

Ответы: ЕГЭ по математике (профиль)

1 24

2 -9

3 42

4 0.99

5 0,17

6 4

7 5

8 4

9 18

10 17

11 38

12 -5

13

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

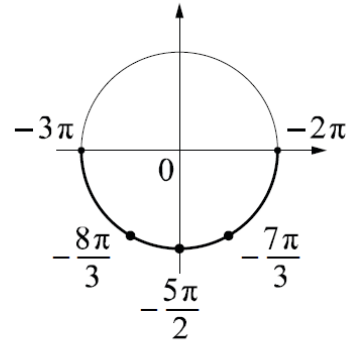
$$4\cos^3 x - \cos x = 0; \quad \cos x \cdot (4\cos^2 x - 1) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos^2 x = \frac{1}{4}$,

$\cos x = \pm \frac{1}{2}$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Получим числа $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

14

Решение

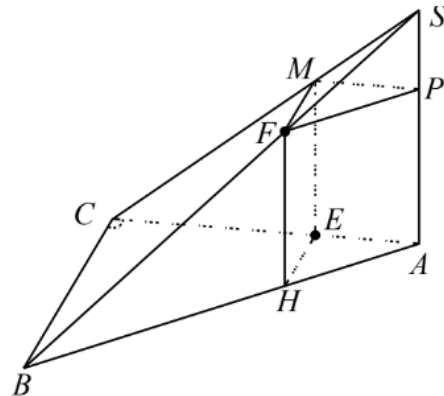
а) Прямые EH и BC параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны прямой AC . Поэтому треугольники AEH и ACB подобны по двум углам, $EH = \frac{2}{5}BC$, $AE = \frac{2}{5}AC$.

Плоскость α проходит через прямую EH , параллельную прямой BC . Поэтому линия пересечения плоскостей α и BSC параллельна прямой BC . Следовательно, треугольники BSC и FSM подобны по двум углам, $FM = \frac{2}{5}BC$, $SM = \frac{2}{5}SC$.

Таким образом, отрезки FM и EH равны и лежат на параллельных прямых. Следовательно, $EHFM$ — параллелограмм.

Прямая EH перпендикулярна прямой AC и лежит в плоскости ABC , перпендикулярной плоскости CSA , поэтому прямая EH перпендикулярна плоскости CSA , значит, отрезок ME перпендикулярен отрезку EH .

Таким образом, в параллелограмме $EHFM$ угол MEH прямой, поэтому параллелограмм является прямоугольником.



б) Плоскость α делит пирамиду на два пятигранника $SFMAHE$ и $BCMEHF$. Пятигранник $SFMAHE$ можно разбить на пирамиду $SFMP$ и призму $FMPHEA$, где P — точка пересечения плоскости FMP , параллельной плоскости ABC , с ребром SA .

Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $SA = h$. Тогда:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{6} abh = 125;$$

$$V_{SMFP} = \frac{1}{3} \cdot SP \cdot \frac{1}{2} \cdot MP \cdot MF = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} b \cdot \frac{2}{5} a = \frac{8abh}{125 \cdot 6};$$

$$V_{FMPHEA} = PA \cdot \frac{1}{2} \cdot MP \cdot MF = \frac{3}{5} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} b \cdot \frac{2}{5} a = \frac{6abh}{125}.$$

Следовательно, объём пятигранника $SFMAHE$:

$$V_{SFMAHE} = V_{SMFP} + V_{FMPHEA} = \frac{8abh}{125 \cdot 6} + \frac{6abh}{125} = \frac{44abh}{125 \cdot 6}.$$

Объём пятигранника $BCMEHF$ равен разности объёмов пирамиды $SABC$ и пятигранника $SFMAHE$:

$$V_{BCMEHF} = V_{SABC} - V_{SFMAHE} = \frac{abh}{6} - \frac{44abh}{125 \cdot 6} = \frac{81}{125} \cdot \frac{abh}{6} = 81.$$

Ответ: б) 81.

15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x^3 + 3x^2 + \frac{12x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-3)}{x-5} \leq 0,$$

следовательно, $x \leq -1$, $x = 0$ или $3 \leq x < 5$.

Ответ: $(-\infty; -1]; 0; [3; 5)$.

16

Решение.

