Ответы: ЕГЭ по Математике (профиль)

1	31
2	40
3	1764
4	0,25
5	0,03
6	7
7	1
8	-1
9	30
10	33
11	9
12	-1
13	

Решение.
а) Перейдём к системе

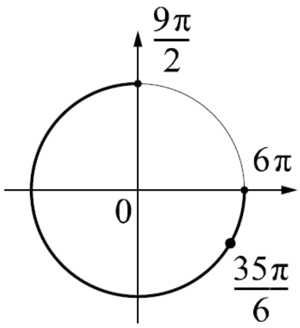
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{3} = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение

$$\left(\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,$$

Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда с учётом второго неравенства системы получим $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.



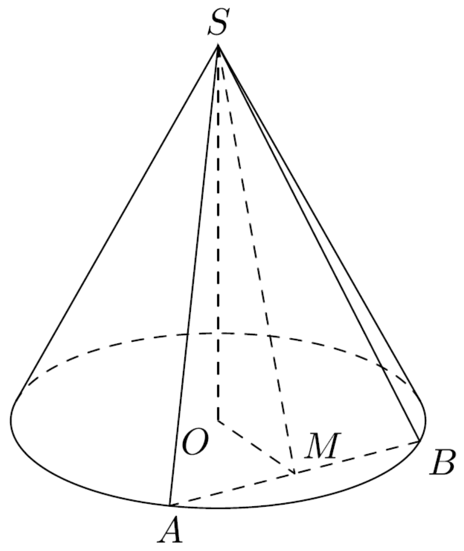
Получим число $\frac{35\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{35\pi}{6}$.

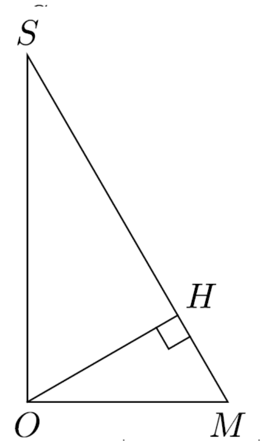
14

Решение.

а) Пусть S — вершина конуса, O — центр основания, A и B — точки пересечения плоскости α с окружностью основания, M — середина хорды AB. По условию $\angle AOB = 60°$, поэтому $\angle AOM = \angle BOM = 30°$, $OM = \frac{OA \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Угол SMO — линейный угол двугранного угла, образованный плоскостью α и плоскостью основания. В прямоугольном треугольнике SMO зная катеты $SO = 4$, $OM = 4\sqrt{3}$, найдём $\operatorname{tg}\angle SMO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то есть $\angle SMO = 30°$.



б) Плоскости SMO и ASB перпендикулярны, поэтому искомое расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно высоте OH прямоугольного треугольника SMO. Так как $\angle SMO = 30°$, то $SM = 2SO = 8$, поэтому $OH = \frac{SO \cdot OM}{SM} = 2\sqrt{3}$.



Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

15

Решение.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2:

$$x + \frac{1}{x}\log_2 27 < \log_2 24; \quad \frac{x^2 - x\log_2 24 + \log_2 27}{x} < 0;$$

$$\frac{x^2 - (3 + \log_2 3)x + 3\log_2 3}{x} < 0; \quad \frac{(x-3)(x - \log_2 3)}{x} < 0,$$

откуда $x < 0$ или $\log_2 3 < x < 3$.

Ответ: $(-\infty; 0)$; $(\log_2 3; 3)$.

16

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{14S}{15};\ldots;\frac{2S}{15};\ \frac{S}{15};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $3\,\%$, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03S;\ 1{,}03\cdot\frac{14S}{15};\ldots;1{,}03\cdot\frac{2S}{15};\ 1{,}03\cdot\frac{S}{15}.$$

Таким образом, платежи должны быть следующими:

$$0{,}03S+\frac{S}{15};\ \frac{14\cdot 0{,}03S+S}{15};\ldots;\frac{2\cdot 0{,}03S+S}{15};\ \frac{0{,}03S+S}{15}.$$

Восьмой платёж составит $\dfrac{8\cdot 0{,}03\cdot S+S}{15}=\dfrac{1{,}24S}{15}$.

Сумма всех платежей равна:

$$S+S\cdot 0{,}03\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\left(1+\frac{16\cdot 0{,}03}{2}\right)=1{,}24S.$$

Значит, банку будет выплачено $74\,400\cdot 15=1\,116\,000$ рублей.

