

## Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

## Тренировочный вариант №348

## Уровень 1

## Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

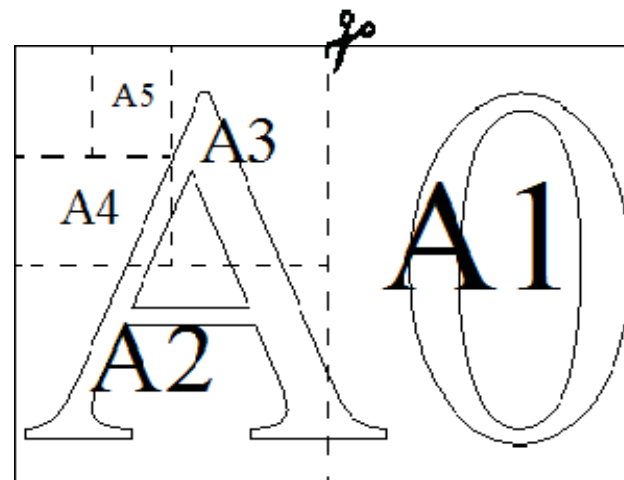
**Желаем успеха!**

## Часть 1

*Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.*

## Модуль «Алгебра»

**Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5**



Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получается два листа формата А2. И так далее.

Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же, поэтому листы всех форматов подобны. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при уменьшении или увеличении шрифта при изменении формата листа.

**1.** В таблице даны размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы А1, А3, А5 и А6.

Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	210	148
2	148	105
3	841	595
4	420	297

Установите соответствие между форматами и номерами листов. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх чисел без пробелов и других разделительных символов.

Формат	А1	А3	А5	А6
Номер				

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.** Сколько листов формата А4 получится из одного листа формата А2?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.** Найдите длину (в мм) большей стороны листа бумаги формата А4. Результат округлите до целых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.** Найдите отношение длины большей стороны к меньшей листа формата А1. Результат округлите до десятых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.** Размер (высота) типографского шрифта измеряется в пунктах. Один пункт равен  $1/72$  дюйма, то есть 0,5328 мм. Какой высоты нужен шрифт (в пунктах), чтобы текст был расположен на листе формата А4 так же, как этот текст, напечатанный шрифтом высотой 27 пунктов на листе формата А5? Результат округлите до целых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.** Найдите значение выражения  $1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-4}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.** Известно, что  $a < b < 0$ . Выберите наименьшее их чисел:

1)  $a - 1$

2)  $b - 1$

3)  $ab$

4)  $-b$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.** Найдите значение выражения  $(3\sqrt{2})^2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.** Решите в действительных числах уравнение:

$$x^2 - 18 = 7x.$$

В ответе запишите значение выражения  $-5x_1 + x_2$ , где  $x_i$  – корни этого уравнения, причём  $x_i < x_{i+1}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.** Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика (правильной кости) выпадет нечётное число очков.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.** Даны функции  $f(x)$ . Установите соответствие между функциями  $f(x)$  и количеством точек с целыми координатами, принадлежащих этим функциям.

**А)**  $y = f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

**Б)**  $y = f(x) = \frac{x+5}{x-1}$

**В)**  $y = f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-3}$

**Г)**  $y = f(x) = \frac{x^2-5x+8}{x-4}$

**1)** 4

**2)** 6

**3)** 8

**4)** 12

В ответе запишите последовательность цифр, соответствующих А, Б, В, Г, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.** Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$ , где  $d_1$  и  $d_2$  – длины диагоналей четырёхугольника,  $\alpha$  – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали  $d_1$ , если  $d_2 = 15$ ,  $\alpha = \arctg \frac{2}{\sqrt{21}}$ , а  $S = 36$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**13.** Решите неравенство:

$$x^2(-x^2 - 1) \leq -x^2 - 1.$$

**1)**  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

**2)**  $\{-1; 1\}$

**3)**  $(-\infty; +\infty)$

**4)**  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**14.** Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвертого часа в организм из окружающей среды попала еще одна бактерия?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Модуль «Геометрия»**

**15.** Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**16.** Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как  $3:4:11$ . Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 14.

Ответ: \_\_\_\_\_.

