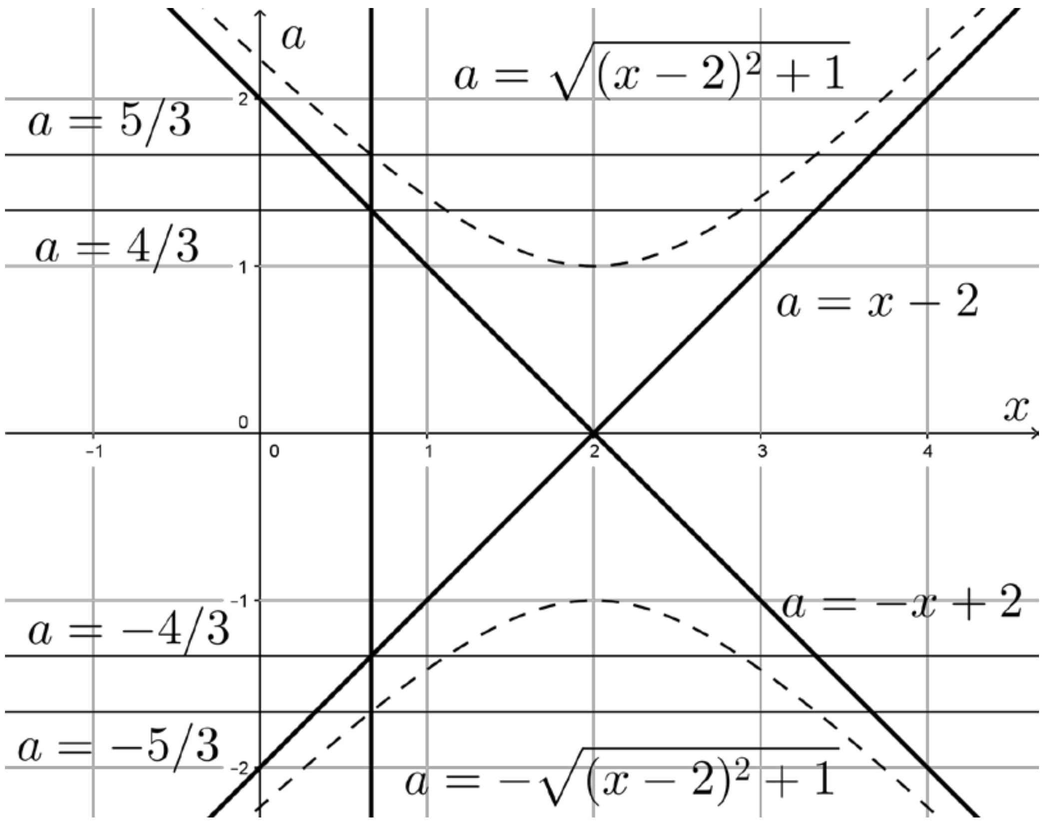
имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$?

Решение.

$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x^2-4x+5-a^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{2}{3}, \\ x^2-4x+5-a^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \\ x^2-4x+5-a^2=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{2}{3}, \\ -\sqrt{(x-2)^2+1}<a<\sqrt{(x-2)^2+1}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \\ a=x-2, \\ a=-x+2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

13. При каких значениях параметра a уравнение

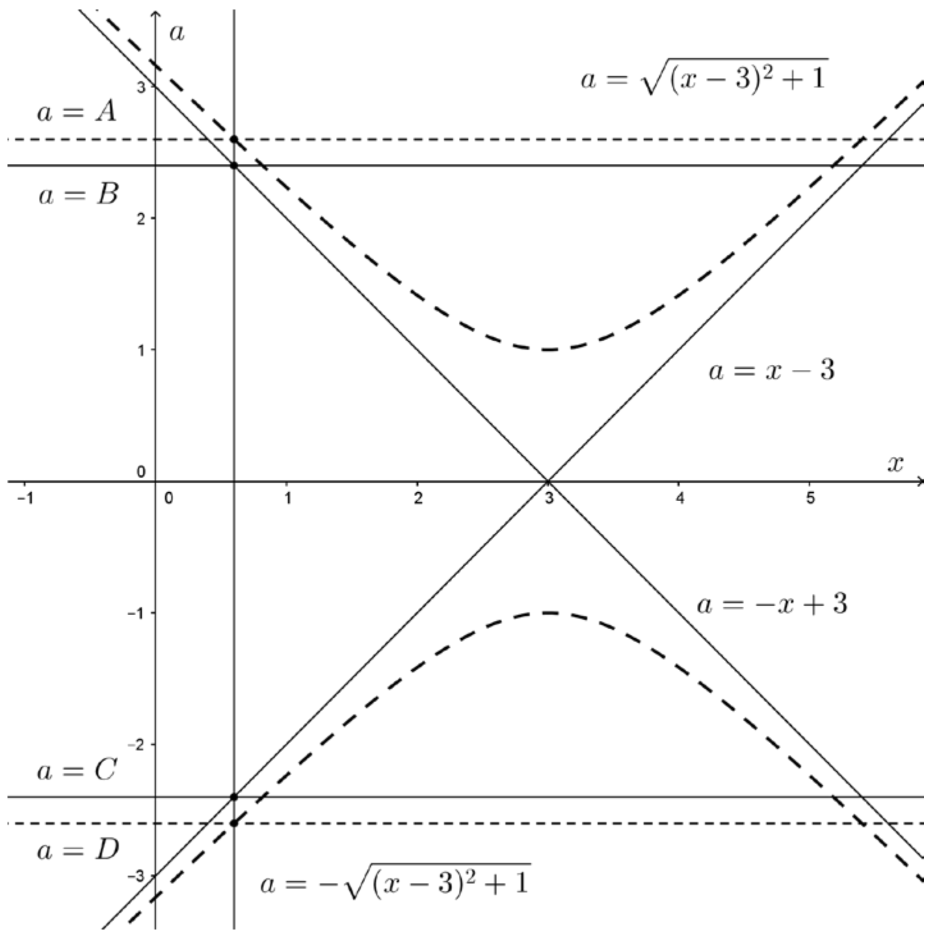
$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$?

