Ответы: ЕГЭ по Математике (профиль)

1	169
2	5
3	4
4	0,25
5	0,98
6	-19
7	-1
8	-4
9	0,3
10	240
11	-0.2
12	18
13	

Решение.

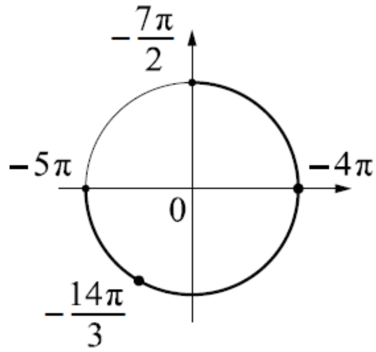
а) Преобразуем уравнение: $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}-2=0$.

Пусть $y=\frac{1}{\cos x}$. Получаем

$$y^2+y-2=0\text{, следовательно, } y=1 \text{ или } y=-2.$$

Значит, $\frac{1}{\cos x}=1$, то есть $\cos x=1$, откуда следует, что $x=2\pi k$, $k\in$ Z, или $\frac{1}{\cos x}=-2$, то есть $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in$ Z, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in$ Z.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.



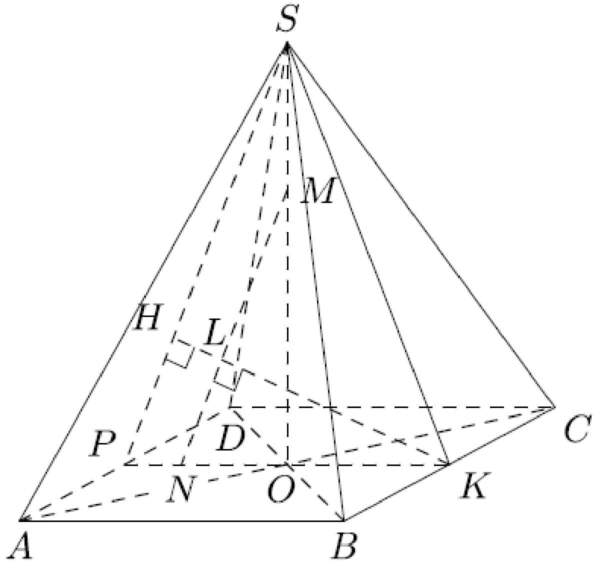
Получаем: $-\frac{14\pi}{3}$; -4π.

Ответ: а) $2\pi k$, $k\in$ Z; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in$ Z; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in$ Z; б) $-\frac{14\pi}{3}$; -4π.

14

Решение.

а) Пусть K и P — середины рёбер BC и AD соответственно (см. рисунок). Плоскость SPO пересекает параллельные плоскости α и ADS по параллельным прямым SP и MN, где N — такая точка на отрезке OP, что $ON:NP=2:1$. Значит, $PN=\frac{1}{3}OP=\frac{1}{6}PK$, т. е. $KN:KP=5:6$.



Плоскость ADS параллельна прямой BC и проходит через прямую AS, поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми BC и AS равно расстоянию от прямой BC до плоскости ADS.

В треугольнике PKS проведём высоту KH. Так как прямая KH перпендикулярна прямым SP и AD, лежащим в плоскости ADS, она перпендикулярна плоскости ADS. Значит, расстояние между прямыми BC и AS равно KH.

Пусть KH пересекает прямую MN в точке L. Прямая KH перпендикулярна плоскости ADS и перпендикулярна параллельной ей плоскости α. Прямая BC параллельна плоскости ADS и параллельна плоскости α. Тогда расстояние от прямой BC до плоскости α равно KL. Из подобия треугольников KPH и KNL следует, что $KL:KH=KN:KP=5:6$.

б) Найдём высоту SP треугольника ADS: $SP=\frac{18\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

Из треугольника SOP по теореме Пифагора находим, что $SO=\sqrt{SP^2-PO^2}=9\sqrt{2}$.