17. В декартовой системе координат на плоскости даны точки:

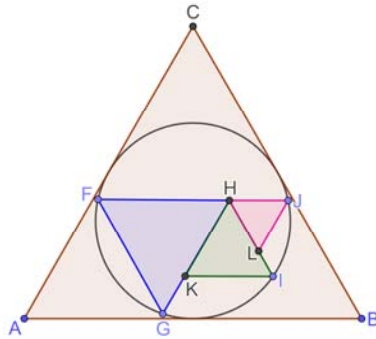
$$O(0, 0), A(10, 5), B(3, 9).$$

Найдите тангенс угла  $AOB$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

18. Даны четыре правильных треугольника  $ABC$ ,  $FGH$ ,  $KIH$ ,  $HLJ$  (см. рис.). В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$ . Точки  $F$ ,  $G$ ,  $I$ ,  $J$  лежат на окружности  $\omega$ . Точки  $F$ ,  $H$ ,  $J$  лежат на одной прямой. Точки  $K$  и  $L$  лежат на отрезках  $GH$  и  $HI$  соответственно.

Найдите значение выражения  $\frac{S_{ABC}}{S_{FGH} + S_{KIH} + S_{HLJ}}$ , где  $S_{\Phi}$  – площадь треугольника  $\Phi$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Средняя линия трапеции параллельна её основаниям.
- 3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

### Модуль «Алгебра»

20. Найдите значение выражения  $\frac{x^3 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1}{x^2 + xy - x + y^2 - 2y + 1} - x + y$  при  $x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$  и  $y = 2,18281828$ .

21. Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 3 часа, вернулись обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 9 км/ч?

22. Постройте график функции:

$$y = x^2 - |4x + 3|.$$

Определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком функции нечётное количество общих точек.

### Модуль «Геометрия»

23. Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $60^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD = 24$ .

24. В равностороннем треугольнике  $ABC$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно. Докажите, что  $BMKN$  — ромб.

25. Окружность радиуса 4 касается внешним образом второй окружности в точке  $B$ . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку  $B$ , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке  $A$ . Найдите радиус второй окружности, если  $AB = 6$ .

## Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

## Тренировочный вариант №348

## Уровень 2

## Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

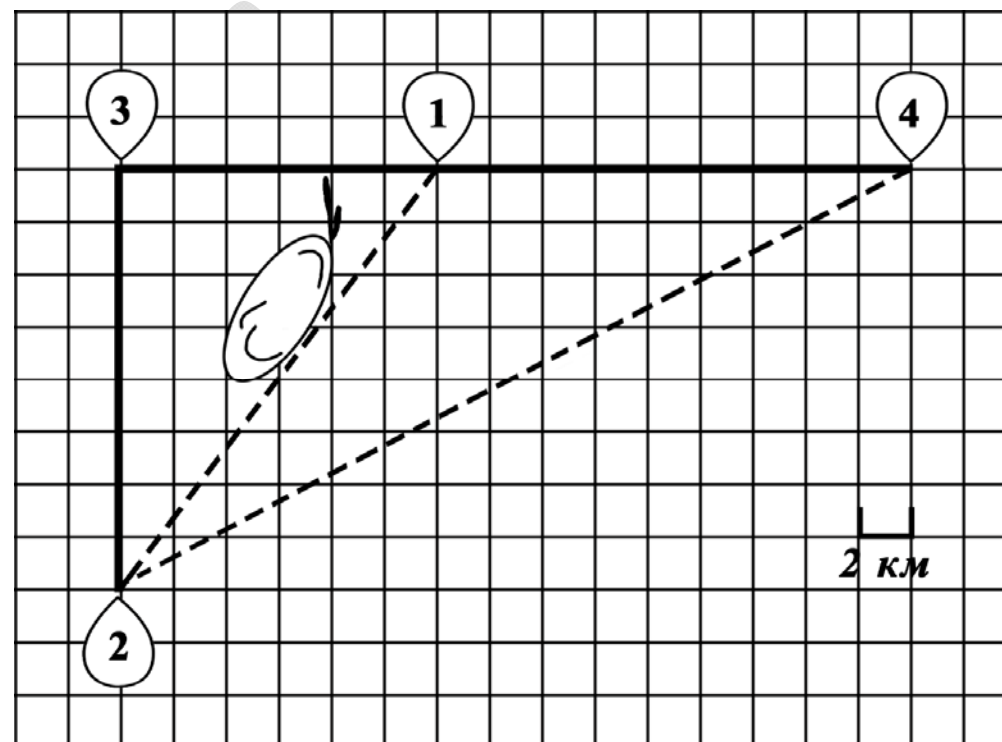
**Желаем успеха!**

## Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

## Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



На плане (см. рис. выше) изображено взаимное расположение населённых пунктов.