Решение.

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} 5x-3=0, \\ x^2-6x+10-a^2=1, \end{array}\right. \\ 5x-3\ge 0, \\ x^2-6x+10-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x=\dfrac{3}{5}, \\ a=\pm(x-3), \end{array}\right. \\ x\ge\dfrac{3}{5}, \\ -\sqrt{(x-3)^2+1}<a<\sqrt{(x-3)^2+1}. \end{cases}$$



Изобразив систему графически, можно заметить, что задаче удовлетворяют все такие a, для которых выполнено

$$D<a\le C,\qquad B\le a<A.$$

A и D находятся подстановкой $x = 3/5$ в $a = \sqrt{(x-3)^2+1}$ и $a = -\sqrt{(x-3)^2+1}$ соответственно, а B и C находятся при подстановке $x = 3/5$ в $a = -x+3$ и $a = x-3$ соответственно.

Ответ: $a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

14. При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(5x-2)\cdot\sqrt{x^2-2x+2a-a^2}=0$$

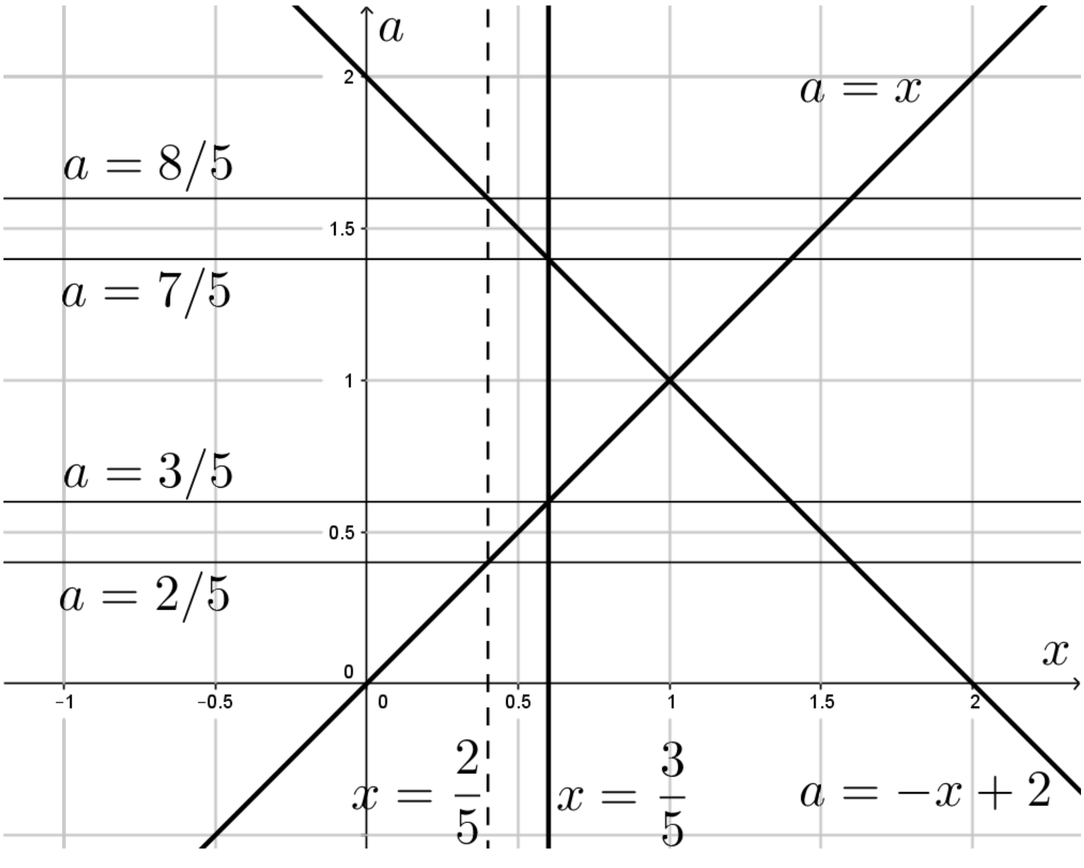
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\ln(5x-2)\cdot\sqrt{x^2-2x+2a-a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{5}, \\ x^2-2x+2a-a^2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x+2a-a^2=0, \\ x=\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{5}, \\ (a-x)\big(a-(-x+2)\big)\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5}, \\ a=x, \\ a=-x+2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $\frac{2}{5}<a\le\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\le a<\frac{8}{5}$.

15. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{4x-7}\cdot\ln(x^2-8x+17-a^2)=0$$