Найдём высоту KH треугольника SPK: $KH=\frac{SO\cdot PK}{SP}=\frac{9\sqrt{2}\cdot 18}{9\sqrt{3}}=6\sqrt{6}$.

Следовательно, $KL=\frac{5}{6}KH=\frac{5\cdot 6\sqrt{6}}{6}=5\sqrt{6}$.

Ответ: б) $5\sqrt{6}$.

15

Решение.

Преобразуем неравенство

$$\frac{3^{3x}-1}{3^x-1}+\frac{12}{9^x+3^x+1}\le 8;\quad \frac{\left(3^x-1\right)\left(9^x+3^x+1\right)}{3^x-1}+\frac{12}{9^x+3^x+1}-8\le 0.$$

При $x\ne 0$

$$9^x+3^x+1+\frac{12}{9^x+3^x+1}-8\le 0.$$

Пусть $y=9^x+3^x+1$, $y>0$. Тогда

$$y+\frac{12}{y}\le 8;\quad \frac{y^2-8y+12}{y}\le 0;\quad 2\le y\le 6.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases}2\le 9^x+3^x+1\le 6,\\ x\ne 0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\log_3\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\le x<0\\ 0<x\le\log_3\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\log_3\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\,0\right)\cup\left(0;\,\log_3\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}\right]$.

16

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{10S}{11};\ldots;\frac{2S}{11};\ \frac{S}{11};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $5\,\%$, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}05S;\ 1{,}05\cdot\frac{10S}{11};\ldots;1{,}05\cdot\frac{2S}{11};\ 1{,}05\cdot\frac{S}{11}.$$

Таким образом, платежи должны быть следующими:

$$0{,}05S+\frac{S}{11};\ \frac{10\cdot 0{,}05S+S}{11};\ldots;\frac{2\cdot 0{,}05S+S}{11};\ \frac{0{,}05S+S}{11}.$$

Шестой платёж составит $\dfrac{6\cdot 0{,}05\cdot S+S}{11}=\dfrac{1{,}3S}{11}$.

Сумма всех платежей равна:

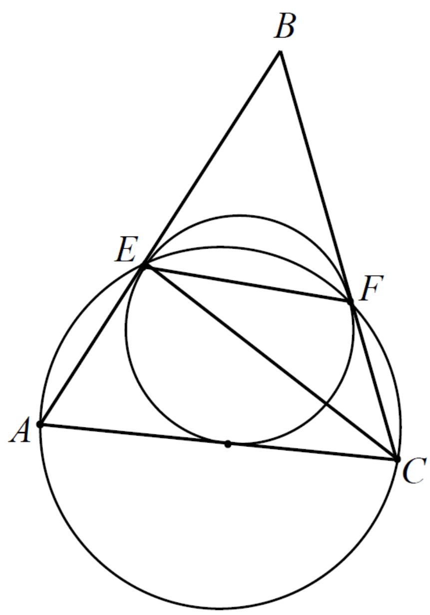
$$S+S\cdot 0{,}05\left(1+\frac{10}{11}+\ldots+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)=S\left(1+\frac{12\cdot 0{,}05}{2}\right)=1{,}3S.$$

Значит, банку будет выплачено $65\,000\cdot 11=715\,000$ рублей.

Ответ: 715 000 рублей.

17

Решение.



а) Поскольку $EB = BF$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, треугольник EBF равнобедренный. Значит, $\angle BEF = \angle BFE$, а потому равны и смежные с ними углы: $\angle AEF = \angle CFE$. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$, поэтому $\angle BAC = 180° - \angle CFE = 180° - \angle AEF = \angle BCA$, то есть треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

б) В треугольнике ABC известны стороны $AB = BC = 5$ и $AC = 2$. Прямая EF параллельна прямой AC. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки, $AE = CF = \frac{1}{2}AC = 1$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\cos\alpha = \frac{AC}{2 \cdot AB} = \frac{1}{5}$ и $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Радиус описанной около трапеции $AEFC$ окружности найдём из треугольника AEC по теореме синусов: $R = \frac{EC}{2\sin\alpha}$. Длину EC найдём по теореме косинусов: $EC = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\alpha} = \sqrt{\frac{21}{5}}$. Таким образом, $R = \sqrt{\frac{21}{5}} : \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{4\sqrt{2}}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{70}}{8}$.

