1. (Источник: http://mathus.ru/math/ege21.pdf; задача №24 с конца) Задание №19 из ЕГЭ профильного уровня.

Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывести все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение.

а) Все 50 глыб по 800 кг разложим в 10 грузовиков – в каждый по 5 глыб (то есть по 4 тонны). Все 60 глыб по 1000 кг разложим в 20 грузовиков – в каждый по 3 глыбы (то есть по 3 тонны). Все 60 глыб по 1500 кг разложим в 30 грузовиков – в каждый по 2 глыбы (то есть по 3 тонны). Как видим, все глыбы разместились в $10 + 20 + 30 = 60$ грузовиках.

б) Заметим, что $38 \cdot 5 = 190$ т есть как раз суммарная масса глыб.

Предположим, что можно вывести все глыбы на 38 грузовиках. Тогда в каждом грузовике находится в точности по 5 тонн. Заметим следующее:

- ровно одна 800-киллограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшуюся массу $5000 - 800 = 4200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно две 800-киллограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 2 \cdot 800 = 3400$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно три 800-киллограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 3 \cdot 800 = 2600$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;

- ровно четыре 800-киллограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 4 \cdot 800 = 1800$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно шесть 800-киллограммовых глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 6 \cdot 800 = 200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- семь и более 800-киллограммовых глыб в грузовик не влезут $(7 \cdot 800 > 5000)$.

Значит, если в грузовике имеются 800-киллограммовые глыбы, то их там ровно 5 штук с общей массой 4000 кг. Недостающие 1000 кг в этом грузовике заполняются единственным образом – глыбой в 1000 кг. Так будут заполнены $50 : 5 = 10$ грузовиков.

Остальные 28 грузовиков должны быть заполнены только глыбами массой 1000 и 1500 кг. Заметим следующее:

- ровно одна 1500-киллограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшуюся массу $5000 - 1500 = 3500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- ровно три 1500-киллограммовах глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 3 \cdot 1500 = 500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- четыре и более 1500-киллограммовых глыб в грузовик не влезут $(4 \cdot 1500 > 5000)$.

Следовательно, в каждом из оставшихся 28 грузовиков должны лежать ровно две глыбы по 1500 кг (и две глыбы по 1000 кг). Но $28 \cdot 2 = 56$, а 1500-киллограммовых глыб у нас 60. Полученное противоречие показывает, что 38 грузовиков не хватит для одновременного вывоза всех глыб.

в) Из предыдущего пункта следует, что грузовиков должно быть не менее 39. Приведем пример раскладки глыб по 39 грузовикам:

- в каждый из 30 грузовиков кладём две 1500-киллограммовые глыбы и две 1000-киллограммовые глыбы (тем самым глыбы обоих видов разложены полностью);
- в каждый из 8 грузовиков кладём по шесть 800-киллограмовых глыб (тем самым разложены 48 таких глыб);

- в один грузовик кладём оставшиеся две 800-киллограммовые глыбы.

Следовательно, наименьшее число грузовиков, необходимое для одновременного вывоза всех глыб, равно 39.

Ответ: а) да; б) нет; в) 39 грузовиков.

2. Источник: ПВГ, 2011, Москва, №1. Задача 10, 11 (или 19 слабая) из ЕГЭ.

Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (подряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек. Сколько мест на парковке? Каких цифр было использовано больше всего, а каких – меньше всего?

Решение.

Понятно, что до четырехзначных номеров дело не дошло:

$$900 \cdot 3 = 2700 > 2148.$$

Тогда:

$$\frac{2148 - 9 - 2 \cdot 90}{3} = 653.$$

Итого $9 + 90 + 653 = 752$ места на парковке.

При нумерации мест от 1 до 99 всех цифр использовано поровну (по 20), кроме 0, которого использовано на 11 меньше, чем остальных цифр (так как нумерация начинается с 1, а не с 0, и нет десятков, начинающихся с 0). В каждой полной сотне используется 120 цифр, с которой начинается сотня и 20 остальных цифр (например, при нумерации от 100 до 199 будет использовано 120 единиц, а остальных цифр (включая ноль) – по 20). Так как мест всего 752, то нет сотен, начинающихся с цифр 0, 8 и 9. Седьмая сотня не полная, в ней пятый десяток не полный (в нем есть только числа 750, 751, 752). В таблице показано, сколько раз использована каждая цифра.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
145	256	256	255	255	248	245	198	145	145

Ответ: 752; больше всего использовано 1 и 2 (поровну), меньше всего использовано 0, 8, 9 (поровну).