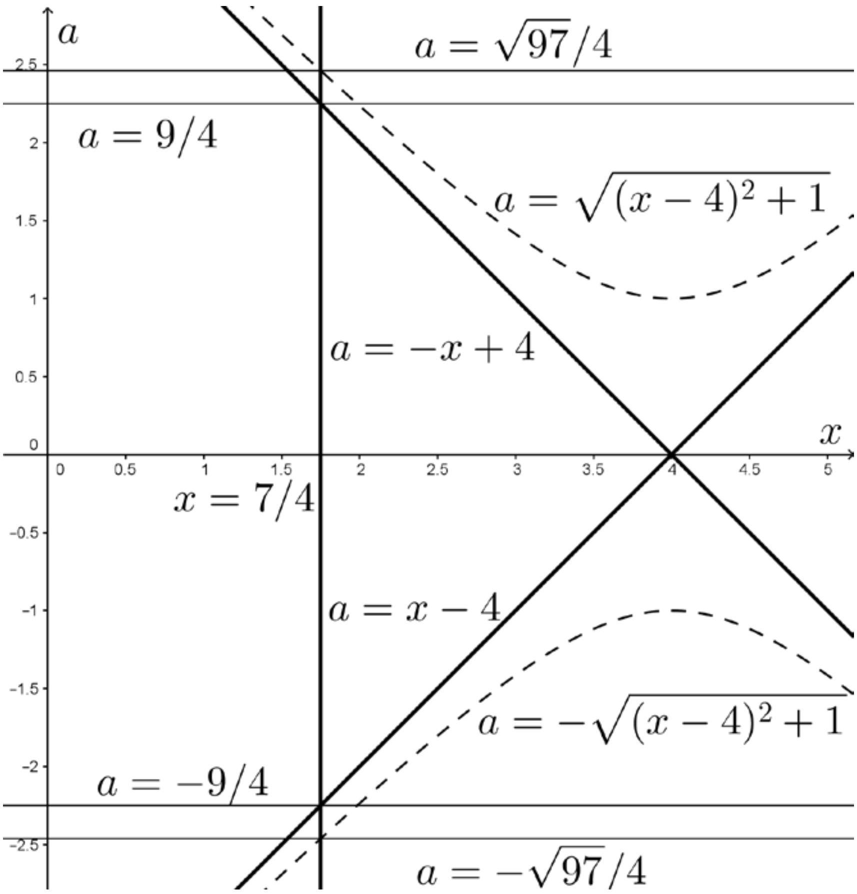
имеет единственное решение на отрезке $[0;4]$?

Решение.

$$\sqrt{4x-7}\cdot\ln(x^2-8x+17-a^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{7}{4}, \\ x^2-8x+17-a^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4}, \\ x^2-8x+17-a^2=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{7}{4}, \\ -\sqrt{(x-4)^2+1}<a<\sqrt{(x-4)^2+1}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4}, \\ a=x-4, \\ a=-x+4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{\sqrt{97}}{4};-\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{9}{4};\frac{\sqrt{97}}{4}\right)$.

16. При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

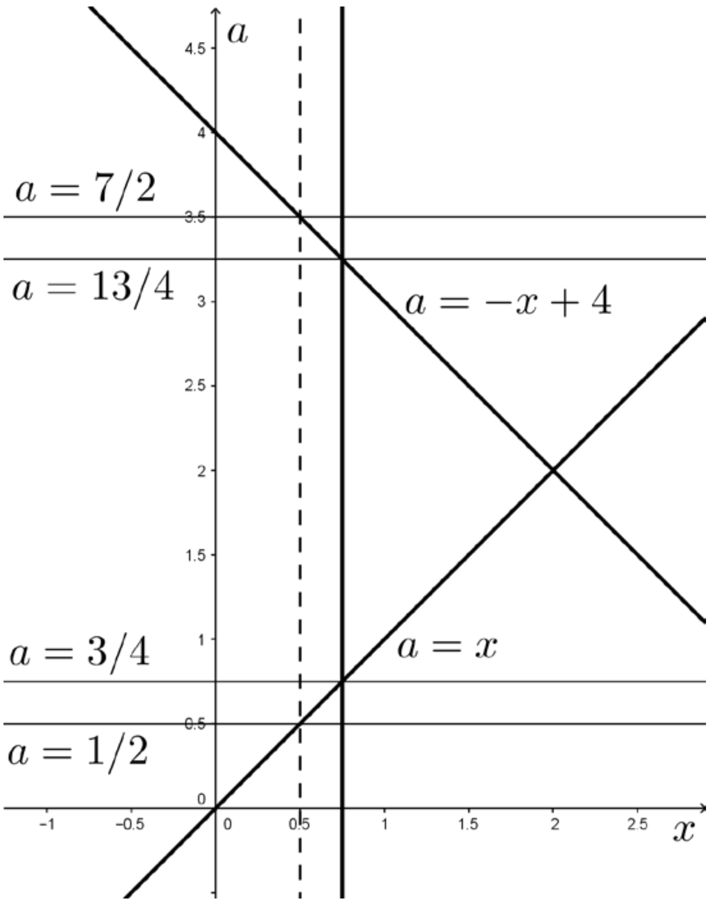
имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$?

Решение.

$$\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x^2-4x+4a-a^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4}, \\ x^2-4x+4a-a^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ (a-x)\big(a-(-x+4)\big)\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4}, \\ a=x, \\ a=-x+4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};\frac{7}{2}\right)$.

17. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

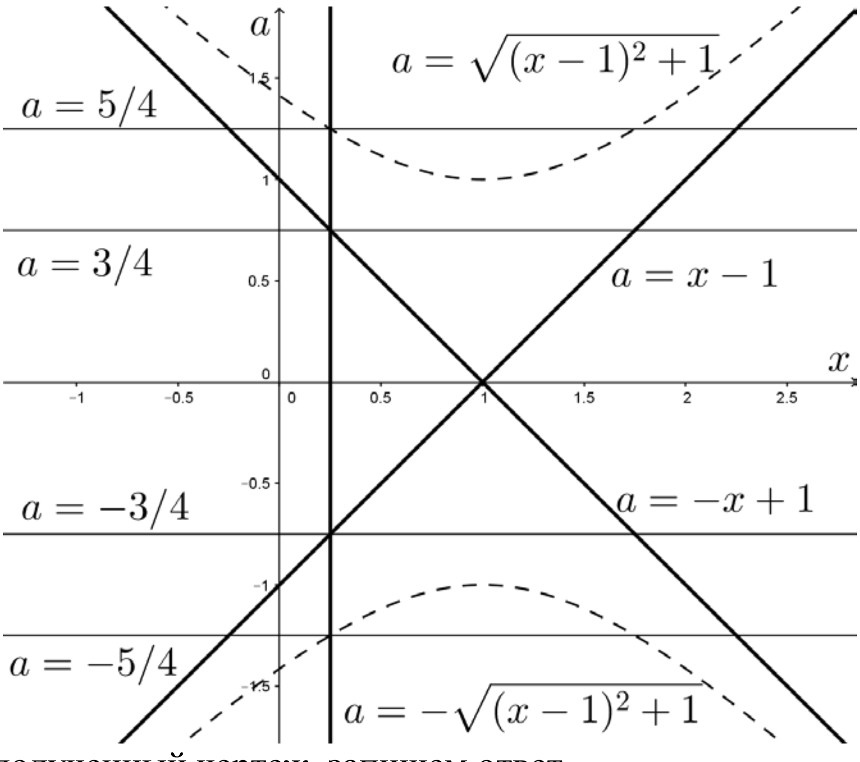
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{4}, \\ x^2-2x+2-a^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ x^2-2x+2-a^2=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{4}, \\ -\sqrt{(x-1)^2+1}<a<\sqrt{(x-1)^2+1}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ a=x-1, \\ a=-x+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