Длина стороны каждой клетки на плане соответствует 2 км.

Серёжа летом отдыхает с папой в деревне Пирожки. В среду они собираются съездить

на машине в село Княжеское. Из деревни Пирожки в село Княжеское можно проехать по прямой грунтовой дороге. Есть более длинный путь по прямолинейному шоссе через деревню Васильево до деревни Рябиновки, где нужно повернуть под прямым углом налево на другое шоссе, ведущее в село Княжеское. Есть и третий маршрут: в деревне Васильево можно свернуть на прямую грунтовую дорогу и село Княжеское, которая идёт мимо пруда.

Шоссе и грунтовые дороги образуют прямоугольные треугольники.

По шоссе Серёжа с папой едут со скоростью 60 км/ч, а по грунтовой дороге – со скоростью 40 км/ч.

**1.** Пользуясь описанием, определите, какими цифрами на плане обозначены населённые пункты. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность трёх цифр без пробелов, запятых и других разделительных символов.

Населённые пункты	д. Пирожки	с. Княжеское	д. Рябиновка
Цифры			

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.** Сколько километров проедут Серёжа с папой от деревни Пирожки до села Княжеское, если они поедут по шоссе через деревню Рябиновку?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.** Найдите расстояние (в км) от деревни Васильево до села Княжеское по прямой.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.** Сколько минут Серёжа с папой затратят на дорогу из деревни пирожки в село Княжеское, если они поедут по прямой грунтовой дороге?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.** В таблице (см. ниже) указана стоимость в рублях некоторых товаров в четырёх магазинах, расположенных в населённых пунктах Пирожки, Княжеское, Васильево и Рябиновка.

Серёжа с папой хотят купить 2 л молока, 3 батона хлеба и 1 кг сыра. В каком магазине такой набор товаров будет стоить дешевле всего? В ответе укажите стоимость данного набора товаров в выбранном магазине в рублях.

Наименование продукта	д. Пирожки	с. Княжеское	д. Васильево	д. Рябиновка
Молоко (1 л)	48	45	50	52
Хлеб (1 батон)	34	32	33	28
Сыр «Российский»	240	280	270	260
Говядина (1 кг)	370	400	380	420
Картофель (1 кг)	22	16	28	30

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.** Найдите  $\operatorname{tg}^2 \alpha$ , если  $5 \sin^2 \alpha + 13 \cos^2 \alpha = 10$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.** Пусть  $a, b, c$  – вещественные положительные числа. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$\frac{ab}{a^2 + 3b^2} + \frac{bc}{b^2 + 3c^2} + \frac{ca}{c^2 + 3a^2}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

- 1)  $\frac{5}{4}$                       2) 1                      3)  $\frac{3}{4}$                       4)  $\frac{1}{2}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.** Найдите значение выражения  $\frac{a^{\frac{1}{2}} + ab^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}} - \frac{a}{\sqrt[3]{b}}$  при  $a = 64$  и  $b = 5$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.** Решите в действительных числах уравнение (здесь  $\sqrt[7]{-128} = -2$ ):

$$\sqrt[7]{(x-4)^3} - \sqrt[7]{(4-x)^{-3}} = \frac{65}{8}.$$

В ответе запишите значение выражения  $-128x_1 + 4x_2$ , где  $x_i$  – корни этого уравнения, причём  $x_i < x_{i+1}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.** Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2000?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.** На множестве вещественных чисел  $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$  задана функция  $f(x)$ . На множестве вещественных чисел  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$  задана функция

$g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ . Также известно, что эти функции при любых вещественных значениях