3. Источник: ПВГ, 2011, Москва, №2. Задача 13 из ЕГЭ.

Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

Решение.

Избавляясь от синуса, получим

$$\sin x = (-1)^k(\cos x + 1) + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение имеет смысл только при $k = 0$, откуда получаем только один случай

$$\sin x = \cos x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

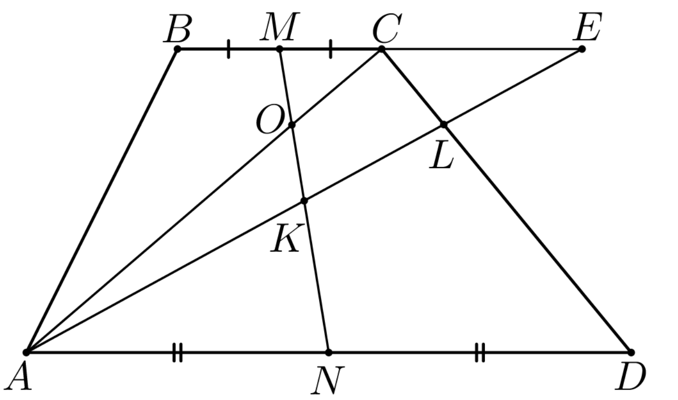
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Источник: ПВГ, 2011, Москва, №3. Задача 17 из ЕГЭ.

Через одну вершину трапеции проведены две прямые. Одна из них проходит также через противоположную вершину трапеции и делит отрезок, соединяющий середины её оснований, в отношении 3:1. В каком отношении делит этот отрезок другая прямая, делящая площадь трапеции пополам?

Решение.

Пусть M и N – середины оснований BC и AD соответственно, O – точка пересечения отрезков MN и AC. Если диагональ AC делит отрезок MN в отношении $MO:ON = 1:3$, то также $BC:AD = MC:AN = 1:3$ (из-за подобия треугольников CMO и ANO, CBO и ADO с коэффициентом $k = 1/3$).



1) Рассмотрим первый случай: AL – прямая, делящая площадь трапеции пополам (точка L лежит на отрезке CD, так как $S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ACD} < S_{ACD}$), а E – точка пересечения прямых AL и BC. Обозначим через S площадь трапеции $ABCD$, тогда

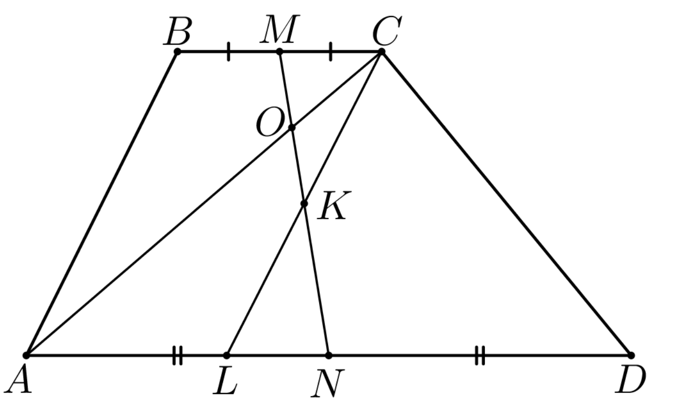
$$S_{ADL} = \frac{1}{2}S, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{4}S, \qquad S_{ACD} = \frac{3}{4}S.$$

Треугольники ACD и ALD имеют одинаковую высоту, опущенную из вершины A. Следовательно,

$$\frac{CD}{LD} = \frac{S_{ACD}}{S_{ALD}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CL}{LD} = \frac{1}{2},$$

$$\Delta ELC \sim \Delta ALD \Rightarrow \frac{CE}{AD} = \frac{CL}{LD} = \frac{1}{2},$$

$$\Delta MKE \sim \Delta NKA \Rightarrow \frac{MK}{KN} = \frac{ME}{AN} = \frac{MC+CE}{AN} = \frac{MC}{AN} + \frac{CE}{AD/2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{4}{3}.$$



2) Рассмотрим второй случай: CL – прямая, делящая площадь трапеции пополам (точка L лежит на отрезке AD). По условию $S_{ABMN} = S_{ABCL} = \frac{1}{2}S$, поэтому $S_{LKN} = S_{CKM}$, а поскольку $\Delta LKN \sim \Delta CKM$,

получаем $\Delta LKN = \Delta CKM$. Следовательно, в этом случае $MK : KN = 1:1$.

Ответ: 1:1 или 4:3.

