

Ответы: ЕГЭ по математике (профиль)

1 20

2 8

3 30

4 0.039

5 0,3

6 -11

7 1

8 3

9 1,2

10 22

11 34

12 -5

13

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 x = 3, \\ \sin x \neq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда следует, что } \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \text{ или } \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \text{ при условии}$$

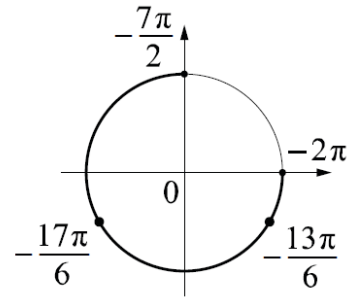
$$\sin x \neq \frac{1}{2}.$$

Получаем $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

с помощью единичной окружности.

Получим числа $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

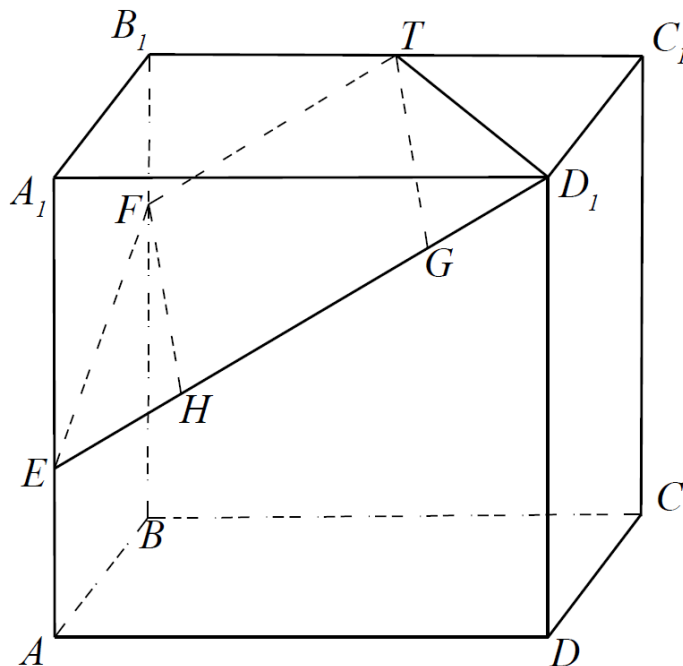


Ответ: а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

14

Решение.

а) Так как $B_1F : FB = 1:6$ и $BB_1 = 14$, получаем, что $B_1F = 2$ и $FB = 12$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и CBB_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро AA_1 в такой точке E , что прямая ED_1 параллельна прямой FT . Значит, треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, а поскольку $FB_1 = 2$, $B_1T = 6$, получаем, что и $EA_1 : A_1D_1 = 1:3$. Значит, $EA_1 = 4$ и $A_1E : EA = 2:5$.



б) Трапеция ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = \sqrt{EA_1^2 + A_1D_1^2} = 4\sqrt{10},$$

$$FT = \sqrt{FB_1^2 + B_1T^2} = 2\sqrt{10},$$

$$D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 6\sqrt{3},$$

$$EF = \sqrt{A_1B_1^2 + (EA_1 - FB_1)^2} = 2\sqrt{19}.$$

Опустим перпендикуляры FH и TG на сторону ED_1 . Пусть $EH = x$, тогда

$GD_1 = 2\sqrt{10} - x$. Найдём x из уравнения $TD_1^2 - GD_1^2 = FE^2 - HE^2$, тогда

$$x = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Найдём высоту трапеции: } FH = \sqrt{EF^2 - EH^2} = 6\sqrt{\frac{21}{10}}.$$

$$\text{Площадь трапеции равна } 6\sqrt{\frac{21}{10}} \cdot \frac{4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}}{2} = 18\sqrt{21}.$$

Ответ: б) $18\sqrt{21}$.

15

Решение.

Разложим левую часть неравенства на множители:

$$2^x (7^x - 2)(7^x - 5^x) \geq 0.$$

Учитывая, что $2^x > 0$ при всех x , получаем:

$$\begin{cases} 7^x - 2 \geq 0, \\ 7^x - 5^x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7^x - 2 \leq 0, \\ 7^x - 5^x \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \log_7 2, \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq \log_7 2, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

откуда $x \leq 0$, $x \geq \log_7 2$.

Ответ: $x \leq 0$, $x \geq \log_7 2$.