Пусть сумма кредита равна S млн рублей. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S; \frac{8S}{9}; \dots; \frac{8S}{9}; \frac{S}{9}; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,04S; 1,04 \cdot \frac{8S}{9}; \dots; 1,04 \cdot \frac{2S}{9}; 1,04 \cdot \frac{S}{9}.$$

Следовательно, платежи должны быть следующими:

$$0,04S + \frac{S}{9}; \frac{8 \cdot 0,04S + S}{9}; \dots; \frac{2 \cdot 0,04S + S}{9}; \frac{0,04S + S}{9}.$$

Сумма всех платежей равна:

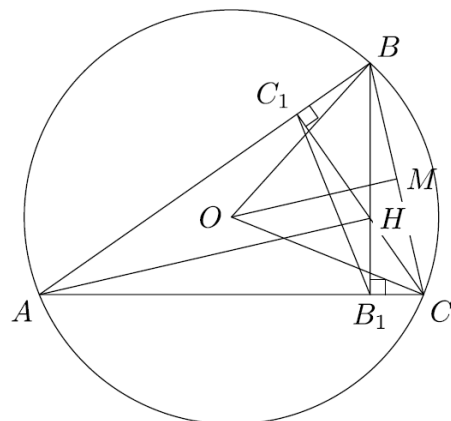
$$S + S \cdot 0,04 \left(1 + \frac{8}{9} + \dots + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) = S \left(1 + \frac{10 \cdot 0,04}{2} \right) = 1,2S.$$

Сумма всех платежей равна 4 млн рублей, следовательно, $1,2S = 3,6$; $S = 3$ млн рублей. Значит, сумма, взятая в кредит, равна 3 млн рублей.

Ответ: 3 млн рублей.

Решение.

а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы HB_1C_1 и HAC_1 опираются на одну дугу, следовательно, они равны, а значит, $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.



б) В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем

$$AB_1 = AB \cdot \cos \angle BAB_1 = AB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем

$$AC_1 = AC \cdot \cos \angle CAC_1 = AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AC.$$

Получаем, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$,

следовательно, они подобны. Тогда $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Значит,

$$BC = \frac{2B_1C_1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{2}.$$

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , M — середина стороны BC . Тогда расстояние от точки O до стороны BC равно длине отрезка OM . Треугольник BOC равнобедренный, следовательно,

$$\angle COM = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BAC = 30^\circ.$$

В прямоугольном треугольнике OMC имеем

$$OM = MC \cdot \operatorname{ctg} \angle MOC = \frac{BC}{2} \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{10\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{6}$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y = f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15}$. Её областью

определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При x стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$ значение функции $f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15}$

стремится к 0. Учитывая поведение функции на $+\infty$ и $-\infty$ и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок $[0; 1]$, оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений a , для которых имеют решения уравнения

$$f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 0 \text{ и } f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 1.$$

Первое уравнение:

$$\frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 0; \quad 6(a-6)x = 6a, \quad x = \frac{a}{a-6}.$$

Уравнение имеет решение при любом $a \neq 6$.

Второе уравнение:

$$\frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 1; \quad 9x^2 + 12(a-3)x + a^2 - 6a + 15 = 0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = 144(a-3)^2 - 36(a^2 - 6a + 15) \geq 0;$$

$$36(4a^2 - 24a + 36 - a^2 + 6a - 15) \geq 0;$$

$$108(a^2 - 6a + 7) \geq 0;$$

$$(a - 3 + \sqrt{2})(a - 3 - \sqrt{2}) \geq 0.$$

Решением этого неравенства являются множества $(-\infty; 3 - \sqrt{2}]$ и $[3 + \sqrt{2}; +\infty)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a \in (-\infty; 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}; 6) \cup (6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3 - \sqrt{2}]$, $[3 + \sqrt{2}; 6)$, $(6; +\infty)$.

Решение.

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 31, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,305 до 0,315. Поскольку всего проголосовало 13 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $13 \cdot 0,305 = 3,965$, но меньше $13 \cdot 0,315 = 4,095$, то есть равно 4. После того как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{4}{14} = 0,285\dots$ Значит, его рейтинг

стал равен 29.

б) Пусть за 145 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 55, всего 200 голосов. В этом случае 145 футболистов имеют рейтинг 1, а последний — 28; сумма рейтингов равна 173. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 28, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 28, то есть уменьшится на 145.

в) Заметим, что для каждого из 146 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0,5 \cdot 146 = 73$. В частности, эта сумма не может превосходить 173.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 173. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 173.

Ответ: а) 29; б) да; в) 173.