5. Источник: ПВГ, 2011, Москва, №4. Задача 15 из ЕГЭ.

Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{9-4^{y+1}-3^x\cdot 2^{y+2}-9^x}{4^{y+1}+3^x\cdot 2^{y+1}-3^{x+1}-9}=\dfrac{3^x+2^{y+1}-3}{3^x-1}, \\ 3^{x-1}\cdot 2^{y+1}=1. \end{cases}$$

Решение.

Сделаем замену переменных $a=3^x$; $b=2^{y+1}$ $(a>0, b>0)$. Второе уравнение системы можно переписать в виде $ab=3$, а первое уравнение примет вид

$$\frac{9-a^2-2ab-b^2}{b^2+ab-3a-9}=\frac{a+b-3}{a-1}.$$

Разложим в левой части уравнения числитель и знаменатель на множители, получим уравнение:

$$\frac{(3-a-b)(3+a+b)}{(b-3)(a+b+3)}=\frac{a+b-3}{a-1}\Leftrightarrow\frac{3-a-b}{b-3}=\frac{a+b-3}{a-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b-3}{3-b}=\frac{a+b-3}{a-1},$$

откуда получаем следующие варианты:

1) $a+b=3$, что с учётом равенства $ab=3$ приводит к уравнению $a^2-3a+3=0$, которое не имеет решений;

2) $3-b=a-1$, что с учётом равенства $ab=3$ дает решения $a=1$, $b=3$ или $a=3$, $b=1$. Первая пара (a,b) не входит в область определения уравнения $(a\neq 1, b\neq 3)$, а вторая – входит. Следовательно, $x=1$, $y=-1$.

Ответ: $(1;-1)$.

6. Источник: ПВГ, 2011, Москва, №5. Задача 18 из ЕГЭ.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a-3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 – корни уравнения. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = a,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a^3 + 6a^2 - 5a - 8,$$

$$x_1x_2x_3 = (a-3)^3.$$

Кроме того, $x_2^2 = x_1x_3$. Отсюда находим

$$x_2 = a - 3, \qquad x_1x_3 = (a-3)^2, \qquad x_1 + x_3 = 3.$$

Теперь из равенства $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a^3 + 6a^2 - 5a - 8$ получаем

$$a^3 - 5a^2 + 2a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -1{,}2{,}4.$$

При $a = -1$ действительных решений x_1 и x_3 нет. При $a = 2$ имеем $x_2 = -1$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. При $a = 4$ получаем $x_2 = 1$ и те же x_1 и x_3, что и в предыдущем случае.

Ответ: при $a = 2$: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; при $a = 4$: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

7. Источник: ПВГ, 2011, Архангельск, №1. Задача 10, 11 из ЕГЭ.

Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

Решение.

Делимость на 4 зависит только от двух последних цифр. Первые две цифры при этом выбираются произвольно, с учётом ограничений. На первом месте может стоять любая из 5 цифр, кроме нуля и четырёх «запрещённых»; на втором месте любая из 6. Итого 30 вариантов.

В конце находится чётная цифра, и это либо 0, либо 2. Перед нулём также находится чётная цифра, и это даёт два варианта 00 и 20. Перед 2 находится нечётная цифра, любая кроме 5. Это даёт ещё 4 варианта для двух последних цифр: 12, 32, 72, 92. Итого 6 возможностей.

По правилу произведения, всего чисел будет $30 \cdot 6 = 180$.

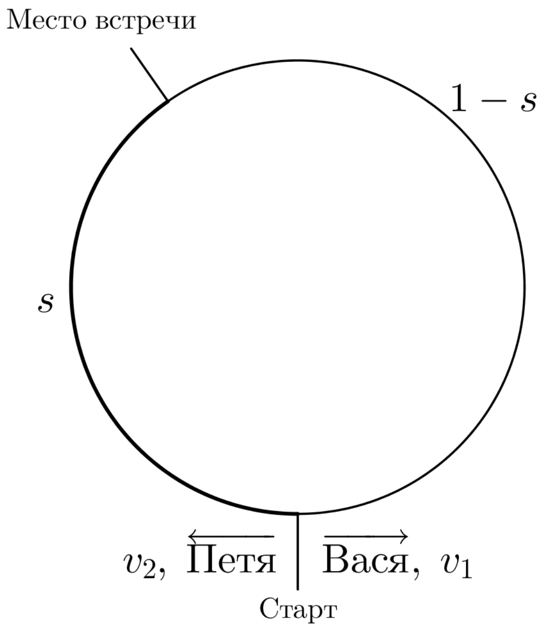
Ответ: 180.