16

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S; \frac{10S}{11}; \dots; \frac{2S}{11}; \frac{S}{11}; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,05S; 1,05 \cdot \frac{10S}{11}; \dots; 1,05 \cdot \frac{2S}{11}; 1,05 \cdot \frac{S}{11}.$$

Таким образом, платежи должны быть следующими:

$$0,05S + \frac{S}{11}; \frac{10 \cdot 0,05S + S}{11}; \dots; \frac{2 \cdot 0,05S + S}{11}; \frac{0,05S + S}{11}.$$

Шестой платёж составит $\frac{6 \cdot 0,05 \cdot S + S}{11} = \frac{1,3S}{11}.$

Сумма всех платежей равна:

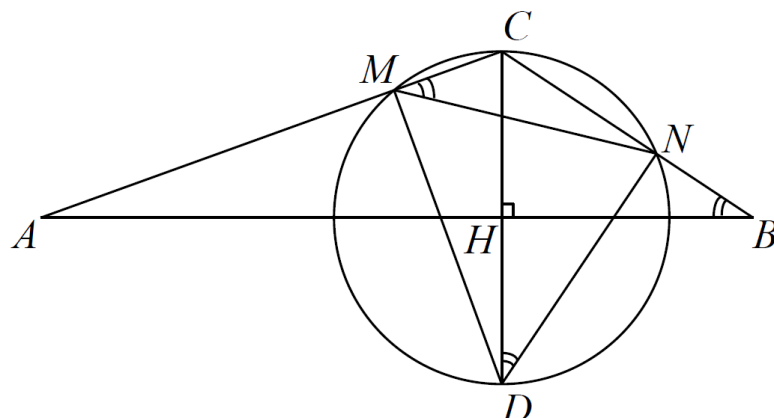
$$S + S \cdot 0,05 \left(1 + \frac{10}{11} + \dots + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} \right) = S \left(1 + \frac{12 \cdot 0,05}{2} \right) = 1,3S.$$

Значит, банку будет выплачено $65\,000 \cdot 11 = 715\,000$ рублей.

Ответ: 715 000 рублей.

Решение.

- а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому
 $\angle MDN = 180^\circ - \angle MCN = 180^\circ - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA$.



- б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C , поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит,
 $\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Положим

$$CN = 5a, NB = 3a, MA = 27b, CM = 5b.$$

Тогда $\frac{5a}{32b} = \frac{5b}{8a}$, следовательно, $\frac{a}{b} = 2$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен

$$\frac{CN}{AC} = \frac{5a}{32b} = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{5}{16}$.

Ответ: б) 5:16.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a^{4\sin x} - a^{2\sin x} - 6 = 0. \end{cases}$$

Пусть $a^{2\sin x} = t$, $t > 0$.

Поскольку $-1 \leq \cos x \leq 1$, для $t = (a^2)^{\cos x}$ получаем: $a^2 \leq t \leq \frac{1}{a^2}$ при $0 < a < 1$ и

$\frac{1}{a^2} \leq t \leq a^2$ при $a > 1$.

Тогда уравнение принимает вид $t^2 - t - 6 = 0$. Оно имеет корни $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$. Поскольку $t > 0$, корень $t_1 = -2$ исключаем.

При $0 < a < 1$ должно выполняться условие $a^2 \leq 3 \leq \frac{1}{a^2}$, получим:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^2 \leq 3, \\ \frac{1}{a^2} \geq 3, \end{cases}$$

откуда $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

При $a > 1$ должно выполняться условие $\frac{1}{a^2} \leq 3 \leq a^2$, получим:

$$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 \geq 3, \\ \frac{1}{a^2} \leq 3 \end{cases}$$

откуда $a \geq \sqrt{3}$.

При $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$; $a \geq \sqrt{3}$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$; $a \geq \sqrt{3}$.

Решение.

а) Такое число существует. Например, при $n = 14$ имеем $S(n) = 5$ и $K(n) = 17 = 2 \cdot 5 + 7$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 7$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 7$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, k — количество всех его цифр, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n . Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n) - 9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n) - 9m)$. Значит, $8S(n) + 65 = K(n) \leq 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m$. Следовательно, $m \geq 8$.

Искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 65$, поэтому среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 65$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \geq 199\,999\,999$. При этом $K(199\,999\,999) = 649 = 8 \cdot 73 + 65 = 8S(199\,999\,999) + 65$. Значит, число $n = 199\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 199 999 999.