18. При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$$

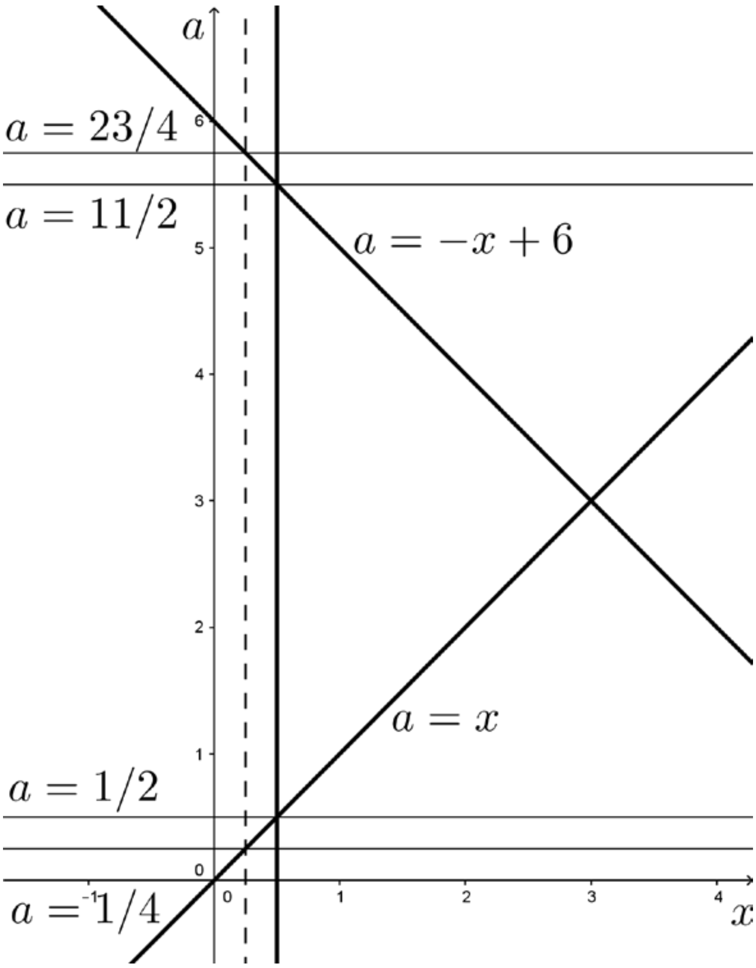
имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$?

Решение.

$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{4}, \\ x^2-6x+6a-a^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, \\ x^2-6x+6a-a^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{4}, \\ (a-x)\big(a-(-x+6)\big)\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, \\ a=x, \\ a=-x+6. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2};\frac{23}{4}\right)$.

ТИП #5

19. При каких значениях параметра a уравнение

$$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$$

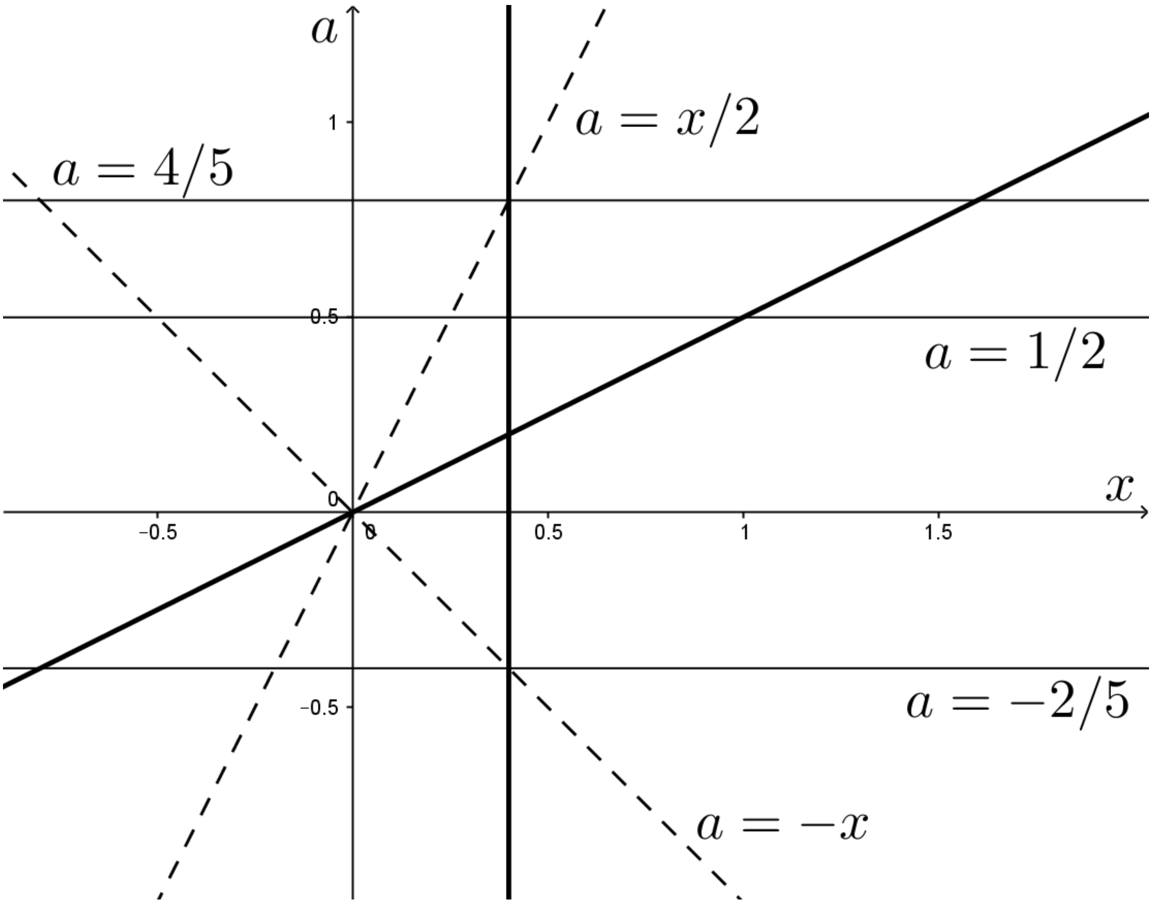
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$(5x-2)(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-x, \\ a<2x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5}, \\ a=\dfrac{x}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{2}{5};0\right]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)$.