$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 3) \cup (3; +\infty)$  удовлетворяют уравнению:

$$g(f(x)) = \frac{2x+1}{x-3}.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции  $f(x)$  и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А)  $f(-5)$                       Б)  $f(0)$                       В)  $f(2)$

1)  $-17$                       2)  $\frac{1}{2}$                       3)  $-\frac{2}{3}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.** Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле  $P = I^2 R$ , где  $I$  – сила тока (в амперах),  $R$  – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите  $R$  (в омах), если  $P = 541,5$  Вт и  $I = 9,5$  А.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**13.** Решите в вещественных числах неравенство (здесь  $\sqrt{\alpha}$  – арифметический квадратный корень из  $\alpha$ ):

$$\frac{1}{\sqrt{x+9}} \cdot \left( \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 13}{x^2 + 4x + 7} + \frac{1}{x+12} \right) \leq 1.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1)  $x \in (-\infty; +\infty)$

2)  $x \in \left( -9; \frac{\sqrt{29}-3}{2} \right]$

3)  $x \in \left[ -\infty; \frac{\sqrt{29}-3}{2} \right]$

4)  $x \in \left[ \frac{\sqrt{29}-3}{2}; +\infty \right)$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**14.** В лесу живут белки, каждая из которых, придя на опушку, съедает 10 орехов. В первый день на опушку пришли 6 белок. В каждый следующий на опушку приходило на две белки больше. Сколько орехов съели белки за 30 дней?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Модуль «Геометрия»**

**15.** Основание треугольника равно  $36\sqrt{2}$ . Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**16.** На окружности даны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причём точка  $B$  более удалена от прямой  $l$ , касающейся окружности в точке  $A$ , чем  $C$ . Прямая  $AC$  пересекает прямую, проведенную через точку  $B$  параллельно  $l$ , в точке  $D$ . Найдите значение выражения  $\frac{AB^2}{AC \cdot AD}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**17.** Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника  $ABCD$  равные хорды. Найдите значение выражения  $AB - BC + CD - DA$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**18.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $M$  и  $N$ , что  $CM = MN = NB$ . К стороне  $BC$  в точке  $N$  восстановлен перпендикуляр, пересекающий сторону  $AB$  в точке  $K$ . Оказалось, что площадь треугольника  $AMK$  в 4,5 раза меньше площади исходного треугольника. Найдите значение выражения  $\frac{AB}{AC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**19.** Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме  $90^\circ$ , то эти две прямые параллельны.
- 2) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.
- 3) Равнобедренный треугольник не имеет центра симметрии.
- 4) Равнобедренный треугольник не имеет осей симметрии.

Ответ: \_\_\_\_\_.



## Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

**20.** Решите в вещественных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} (2x+1)^2 - 4y = 5 \\ (2y+1)^2 - 4z = 5 \\ (2z+1)^2 - 4x = 5 \end{cases}$$

**21.** На доске написали 100 попарно различных целых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Затем под каждым числом  $a_i$  написали число  $b_i$ , полученное прибавлением к  $a_i$  наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наибольшее количество попарно различных чисел может быть среди  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ ?

**22.** Найдите все вещественные значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество вещественных решений неравенства:

$$(a-x^2)(a+x-2) < 0$$

не содержит ни одного решения из отрезка  $x \in [-1, 1]$ .

Модуль «Геометрия»

**23.** Рассматриваются внешние углы многоугольника, прилежащие к внутренним углам, градусные меры которых меньше  $180^\circ$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы градусных мер рассматриваемых внешних углов.

**24.** Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

**25.** Дан вписанный в окружность  $\omega$  остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором проведена высота  $AH$ . На окружности  $\omega$  отмечена точка  $D$ , диаметрально противоположная точке  $A$ . Пусть  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите значение выражения  $\frac{\angle BIH}{\angle DIC}$ .

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	3412	4	297	1,4	38	0,1807	1	18	19	0,5	1342	12	4	4097	105	14	1	4	23	1	8	$\{-7; -19/16\}$	$8\sqrt{6}$	-	9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	423	46	20	51	438	0?6	3	32	15	32	123	6	2	10500	36	1	0	1	3	$(-1,-1,-1)$ $(1,1,1)$	100	$(-\infty;0],[3;\infty)$	360	-	1