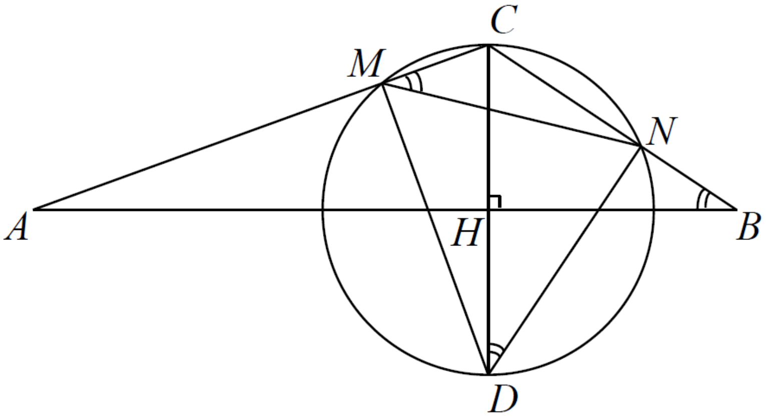
Ответ: 1 116 000 рублей.

17

Решение.

а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN = 180^\circ - \angle MCN = 180^\circ - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA.$$



б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C, поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит, $\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Положим

$$CN = 2a,\ NB = a,\ MA = 25b,\ CM = 2b.$$

Тогда $\frac{2a}{27b} = \frac{2b}{3a}$, следовательно, $\frac{a}{b} = 3$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен

$$\frac{CN}{AC} = \frac{2a}{27b} = \frac{2}{9}.$$

Следовательно, $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{2}{9}$.

Ответ: б) 2:9.

18

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $-x^2-2x+3\geq 0$.

Выделим в левой части полный квадрат:

$$x^2-2x\cdot\frac{a\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+\frac{a^2\left(3-2x-x^2\right)}{4}-\frac{a^2\left(3-2x-x^2\right)}{4}+a^2=0,$$

откуда следует, что

$$\left(x-\frac{a\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right)^2=-\frac{a^2(x+1)^2}{4}.$$

Равенство возможно, только если обе части равны нулю, откуда следует, что $x=-1$ или $a=0$.

1. Пусть $x=-1$. Получается уравнение $-1-a=0$, которое имеет единственное решение $a=-1$. Следовательно, при $a=-1$ уравнение имеет решение $x=-1$.

2. Если $x\neq -1$, то $a=0$. Получаем уравнение $x^2=0$, которое имеет решение $x=0$.

Ответ: $a=-1$ или $a=0$.

19

Решение.

а) Да, например, последовательность 0, 5, 10, 15, 20, 25.

б) Предположим, что такая последовательность существует.

Запишем неравенство $a_{k+2} < 3a_{k+1} - 2a_k$ в виде $a_{k+2} - a_{k+1} < 2(a_{k+1} - a_k)$ при всех натуральных $k \le 4$. Отсюда получаем, что

$0 = 2(a_4 - a_1) = 2(a_4 - a_3) + 2(a_3 - a_2) + 2(a_2 - a_1) > 2(a_4 - a_3) + 2(a_3 - a_2) +$

$+a_3 - a_2 > 2(a_4 - a_3) + 3(a_3 - a_2) > 3\frac{1}{2}(a_4 - a_3)$.

Следовательно,

$0 > a_4 - a_3 > 2(a_4 - a_3) > a_5 - a_4 > 2(a_5 - a_4) > a_6 - a_5$, тогда

$a_6 - a_4 = (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) < 0$.

Пришли к противоречию с условием $a_6 = a_4$.

в) Рассмотрим произвольную такую последовательность. Тогда, как и ранее, $a_{k+2} - a_{k+1} < 2(a_{k+1} - a_k)$ при всех натуральных $k \le 4$. Поскольку все члены данной последовательности целые числа, разности $a_{k+2} - a_{k+1}$ и $a_{k+1} - a_k$ также являются целыми числами. Отсюда получаем, что $a_{k+2} - a_{k+1} \le 2(a_{k+1} - a_k) - 1$ при всех $1 \le k \le 4$.

Получаем: $a_2 - a_1 = a_2 - 0 = a_2$; $a_3 - a_2 \le 2(a_2 - a_1) - 1 = 2a_2 - 1$;

$a_4 - a_3 \le 2(a_3 - a_2) - 1 \le 4a_2 - 3$; $a_5 - a_4 \le 2(a_4 - a_3) - 1 \le 8a_2 - 7$

и $a_6 - a_5 \le 2(a_5 - a_4) - 1 \le 16a_2 - 15$.

Поэтому $900 = a_6 = (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + a_2 \le 31a_2 - 26$.

Следовательно, $a_2 \ge \frac{900 + 26}{31} > 29$; $a_2 \ge 30$.

В последовательности 0, 30, $3 \cdot 30 - 1$, $7 \cdot 30 - 4$, $15 \cdot 30 - 11$, 900 a_2 равно 30.

Ответ: а) да; б) нет; в) 30.