8. Источник: ПВГ, 2011, Архангельск, №2. Задача 10, 11 из ЕГЭ.

Вася и Петя одновременно выбежали с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях с постоянными скоростями. В некоторый момент они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их первой встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Найдите отношение скоростей Васи и Пети.

Решение.

Из условия задачи следует, что скорость Васи выше. Поэтому место их первой встречи изобразим чуть ближе к Пете.



Пусть v_1 и v_2 – скорости Васи и Пети соответственно, длина окружности равна 1, а расстояние, которое до места встречи пробежал Петя, равно s. Тогда Вася до места встречи пробежал $1-s$. Получим первое уравнение относительно времени встречи:

$$\frac{1-s}{v_1} = \frac{s}{v_2} \Longrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1-s}{s}.$$

За время, пока Петя пробегал оставшееся расстояние $1-s$, Вася успел снова вернуться к месту первой встречи (то есть пробежать полный круг с момента встречи). Получим второе уравнение

$$\frac{1-s}{v_2} = \frac{1}{v_1} \Longrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1-s}.$$

Получаем

$$\frac{1-s}{s} = \frac{1}{1-s}, \qquad s^2 + s - 1 = 0, \qquad s = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Источник: ПВГ, 2011, Архангельск, №3. Задача 15 из ЕГЭ.

Решите неравенство

$$\sqrt{x - x^2 + 2} + x^2 > 4 - 5|x - 2|.$$

Решение.

ОДЗ: $x - x^2 + 2 \geq 0$, $-1 \leq x \leq 2$. Поэтому достаточно рассмотреть только один случай раскрытия модуля.

$$\sqrt{x - x^2 + 2} > -x^2 + 5x - 6.$$

Посмотрим, как ведет себя правая часть неравенства

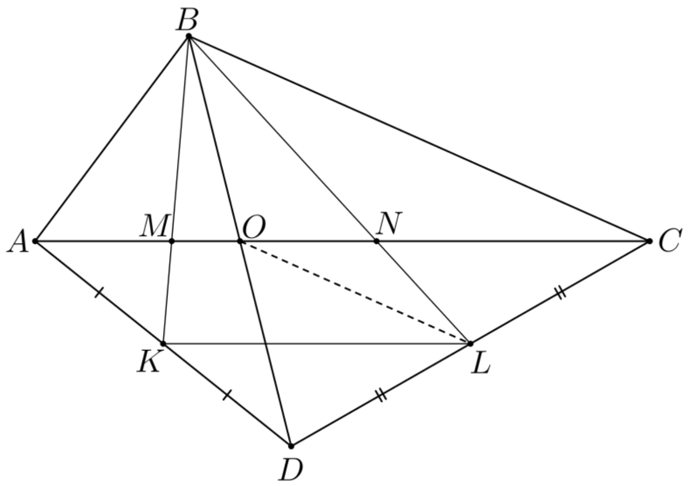
$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \qquad x = 3.$$

Получается, что правая часть отрицательна при $x < 2$ и $x > 3$, значит все значения x из ОДЗ, кроме $x = 2$, уже точно являются решениями. Остается проверить, является ли $x = 2$ решением. Подстановка дает $0 > 0$, что неверно.

Ответ: $[-1; 2)$.

10. Источник: ПВГ, 2011, Архангельск, №4. Задача 17 из ЕГЭ.

В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Сумма площадей треугольников *AOB* и *COD* равна сумме площадей треугольников *BOC* и *AOD*, а площадь треугольника *BOC* вдвое больше, чем площадь треугольника *AOB*. Медианы *BK* и *BL* треугольников *ABD* и *DBC* пересекают отрезок *AC* в точках *M* и *N*, соответственно. Найдите *KL*, если $NC = 4$.



Решение.

Поскольку $S_{BOC} = 2S_{AOB}$, то $OC = 2AO$.

Если $S_{AOB} = s$, $S_{AOD} = k$, то $S_{BOC} = 2s$, $S_{DOC} = 2k$. По условию

$$s + 2k = k + 2s, \qquad s = k.$$

Поскольку площади треугольников *AOB* и *AOD* равны, то равны и стороны *BO* и *OD*. Значит *OL* – средняя линия треугольника *BCD*, $BC = 2OL$.

Треугольники *BNC* и *LNO* подобны, откуда

$$NC = 2NO = \frac{2}{3}CO = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}AC = \frac{4}{9}AC.$$

KL – средняя линия треугольника *ACD*, поэтому

$$KL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}NC = \frac{9}{2}.$$

Ответ: 9/2.