18

Решение.

Пусть $t=|x+2|+|x-a|$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-4t+3a(4-3a)=0$. Решения этого уравнения имеют вид $t=3a$ или $t=4-3a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ или $|x+2|+|x-a|=4-3a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $|x+2|+|x-a|=b$ в зависимости от a и b. Рассмотрим функцию $f(x)=|x+2|+|x-a|$. При $a\neq-2$ графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны -2, 0 и 2. Минимальное значение достигается на отрезке с концами -2 и a и равно $|a+2|$. Таким образом, уравнение $|x+2|+|x-a|=b$ имеет два решения при $b>|a+2|$, бесконечно много решений при $b=|a+2|$ и не имеет решений при $b<|a+2|$.

В случае $a=-2$ уравнение $2|x+2|=b$ имеет два решения при $b>0$, одно решение при $b=0$ и не имеет решений при $b<0$.

Уравнения $|x+2|+|x-a|=3a$ и $|x+2|+|x-a|=4-3a$ могут иметь общие решения при $3a=4-3a$, то есть при $a=\frac{2}{3}$. При $a=\frac{2}{3}$ оба уравнения принимают вид $|x+2|+\left|x-\frac{2}{3}\right|=2$ и не имеют решений.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ и $|x+2|+|x-a|=4-3a$ не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству $(3a-|a+2|)(4-3a-|a+2|)<0$. При $a\le-2$ неравенство принимает вид $(4a+2)(6-2a)<0$ и выполняется при любом $a\le-2$. При $a>-2$ неравенство принимает вид $(2a-2)(2-4a)<0$, откуда с учётом условия $a>-2$ получаем $-2<a<\frac{1}{2}$; $a>1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<\frac{1}{2}$ и $a>1$.

Ответ: $a<\frac{1}{2}$; $a>1$.

19

Решение.

а) Пусть первоначально на доске было 14 чисел, равных 7, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно $\frac{14\cdot 7+1}{15}=6{,}6$. Пусть число, равное 1, уменьшилось на 1 (после чего было стёрто с доски), а остальные числа не изменились. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{14\cdot 7}{14}=7$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$, где n — количество чисел, которые были уменьшены на 1, но не были стёрты с доски. По условию $\frac{S+k}{15}=25$, то есть $S=375-k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S-n}{15-k}=32$, тогда получим $\frac{375-k-n}{15-k}=32$. Из этого равенства находим $31k=105+n$. Число n лежит в пределах от 0 до 15, поэтому $105+n$ лежит в пределах от 105 до 120. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 31.

в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$. По условию $\frac{S+k}{15}=25$, то есть $S=375-k$. Необходимо найти наибольшее возможное значение числа $A=\frac{S-n}{15-k}$. Имеем

$$A=\frac{S-n}{15-k}=\frac{375-k-n}{15-k}\le\frac{375-k}{15-k}=1+\frac{360}{15-k}.$$

Число A будет наибольшим, если $n=0$ и число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 30 и на доске осталось $15-k$ чисел, для суммы S выполняется неравенство

$$375-k=S\le 30(15-k),$$

откуда следует, что

$$375-k\le 30(15-k);\quad 29k\le 75;\quad k\le\frac{75}{29}<3;\quad k\le 2.$$

Значит,

$$A\le 1+\frac{360}{15-k}\le 1+\frac{360}{13}=28\frac{9}{13}.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным $28\frac{9}{13}$. Пусть первоначально на доске было написано 2 единицы, 12 чисел, равных 30, и одно число, равное 13. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{2+12\cdot 30+13}{15}=25$.

Пусть 2 числа, равные единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{12\cdot 30+13}{13}=28\frac{9}{13}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $28\frac{9}{13}$.