20. При каких значениях параметра a уравнение

$$(3x-1)\cdot\ln(4x-a)=(3x-1)\cdot\ln(3x+a)$$

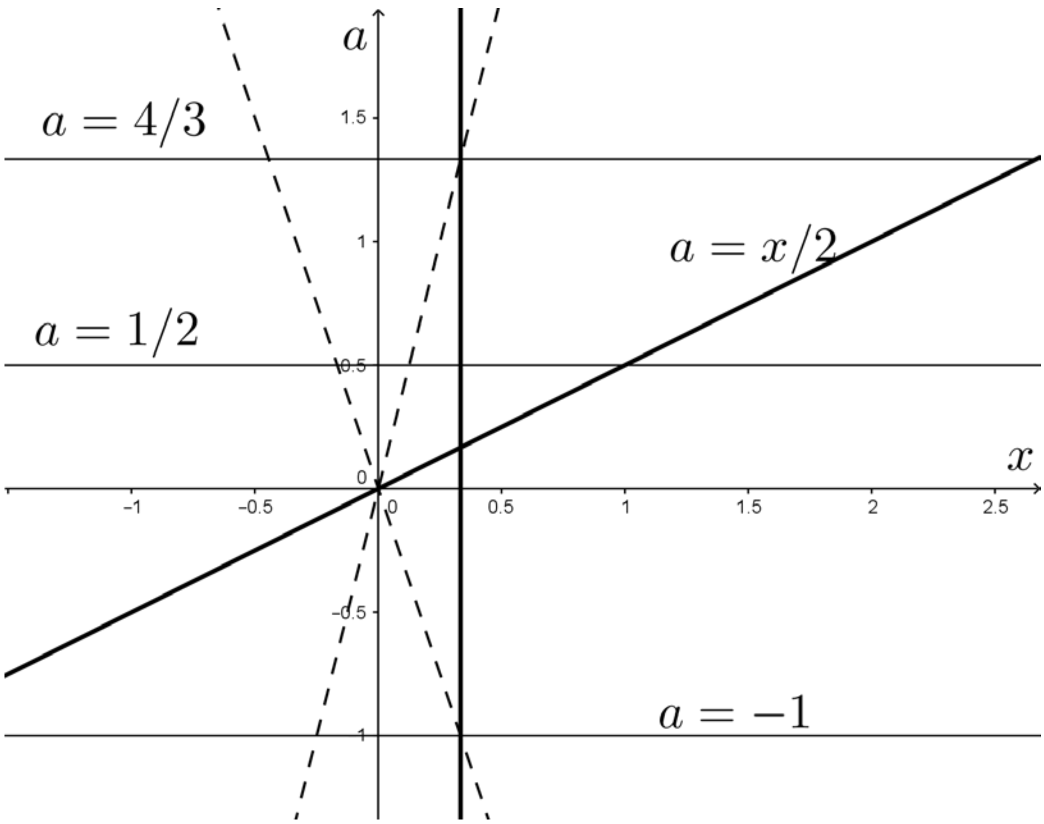
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$(3x-1)(\ln(4x-a)-\ln(3x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<4x, \\ a>-3x, \\ \left[\begin{aligned} & x=\frac{1}{3}, \\ & a=\frac{x}{2}. \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in(-1;0]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right)$.

ТИП #6

21. При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$$

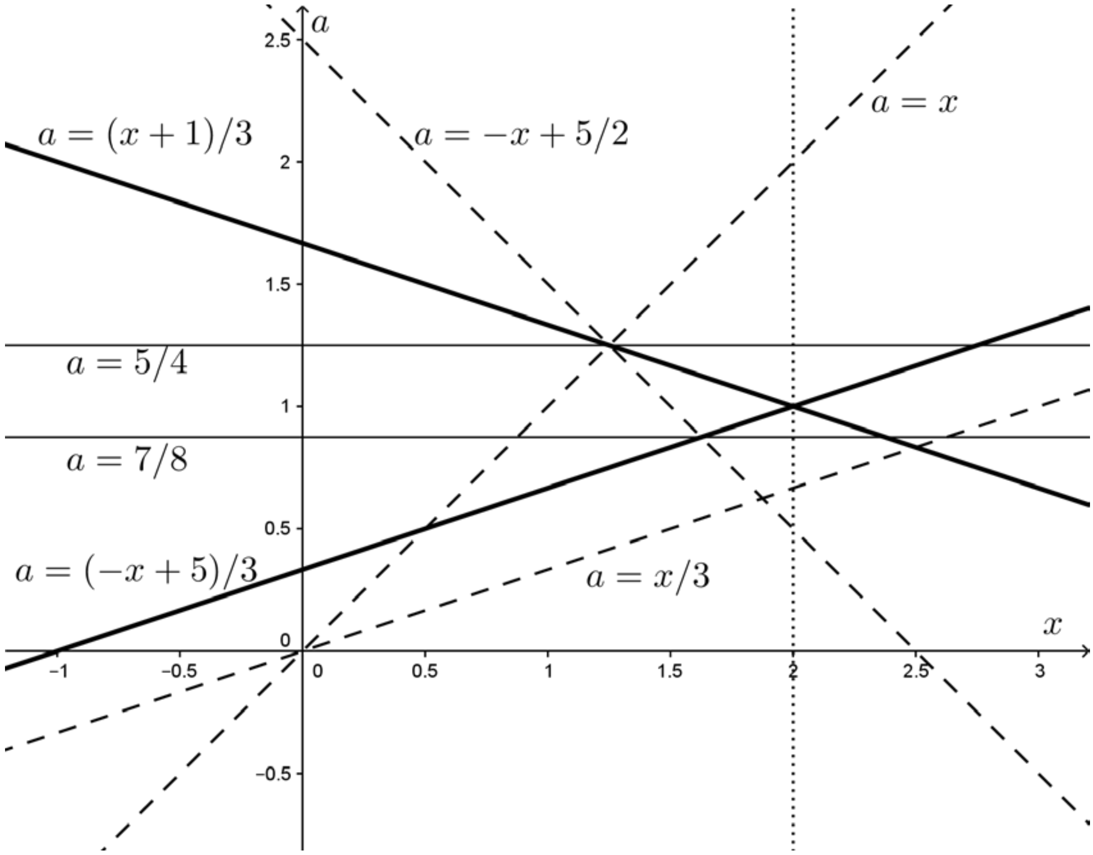
имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$?

Решение.

$$\ln(3a-x)\left(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{x}{3},\\ a<x,\\ a>-x+\dfrac{5}{2},\\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{x+1}{3},\\ a=\dfrac{-x+5}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$.

ТИП #7

22. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{1-2x}\cdot\ln(25x^2-a^2)=\sqrt{1-2x}\cdot\ln(5x+a)$$

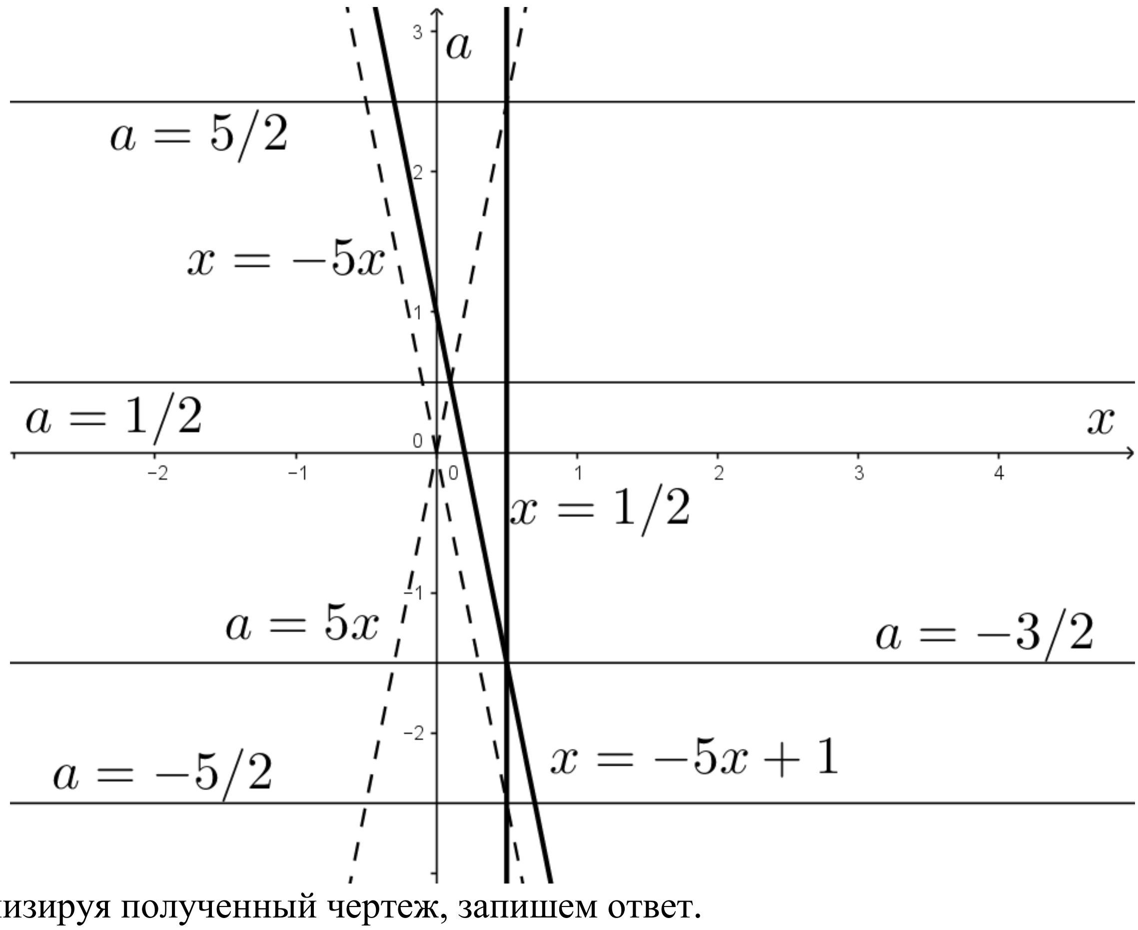
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{1-2x}(\ln(25x^2-a^2)-\ln(5x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{2}, \\ a>-5x, \\ -5x<a<5x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}, \\ a=5x, \\ a=-5x+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

23. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{2-3x}\cdot\ln(16x^2-a^2)=\sqrt{2-3x}\cdot\ln(4x+a)$$

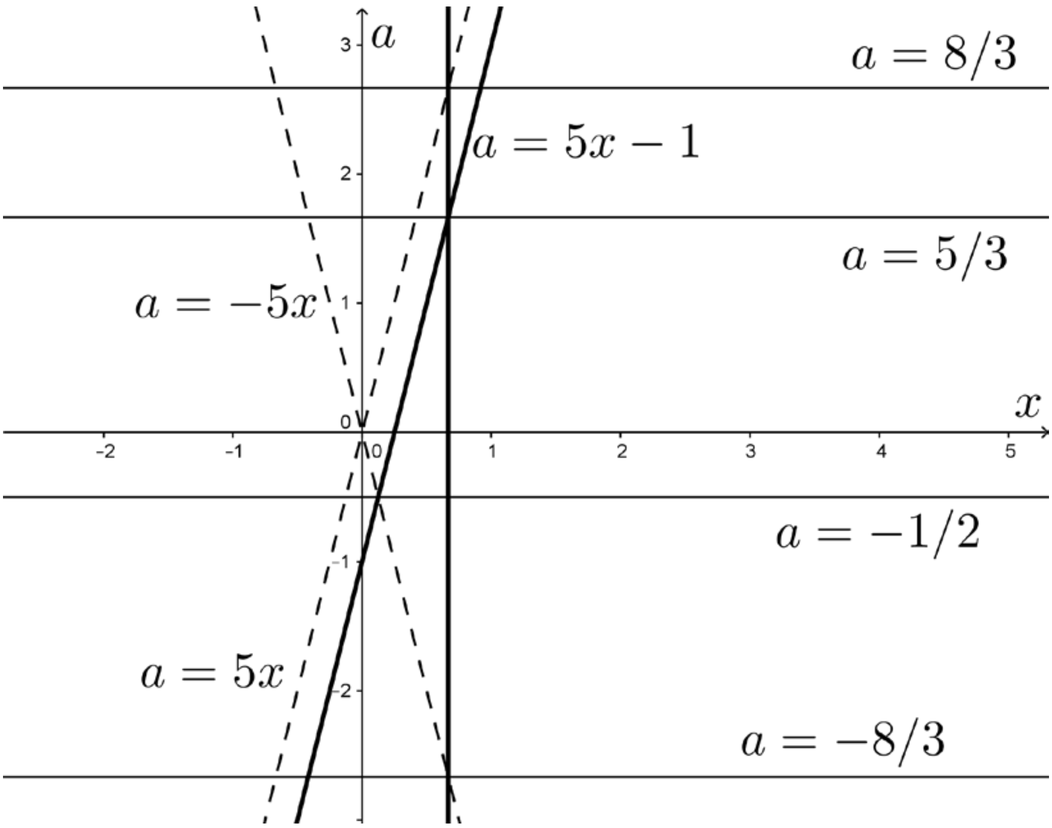
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{2-3x}(\ln(16x^2-a^2)-\ln(4x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\le\frac{2}{3}, \\ a>-4x, \\ -4x<a<4x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \\ a=-4x, \\ a=4x-1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости Oxa.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{8}{3};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

24. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{1-4x}\cdot\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{1-4x}\cdot\ln(3x+a)$$

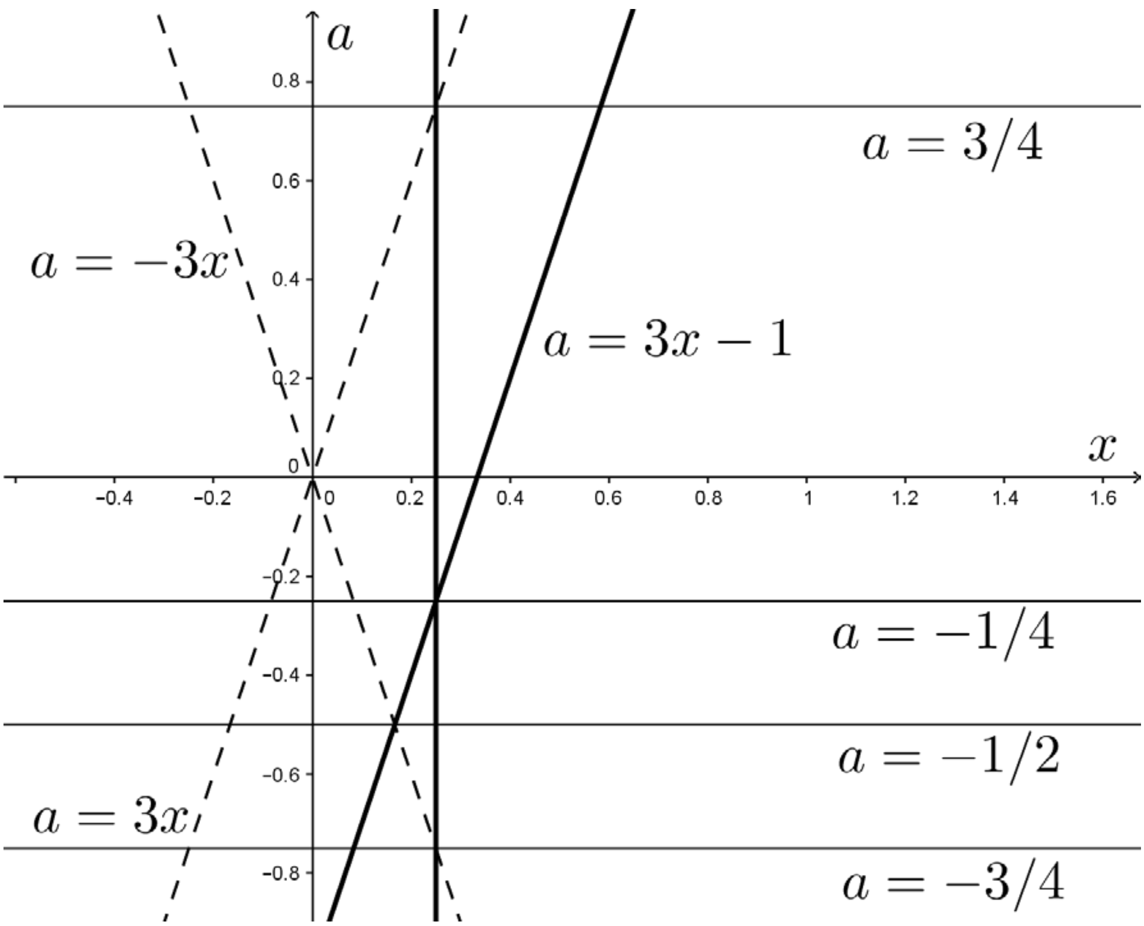
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{1-4x}(\ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le\dfrac{1}{4}, \\ a>-3x, \\ -3x<a<3x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4}, \\ a=-3x, \\ a=3x-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости *Oxa*.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right).$

25. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{3-5x}\cdot\ln(4x^2-a^2)=\sqrt{3-5x}\cdot\ln(2x+a)$$

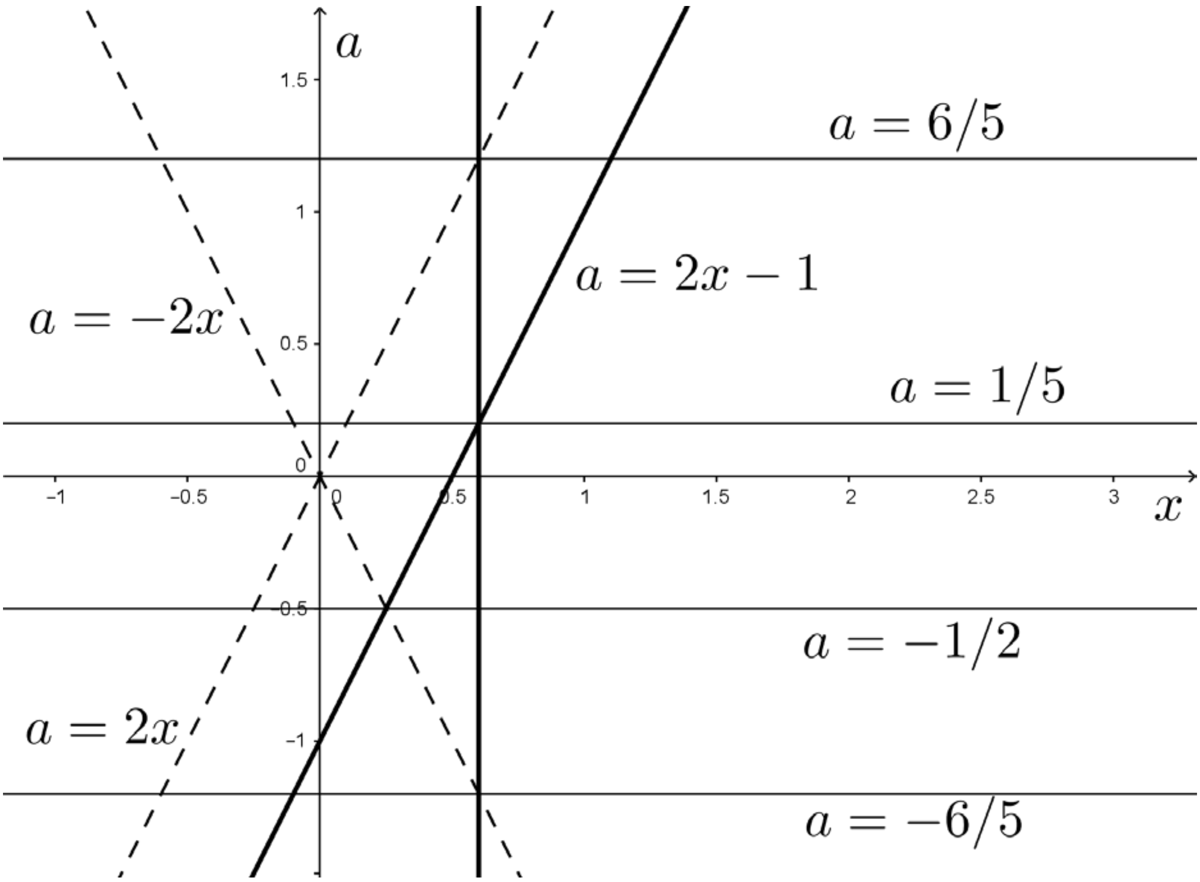
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$?

Решение.

$$\sqrt{3-5x}(\ln(4x^2-a^2)-\ln(2x+a))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le\frac{3}{5}, \\ a>-2x, \\ -2x<a<2x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{5}, \\ a=-2x, \\ a=2x-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Множество, задаваемое полученное системой, удобно изобразить графически в плоскости *Oxa*.



Анализируя полученный чертеж, запишем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\frac{6}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$.